



Primordial Cosmology

Patrick Peter
Jean-Philippe Uzan

Cosmologie primordiale

Patrick Pierre
et
Jean-Philippe Uzan

Institut d'Astrophysique de Paris

Traduit par
Jasna Brujic et Claudia de Rham



OXJORD
PRESSE UNIVERSITAIRE

OXFORD

PRESSE UNIVERSITAIRE

Grande rue Clarendon, Oxford OX2 6DP

Oxford University Press est un département de l'Université d'Oxford.
Il poursuit l'objectif d'excellence de l'Université en matière de recherche, d'érudition
et d'éducation en publiant dans le monde entier en

Oxford New York

Auckland Le Cap DaresSalaam Hong Kong Karachi
Kuala Lumpur Madrid Melbourne Mexico Nairobi
New Delhi Shanghai Taipei Toronto

Avec des bureaux à

Argentine Autriche Brésil Chili République tchèque France Grèce
Guatemala Hongrie Italie Japon Pologne Portugal Singapour
Corée du Sud Suisse Thaïlande Turquie Ukraine Vietnam

Oxford est une marque déposée d'Oxford University Press
au Royaume-Uni et dans certains autres pays

Publié aux États-Unis
par Oxford University Press Inc., New York
Edition originale : « Cosmologie primordiale »

© Editions Bein-Paris, 2005

Traduction anglaise © Oxford University Press 2009

Ouvrage publié avec le concours du Ministère français
chargé de la culture - Centre national du livre

Les droits moraux des auteurs ont été affirmés
Droit de base de données Oxford University Press (créateur)

Publié pour la première fois en anglais en 2009

Tous droits réservés. Aucune partie de cette publication ne peut être reproduite,
stockée dans un système de recherche ou transmise, sous quelque forme ou par quelque moyen que ce soit,
sans l'autorisation écrite préalable d'Oxford University Press,
ou comme expressément autorisé par la loi, ou selon les termes convenus avec le organisation appropriée
des droits de reprographie. Les demandes concernant la reproduction
en dehors du champ d'application de ce qui précède doivent être envoyées au Département des droits d'
Oxford University Press, à l'adresse ci-dessus.

Vous ne devez pas diffuser ce livre dans une autre reliure ou couverture
et vous devez imposer la même condition à tout acquéreur.

Données de catalogage avant publication de la British Library

Données disponibles

Données de catalogage avant publication de la Bibliothèque du Congrès

Données disponibles

Imprimé en Grande-Bretagne
sur papier sans acide par
IPC, Chippenham, Wilts

ISBN978-0-19-920991-0

13 579 10 8642

Avant-propos de l'édition anglaise

Nous vivons à une époque très particulière. L'univers est né il y a environ 14 milliards d'années. Nous avons commencé à l'étudier avec des outils très primitifs il y a seulement plusieurs milliers d'années. Il y a moins de cent ans, nous avons découvert l'existence d'autres galaxies. Enfin, au cours des deux dernières décennies, nous sommes entrés dans l'ère de la cosmologie de précision. Nous sommes capables d'étudier avec une précision incroyable la structure de la partie observable de l'univers, trouvant les empreintes de ce qui s'est passé dans les premières millisecondes après le big bang.

Mais cette précision ne servirait pas à grand-chose sans le développement de nouveaux outils jusqu'alors inaccessibles aux cosmologistes. Pendant longtemps, nous n'avons pas su étudier la matière à des densités bien supérieures à la densité nucléaire. Cela limitait notre capacité à étudier les processus physiques au tout début de l'univers. L'approche standard consistait à faire diverses hypothèses sur la matière superdense, puis à étudier les conséquences de ces hypothèses. La situation a changé au début des années 1970, lorsque nous avons appris que non seulement la température et la densité, mais aussi les propriétés des particules élémentaires de l'univers primitif étaient très différentes de ce que nous observons aujourd'hui. En particulier, selon la théorie des transitions de phase cosmologiques, pendant les 10^{-10} premières secondes après le big bang, il n'y avait pas beaucoup de différence entre les interactions faibles et électromagnétiques. L'étape suivante importante fut la découverte de la liberté asymptotique, qui impliquait que la force des interactions entre particules élémentaires diminuait à grande densité. Cela nous a permis d'étudier des processus physiques très proches du big bang, à des densités de près de quatre-vingts ordres de grandeur supérieures à la densité nucléaire.

Ces découvertes ont abouti à l'invention de la théorie de l'inflation, qui a permis d'expliquer pourquoi notre univers est si grand et plat, pourquoi il est homogène et isotrope, pourquoi ses différentes parties ont commencé leur expansion simultanément. Selon cette théorie, l'univers primitif a connu une période d'expansion (inflation) exponentiellement rapide dans un état de vide qui évolue lentement. Toutes les particules élémentaires qui nous entourent aujourd'hui ont été produites à la suite de la désintégration de cet état de vide à la fin de l'inflation. L'inflation a effacé toutes les inhomogénéités existantes, mais elle a simultanément produit de nouvelles inhomogénéités à partir d'infimes fluctuations quantiques amplifiées au cours de la croissance exponentielle de l'univers. Ces fluctuations ont servi de germes au processus ultérieur de formation des galaxies.

Dans certains cas, ces fluctuations quantiques peuvent devenir si importantes qu'elles peuvent être responsables non seulement de la formation de galaxies, mais également de la formation de nouvelles parties de l'univers exponentiellement grandes, avec des lois différentes de la physique des basses énergies opérant dans chacune d'elles. Au lieu d'être une sphère, notre univers est devenu une fractale en constante croissance, un multivers composé de différentes parties exponentiellement grandes.

Au début, la théorie inflationniste pouvait paraître trop radicale pour être vraie, mais au cours des deux dernières décennies, nombre de ses prédictions ont été confirmées par des

observations cosmologiques.

vi Avant-propos de l'édition anglaise

et de nombreux cosmologistes l'ont accepté comme faisant partie du nouveau paradigme cosmologique. De plus, après les progrès réalisés il y a quelques années en matière de stabilisation sous vide dans la théorie des cordes, l'image d'un multivers inflationniste en constante croissance, composé de nombreuses parties exponentiellement grandes avec des propriétés différentes, est devenue une partie de ce que l'on appelle aujourd'hui « le paysage de la théorie des cordes ».

Il est clair que le développement ultérieur de la cosmologie nécessitera la connaissance de nombreux sujets qui, traditionnellement, n'appartenaient pas à la boîte à outils d'un cosmologiste. Il faut connaître non seulement la théorie générale de la relativité, mais aussi la théorie moderne des particules élémentaires, la théorie quantique des champs et les éléments fondamentaux de la théorie des cordes. Un défi supplémentaire consiste à établir un lien entre la nouvelle théorie cosmologique et le flux croissant de données d'observation.

Ce livre de Patrick Peter et Jean-Philippe Uzan résout avec succès ce problème difficile. Il commence par une introduction à la relativité générale et à la physique moderne des particules, qui ont connu un essor considérable au début des années 1970. Dans la deuxième partie du livre, ils décrivent la théorie cosmologique d'un univers homogène et légèrement inhomogène. Ensuite, ils décrivent la cosmologie inflationniste. Cela inclut la théorie classique d'un univers inflationniste homogène, la théorie des perturbations inflationnistes et la théorie du réchauffement, responsable de la formation de toutes les particules élémentaires après l'inflation. Les auteurs rassemblent tout cela dans la troisième partie, où ils discutent de la grande unification, de la baryogenèse, de la supersymétrie et de la supergravité, des transitions de phase cosmologiques, de divers modèles d'inflation et d'éléments de la théorie des cordes. Cela fournit une excellente base pour d'autres études indépendantes sur la cosmologie théorique et observationnelle et pour les travaux récents sur l'inflation dans la théorie des cordes et sur le paysage de la théorie des cordes.

Le livre est bien écrit, bien illustré et très convivial. Je suis sûr qu'il sera apprécié non seulement par les étudiants qui se lancent dans ce domaine passionnant de la connaissance, mais également par les experts en cosmologie qui seront heureux de voir une source unique d'informations couvrant tous les aspects importants de la cosmologie moderne.

Andrei Linde
Université de Stanford
Etats-Unis

Avant-propos de l'édition française

La cosmologie scientifique a été l'une des aventures intellectuelles les plus fascinantes du XXe siècle, et elle l'est encore au XXIe. Cela a commencé au début du siècle lorsque les travaux théoriques d'Albert Einstein, d'Alexandre Friedmann et de Georges Lemaître se sont rapprochés des découvertes d'observation de Vesto Slipher, Henrietta Leavitt et Edwin Hubble. Mais, pendant de nombreuses années par la suite, la petite quantité et le faible degré de précision des données d'observation n'ont pas suffi à apporter de l'eau au moulin ! pour les théoriciens, et la cosmologie a fait des progrès lents. Cette situation a commencé à changer à la fin du XXe siècle. Certaines découvertes d'observation remarquables et souvent inattendues - comme la détection du rayonnement de fond cosmique et la confirmation du « problème de la matière noire » - ainsi que l'augmentation progressive de la précision des données d'observation, ont donné lieu à des échanges fructueux entre les chercheurs et les chercheurs. et expérimenter. L'intérêt pour la cosmologie s'est accru à la fin du siècle avec l'éclosion de nouveaux paradigmes théoriques (par exemple la matière noire froide et l'inflation) ainsi que des découvertes expérimentales qui commençaient à se multiplier, accompagnées d'un incroyable accroissement de la précision (par exemple les anisotropies du fond des micro-ondes). , la découverte de l'accélération du taux d'expansion).

À l'heure actuelle, la cosmologie est l'un des domaines scientifiques les plus actifs. Dans sa progression rapide, elle mobilise toutes les ressources de la physique théorique la plus récente (relativité générale, théorie quantique des champs, théorie des supercordes) ainsi que celles de l'observation (grands télescopes, satellites). Le présent ouvrage offre au lecteur un moyen invariable d'accès à l'état de l'art de la cosmologie. Il ne nécessite que des connaissances très élémentaires des bases (relativité spéciale, mécanique quantique non relativiste) et explique en détail tous les outils théoriques qui sous-tendent la recherche cosmologique moderne : relativité générale, théories classique et quantique des champs, physique des particules. , les théories de la grande unification. Il comprend même une introduction aux extensions des théories standards telles que, par exemple, les théories supersymétriques, la théorie des cordes et la cosmologie des branes. En outre, il enseigne au lecteur - de manière très détaillée - les principales applications des cadres théoriques les plus récents pour la description des objets fondamentaux de la cosmologie : la théorie des perturbations cosmologiques, les fluctuations du rayonnement de fond, les lentilles gravitationnelles, la génération d'éléments quantiques. fluctuation pendant le gonflage et défauts topologiques.

Je ne doute pas que ce livre remarquable de Patrick Peter et Jean-Philippe Uzan aura une énorme valeur pour un large public : des stridents qui débute des recherches en cosmologie ou en physique des astroparticules ; des chercheurs expérimentés qui souhaitent mettre à jour leurs connaissances ; et les enseignants qui souhaitent une synthèse de l'état actuel de nos connaissances en cosmologie. Chacun d'entre eux y trouvera une grande quantité d'informations détaillées, présentées de manière claire et facile à comprendre. Enfin, il s'agit d'un ouvrage écrit par deux jeunes chercheurs brillants qui non seulement transmet les connaissances

nécessaire pour comprendre et progresser la cosmologie théorique moderne, mais aussi communiquer l'enthousiasme suscité par la participation à une aventure intellectuelle exceptionnelle dont l'avenir s'annonce aussi passionnant que son passé.

Thibault Damour

Institut des Hautes Etudes Scientifiques
Academy of Sciences
France

Acknowledgements

Nous tenons à remercier nos collègues et collaborateurs, notamment ceux de l'Institut d'Astrophysique de Paris. Les nombreuses discussions que nous avons partagées avec eux nous ont aidé à clarifier de nombreuses questions importantes. Nous tenons particulièrement à remercier Karim Benabed, Francis Bernardeau, François Bouchet, Tristan Brunier, Christos Charmousis, Chris Clarkson, Alain Coc, Cédric Deffayet, Nathalie Deruelle, Peter Dunsby, Ruth Durrer, George Ellis, Gilles Esposito-Farèse, Ted Jacobson, Lev Kofman, David Langlois, Jean-Pierre Lasota, Roland Lehoucq, Martin Lemoine, Keith Olive, Thiago Pereira, Nelson Pinto-Neto, Alain Riazuelo, Christophe Ringeval, Carlo Schmid, Joe Silk, Ismael Tereno, Alberto Vallinotto, Lu dovic van Waerbeke, Filippo Vernizzi et Jeffrey Weeks.

Ce livre n'aurait pas été de la même qualité sans le dévouement de certains de nos collègues dans la relecture et l'édition du premier manuscrit. Nous remercions Nabila Aghanim, Philippe Brax, Bernard Fort, Marc Lilley, Jérôme Martin, Yannick Mellier, Renaud Parentani, Cyril Pitrou, Simon Prunet, Alain Riazuelo, Jonathan Rocher, Carlo Schmid, Frédéric Vincent, et Elisabeth Vangioni, Annick Lesne et Patrizia Castiglione. pour leurs commentaires et leur aide à la réalisation de la version finale, ainsi que Laurent Vigroux et l'Institut d'Astrophysique de Paris pour tout leur soutien dans la publication de cet ouvrage.

Nous tenons également à remercier Andrei Linde et Thibault Damour de nous avoir fait l'honneur de rédiger respectivement les avant-propos des éditions anglaise et française. Nous avons également largement bénéficié de leurs commentaires utiles et enrichissants.

Contenu

Avant-propos de l'édition anglaise	
Avant-propos de l'édition française	vii
Remerciements	ix
Introduction	
La cosmologie : un sujet ancien et contemporain	1
Les spécificités de la cosmologie	2
Cosmologie primordiale	2
Organisation et objectif de ce livre	3
Avertissements	5
Les références	6
 PARTIE I OVERVIEW DE LA BASE THÉORIQUE	
1 Relativité générale	11
1.1 Espace-temps et gravité	11
1.1.1 Espace et temps absolus de la physique newtonienne	11
1.1.2 Espace-temps de la relativité restreinte	14
1.1.3 Relativité générale et espace-temps courbe	19
1.2 Éléments de géométrie différentielle	21
1.2.1 Tenseurs aux collecteurs	21
1.2.2 Équations de Géodésie et symboles de Christoffel	26
1.2.3 Covariant dérivative, parallel transport and Lie dérivative	28
1.2.4 Curvature	31
1.2.5 Covariant approach	34
1.3 Equations of motion	38
1.3.1 Einstein's equations	38
1.3.2 Conservation equations	41
1.3.3 ADM Hamiltonian formulation	44
1.4 Geodesics in a curved space-time	46
1.4.1 Conserved quantities along a geodesic	46
1.4.2 Géodésie déviation equation	47
1.5 Weak-field régime	49
1.5.1 Newtonian limit	49
1.5.2 Gravitational waves in an empty space-time	53
1.6 Tests of general relativity	55
1.6.1 Test of the equivalence principle	55
1.6.2 Tests in the Solar System	60

1.6.3	Gravitational radiation	62
1.6.4	Besoin de tests à échelles astrophysiques	65
	Références	66
2	ûaperçu de la physique des particules et du modèle standard	68
2.1	Du classique au quantique	68
2.1.1	Mécanique classique analytique	69
2.1.2	La physique quantique	79
2.1.3	Mécanique quantique et relativiste	86
2.2	Découpes canoniques	89
2.2.1	Clarification technique	89
2.2.2	Véritable champ libre	90
2.2.3	Le champ scalaire complexe	95
2.3	Classification et propriétés des particules élémentaires	98
2.4	Symétries internes	101
2.4.1	Théorie des groupes	101
2.4.2	Générateurs	103
2.5	Rupture de symétrie	106
2.5.1	Groupe de jauge	107
2.5.2	Mécanisme de Higgs	108
2.5.3	Cas non abélien	110
2.6	Le modèle standard $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$	112
2.6.1	L'interaction forte (QCD)	113
2.6.2	Interaction électrofaible	114
2.6.3	Un modèle complet	116
2.7	Invariances discrètes	121
2.7.1	Parité	121
2.7.2	Conjugaison de charges	123
2.7.3	Inversion du temps et théorème CPT	124
	Les références	126
	PARTIE II LE MODÈLE COSMOLOGIQUE STANDARD MODERNE	
3	Le Univers homogène	129
3.1	La solution cosmologique d'Eriedmann-Lemaitre	129
3.1.1	Construire un mode Univers)	129
3.1.2	Principes cosmologiques et coperniciens	130
3.1.3	Principe cosmologique et métrique	131
3.1.4	Cinématique.matique	136
3.1.5	Dynamique spatio-temporelle	138
3.2	Dynamique des espaces-temps de Fiiedrnnann-Lernaitre	143
3.2.1	Quelques solutions	143
3.2.2	Evolution dynamique	144
3.2.3	Expansion et contraction	148
3.3	Temps et distances	150
3.3.1	Âge de l'Univers et temps de rétrospection	150

3.3.2	Distance radiale de déplacement	151
3.3.3	Distances angulaires	152
3.3.4	Distance de luminosité	15
3.3.5	Nombre et volume	4
3.4	Comportement aux petits redshifts	157
3.4.1	Paramètre de décélération	158
3.4.2	Expression du temps et des distances	158
3.5	Horizons	158
3.5.1	Horizon des événements	160
3.5.2	Horizon de particules	160
3.5.3	Propriétés globales	162
3.6	Au-delà du principe cosmologique	163
3.6.1	Classer les espaces-temps	167
3.6.2	Univers à sections spatiales non homogènes	168
3.6.3	Univers à sections spatiales homogènes	170
	Références	171
4	Le modèle standard du Big-Bang	175
4.1	Le diagramme de Hubble et l'âge de l'Univers	177
4.1.1	La constante de Hubble	177
4.1.2	L'apport des supernovæ	178
4.1.3	L'âge de l'Univers	182
4.2	La thermodynamique dans un univers en expansion	186
4.2.1	Thermodynamique d'équilibre	188
4.2.2	Thermodynamique hors équilibre	188
4.2.3	Deux cas limites	197
4.3	Nucléosynthèse primordiale	201
4.3.1	Principales étapes du mécanisme	204
4.3.2	Etat initial	205
4.3.3	Gel de l'interaction faible et du rapport neutron/proton	206
4.3.4	Abondances des éléments légers	
4.3.5	Statut d'observation	208
4.4	Le rayonnement de fond cosmique des micro-ondes	211
4.4.1	Recombinaison	215
4.4.2	Propriétés du fond cosmique des micro-ondes	216
4.4.3	Une autre preuve de l'expansion de l'Univers	217
4.5	Statut du modèle Big-Bang	221
4.5.1	Un bon modèle standard...	226
4.5.2	... mais un modèle incomplet	226
4.5.3	Conclusion	226
	Les références	228
		234
		235

L'univers inhomogène	238
5.1 Perturbations newtoniennes	238
5.1.1 Cas d'un espace statique	238
5.1.2 Cas d'un espace d'exposition	240
5.1.3 Prédications et observables	246
5.1.4 Vers le régime non linéaire	249
5.2 Théorie des perturbations cosmologiques invariantes de jauge	251
5.2.1 Espace-temps perturbé	251
5.2.2 Description du sujet	255
5.2.3 Choisir une jauge	257
5.2.4 Équations d'Einstein : dérivation	260
5.2.5 Équations d'Einstein : décomposition SVT	262
5.2.6 Équation de conservation perturbée pour un fluide	264
5.2.7 Interprétation des équations de perturbation	265
5.3 Évolution	266
5.3.1 Modes vectoriels et tenseurs	267
5.3.2 Evolution du potentiel gravitationnel)	269
5.3.3 Modes scalaires dans l'adiabatique. régime	272
5.3.4 Mélange de plusieurs fluides	278
5.4 Spectre de puissance des fluctuations de densité	282
5.4.1 Deux approches équivalentes	283
5.4.2 Différents régimes	285
5.4.3 Quelques améliorations	292
5.5 La structure à grande échelle de l'Univers	296
5.5.1 Observer la structure à grande échelle	296
5.5.2 Structures en régime non linéaire	299
Les références	304
Le fond cosmique des micro-ondes	307
6.1 Origine des anisotropies du fond diffus cosmologique	307
6.1.1 Formule de Sachs-Wolfe	307
6.1.2 Spectre de puissance angulaire	311
6.2 Propriétés du spectre de puissance angulaire	316
6.2.1 Grandes échelles angulaires	317
6.2.2 Balances intermédiaires	318
6.2.3 Petites écailles	323
6.2.4 Autres effets	326
6.3 Description cinétique	329
6.3.1 Équation de Boltzmann perturbée	330
6.3.2 Évaluer les expressions invariantes	339
6.3.3 Diffusion de Thomson et polavisation	342
6.3.4 Intégration numérique	355
6.4 Anisotropies du fond diffus cosmologique	356
6.5 Effets des paramètres sur le spectre de puissance angulaire	364
6.5.1 Paramètres cosmologiques	364
6.5.2 Paramètres décrivant la physique primordiale	367

Les références	371
7 Gravitational lensing and dark matter	374
7.1 Gravitational lensing and its applications	374
7.1.1 Gravitational lensing in the thin-lens régime	375
7.1.2 Lensing by galaxies and galaxy clusters	387
7.1.3 Gravitational distortion by the large-scale structure	395
7.1.4 Cosinic convergence	399
7.1.5 Cosinic shear	402
7.1.6 Measurement of the cosmic shear	405
7.1.7 Lensing on the cosmic microwave background	408
7.2 Evidence for the existence of dark matter	411
7.2.1 Dark matter in galaxies	411
7.2.2 Dark matter in clusters and groups of galaxies	419
7.2.3 Cosmological evidence	422
7.2.4 Summary	423
7.2.5 Candidates and constraints	423
References	445
8 Inflation	450
8.1 Genèse du paradigme	451
8.1.1 Des motivations originales	451
8.1.2 Résolution des problèmes du Big-Bang	452
8.1.3 Premiers modèles d'inflation	454
8.1.4 L'inflation comme phase de De Sitter	455
8.2 Dynamique de l'inflation à champ unique	457
8.2.1 Équations d'évolution	457
8.2.2 Paramètres de roulement lent	459
8.2.3 Fin de l'inflation	463
8.2.4 Quelques exemples	465
8.2.5 Classification des modèles inflationnistes	469
8.3 Fluctuations quantiques pendant l'inflation	470
8.3.1 Champ scalaire de test sans masse dans un espace-temps de De Sitter	476
8.3.2 Champ d'essai massif à De Sitter	477
8.3.3 Champ d'essai massif lors d'un gonflage lent	478
8.4 Fluctuations quantiques de l'inflation	479
8.4.1 Aperçu des questions à aborder et des résultats attendus	479
8.4.2 Quantités perturbées	481
8.4.3 Équations de perturbation	483
8.4.4 Evolution des modes de grandes longueurs d'onde	485
8.4.5 Conditions de jonction et leurs applications	488
8.4.6 Quantification des perturbations de densité	492
8.4.7 Ondes gravitationnelles	494
8.5 Perturbations en régime de roulage lent	495
8.5.1 Une solution exacte : l'inflation selon la loi de puissance	496
8.5.2 Cas général	

8.5.3	Relation avec les observations	501
8.5.4	Reconstruction du potentiel	505
8.	Fin du gonflage et réchauffage	507
8.6.1	Réchauffage perturbateur	507
8.6.2	Théorie du préchauffage	510
8.	Inflation éternelle	516
8.7.1	Argument heuristique	516
8.7.2	Approche stochastique	518
8.	Rallonges	523
8.8.1	Gonflage multichamp	523
8.8.2	Non-gaussianité	530
8.8.3	Problème trans-planckien	532
8.	Statut du paradigme	537
	Les références	541
PARTIE III AU-DELÀ DES MODÈLES STANDARD		
9	Grande unification et baryogenèse	549
9.1	Interactions	549
9.1.1	Principe de superposition	550
9.1.2	Etats de la partie A"	551
9.2	Grande unification	554
9.2.1	Problèmes du modèle standard	554
9.2.2	Unification des constantes de couplage	560
9.2.3	Modèles d'unification	562
9.2.4	Conséquences de la grande unification	566
9.2.5	Masse des neutrinos	568
9.3	Baryogenèse	569
9.3.1	Conditions de Sakharov pour la baryogenèse	569
9.3.2	Anomalies électrofaibles	571
9.3.3	Baryogenèse électrofaible	573
9.3.4	Leptogenèse	575
9.3.5	Mécanisme Affleck-Dine	576
	Les références	578
d	Extensions du cadre théorique	579
10.1	Théorie du tenseur scalaire de la gravité	579
10.1.1	Formulation	580
10.1.2	Contraintes locales	584
10.1.3	Aspects cosmologiques	584
10.1.4	Aspects phénoménologiques	588
10.1.5	Λ /(R) théorie de la gravité et du tenseur scalaire	593
10.2	Théorie quantique des champs dans un espace-temps courbe	594
10.2.1	Physique quantique, gravité classique	594
10.2.2	Création de particules	597
10.2.3	Un exemple complet	602

10.3 Supersymétrie et supergravité	604
10.3.1 Généralités techniques	604
10.3.2 Modèle Wess-Zumino	610
10.3.3 Champ de jauge	614
10.3.4 Rupture de supersymétrie	615
10.3.5 Le modèle standard supersymétrique minimal (MSSM)	618
10.3.6 Supergravité	621
Les références	625
11 Transitions de phase et défauts topologiques	628
11. Transitions de phases	628
11.1.1 Théorie du champ thermique	628
11.1.2 Dynamique de la rupture de symétrie	630
11.1.3 Formation de défauts topologiques	633
11.2 Murs de domaine	635
11.2.1 Longueur de corrélation	635
11.2.2 Configurations statiques	638
11.3 Vortex	640
11.3.1 Mécanisme de croquettes pour cordes cosmiques	641
11.3.2 Structure interne	647
11.4 Monopôles	648
11.5 Textures	648
11.6 Les défauts en général	649
11.6.1 Connectivité	649
11.6.2 Groupe fondamental	650
11.6.3 Groupe d'homotopie	651
11.6.4 Défauts semi-topologiques	653
11.7 Les murs en cosmologie	653
11.7.1 Distribution et évolution	655
11.7.2 Contraintes d'observation	656
Monopôles cosmologiques	656
11.8.1 Les monopoles GUT sont inévitables	656
11.8.2 Le problème du monopole	660
11.8.3 Solutions possibles au problème du monopôle	661
11.9 Cordes cosmiques	661
11.9.1 Les propriétés générales	662
11.9.2 Effets gravitationnels des cordes	666
11.9.3 Effet d'un réseau sur le fond micro-onde	671
11.9.4 conséquences des cordes cosmiques	674
Les références	
12 extensions cosmologiques	678
12.1 Construction de modèles inflationnistes	678
12.1.1 Un modèle cohérent : la supergravité	681
12.1.2 Inflation à F terme	683
12.1.3 Inflation à terme ZJ	

12.2	Constante cosmologique et énergie sombre	684
12.2.1	Le problème de la constante cosmologique	685
12.2.2	La nature de l'énergie noire	687
12.2.3	Quintessence	690
12.2.4	Autres modèles	697
12.2.5	Autres approches	701
12.2.6	Paramétrisation de l'équation d'état	705
12.2.7	Implications pour la formation de la structure à grande échelle	708
12.3	Constantes variables	711
12.4	Topologie de l'Univers	716
12.4.1.	Structures locales et mondiales	716
12.4.2	Introduction mathématique	718
12.4.3	Classification des variétés tridimensionnelles	718
12.4.4	Observationa) signatures	726
	Références.es	733
13	sujets avancés	737
13.1	Dimensions supplémentaires : théorie IClnza-Klein	737
13.1.1	Relativité générale dans les dimensions JD	737
13.1.2	Équations projetées en quatre dimensions	739
13.1.3	Théorie de Dilaton et Einstein-Maxwell	741
13.1.4	Cadre Einstein	742
13.1.5	Compactification	743
13.2	Quelques travaux sur la théorie des cordes	744
13.2.1	Des particules aux cordes	744
13.2.2	Superstving	746
13.2.3	Cordes ouvertes et fermées	749
13.2.4	Dualités	752
13.2.5	Lagrangiens basse énergie	753
13.2.6	Ovigin de trois dimensions spatiales	755
13.3	L'Univers comme « brane »	758
133.1	Motivations	758
13.3	2 Équations d'Einstein induites	761
13 3 3	Le mode Randall-Snndrum !	764
13.3	4 Phénoménologie cosmologique	767
13.3.5	Extensions possibles	768
13.3.6	L'Univers comme défaut	769
13.3.7	Modèles de gravité induite	771
13.4	Singularité initiale et Univers rebondissant	772
13.4.1	A l'approche de la singularité	772
13.4.2	Le scénario pré-Big-Bang	775
13.4.3	Les scénarios cycliques	781
13.4.4	Rebond régulai et spectre de puissance	785
	Les références	793

Annexe A Valeurs numériques	796
A1 Constantes physiques	796
A.2 Quantifications astrophysiques	796
A.3 Unités	797
A.3.1 Unités naturelles	797
A.3.2 Facteurs de conversion	798
A.4 Physique des particules	798
A.5 Quantifications cosmologiques	799
A.6 Spectre électromagnétique	799
Les références	803
Appendix B Spécial functions	804
B.1 Euler fonctions	804
B.2 Spherical harmonies	805
B.2.1 Définition	805
B.2.2 Expressions	805
B.2.3 Properties	805
B.2.4 Fourier transform	806
B.2.5 UsefuJ intégrais	807
B.3 Bessel fonctions	808
B.3.1 Définition	808
B.3.2 Asymptotic properties	808
B.3.3 Spécial cases	809
B.3.4 Spherical Bessel fonctions	809
B.3.5 Quelques intégrais utiles	810
B.4 Polynômes de Legendre	811
B.4.1 Polynômes de Legendre associés	811
B.4.2 Polynômes de Legendre	811
B.5 Transformée de Fourier et modes propres du Laplacien	812
B.5.1 Transformée de Fourier	812
B.5.2 Spectre de puissance	812
B.5.3 Coordonnées cartésiennes	813
B.5.4 Coordonnées sphériques	813
Les références	815
Annexe C Grandeurs cosmologiques utiles	816
Espace d'arrière-plan C1	816
Géométrie C11	816
C.1.2 Sujet	817
C.2 Quantifications perturbées	819
C.2.1 Géométrie	819
C.2.2 Sujet	821
Indice	823

Introduction

La cosmologie : un sujet ancien et contemporain

Au cours des dernières décennies, l'étude de l'Univers a subi de grandes transformations, tant théoriques qu'observationnelles. La cosmologie, dont le but est de comprendre les propriétés globales et les structures à grande échelle de l'Univers (leur origine, leur évolution, leurs caractéristiques...) est désormais entrée dans l'ère de la précision.

Pendant de nombreuses années, la cosmologie a été un sujet très spéculatif, s'appuyant autant sur la métaphysique que sur la physique. Le développement en 1915 de la théorie de la relativité générale donne naissance à un cadre théorique cohérent, permettant de formuler mathématiquement la notion d'espace et de temps. Il fut alors possible, dès 1924, de formuler des modèles cosmologiques fondés sur cette théorie. De tels modèles de l'Univers, dont la caractéristique principale est d'être en expansion, ont permis de comprendre de nombreux phénomènes d'observation, comme la récession des galaxies, comme le soulignait Edwin Hubble. Pendant une vingtaine d'années, la cosmologie s'est limitée à la description et à la reconstruction de cette expansion, ainsi qu'à débattre de la réalité de cette expansion.

Dans une seconde période, à partir de 1948 environ, l'étude des processus physiques dans un espace en expansion a conduit à la formulation du modèle chaud du Big Bang. En prenant cette expansion au sérieux, on peut déduire des lois de la physique nucléaire que l'Univers a une histoire thermique. En particulier, les noyaux légers doivent s'être formés dans les premières minutes de l'expansion et il doit exister un rayonnement de fond électromagnétique. Grâce à ces évolutions, le modèle repose sur trois bases solides, dont la confirmation de l'expansion. Ces conclusions reposent uniquement sur l'hypothèse selon laquelle la relativité générale est une description valable de la dynamique de l'Univers et sur la validité de la physique ordinaire. Aucun autre modèle alternatif n'a jusqu'à présent pu reproduire ces observations, surtout avec si peu d'ingrédients.

Depuis les années 1980, de nombreux développements ont eu lieu. Le mode Big Bang) à un nouveau niveau. Non seulement il décrit la dynamique de l'Univers à grande échelle, mais il aborde également les questions sur les propriétés et l'origine des structures à grande échelle. Parmi les avancées les plus récentes, on peut citer une explosion des données observationnelles :

- depuis la découverte du fond cosmique à micro-ondes en 1965, son observation est devenue de plus en plus précise, depuis la découverte initiale des anisotropies thermiques par le satellite COBE (COsmic Background Explorer) (1992) jusqu'à la carte du ciel complet par le satellite WMAP. (Sonde d'anisotropie micro-ondes Wilkinson) en 2003 ;
- le diagramme de Hubble, reliant la vitesse de récession des galaxies à leur redshift, pourrait être étendu à de grandes distances, notamment grâce à l'observation de supernovæ lointaines ;

2 Introduction

- les nouveaux catalogues de galaxies comptent désormais plusieurs milliers d'objets, ce qui permet de cartographier la répartition tridimensionnelle de la matière ;
- depuis 2000, de nouvelles observations sont apparues, comme le cisaillement cosmique.

On peut remarquer plusieurs développements théoriques majeurs :

- la formulation du paradigme de l'inflation qui relie l'origine de la structure à grande échelle de l'Univers à la physique des hautes énergies ;
la formulation du modèle froid de matière noire qui représente un cadre pour l'étude de la structure à grande échelle ;
- un nombre considérable d'indications et de preuves observationnelles conduisant au postulat de l'existence de la matière noire et de l'énergie noire. L'étude de leur nature façonnera la recherche au cours des prochaines décennies.

Les spécificités de la cosmologie

Malgré ces évolutions et l'abondance des observations, la cosmologie conserve néanmoins un statut différent des autres sciences. Un seul Univers est en effet observable, et ce, depuis une position unique dans l'espace et dans le temps. L'essentiel de ces observations se limite donc à notre passé cône lumineux. La cosmologie ne peut donc pas empêcher le recours à des hypothèses impossibles à vérifier, comme le *principe cosmologique*, qui a de fortes implications concernant les symétries cosmologiques espace-temps. L'élaboration d'un modèle cosmologique repose principalement sur trois hypothèses : (1) le choix de a. théorie de la gravité, (2) des hypothèses concernant la nature de la matière présente dans l'Univers et (3) une hypothèse de symétrie.

Il faut souligner que les observations cosmologiques ne peuvent être lues indépendamment de ces hypothèses théoriques (Fig. 1 et 2). La validité d'un modèle ne peut donc pas être prouvée, mais on peut rechercher une cohérence entre les observations et le cadre théorique dans lequel elles sont lues. Cela n'empêche pas la cosmologie d'exclure les modèles donnant des prédictions incompatibles avec les observations, comme dans tout autre domaine de la physique.

Cosmologie primordiale

La cosmologie primordiale, dont il sera question dans ce livre, repose sur deux piliers : de nombreuses observations astronomiques réalisées par des instruments de plus en plus performants qui révèlent la structure locale de notre Univers avec une précision toujours croissante, et un ensemble d'instruments de haute énergie. théories physiques censées décrire la dynamique de l'Univers primordial.

Nous devons donc procéder selon un processus bidirectionnel (Fig. 2). D'une part (flèche '1'), en utilisant certaines hypothèses de physique des hautes énergies, on peut construire un modèle phénoménologique pour l'Univers primordial. Ce modèle doit fournir les propriétés des fluctuations primordiales qui donnent naissance, par instabilité gravitationnelle, à la structure à grande échelle de l'Univers. Nous devrions donc être capables de prédire les propriétés résultantes de l'Univers. La comparaison d'un modèle spécifique avec différents ensembles d'observations nous permet de le contraindre. En revanche (flèche « 2 »), ces modèles apportent des solutions aux problèmes rencontrés dans l'interprétation des observations : nature de la matière noire, de l'énergie noire, etc.

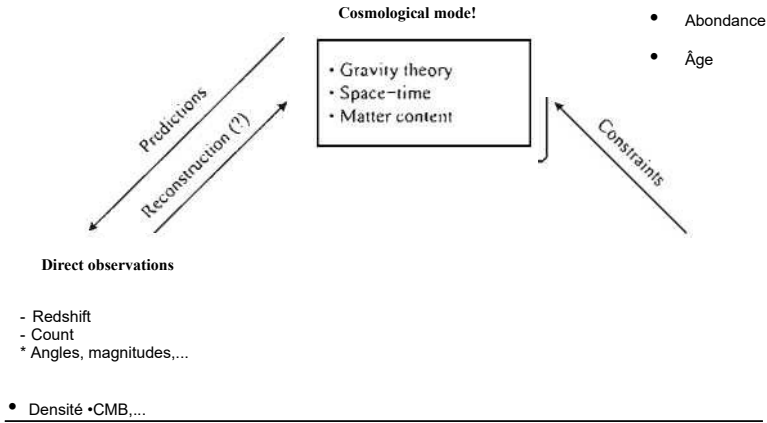


Fig. 1 La construction d'un modèle cosmologique et son lien avec les observations. La plupart des observations ne peuvent pas être interprétées en dehors de ce modèle.

Grâce à ces théories, nous espérons pouvoir reproduire les observations, et d'autre part, utiliser ces observations pour contraindre les théories lorsqu'elles sont extrapolées à des énergies expérimentalement inaccessibles.

Organisation et objectif de ce livre

L'objectif de cet ouvrage est de fournir les outils de la cosmologie primordiale, d'en décrire l'état et les questions actuelles. Il est organisé en trois parties. La première partie passe en revue les bases utiles à l'étude de la cosmologie. La deuxième partie se concentre sur le modèle cosmologique standard. Il représente le cœur de cet ouvrage et nous avons essayé d'en décrire en détail tous les aspects techniques. La troisième partie décrit les extensions de ce modèle standard et éclaire les sujets actuellement en discussion.

La première partie passe en revue les notions théoriques requises. En effet, la cosmologie standard de la silice est basée sur les théories de la relativité générale et sur le modèle standard de la physique des particules. Les chapitres 1 et 2 donneront un aperçu de ces deux domaines. Nous essayons de distinguer ce qui est bien établi des domaines plus obscurs des théories actuelles. Les différentes extensions de ces cadres standards jouent un rôle important pour l'élaboration de modèles de l'Univers primordial. Il est donc important de délimiter ces zones.

La deuxième partie présente le modèle cosmologique standard.

Les chapitres 3 et 4 dressent les solutions cosmologiques les plus courantes de la relativité générale et du modèle chaud du Big Bang. Le chapitre 3 est principalement mathématique tandis que le chapitre 4 se concentre sur la physique. Ces deux parties ne considèrent qu'un Univers homogène et isotrope sans tenir compte de la structure présente dans l'Univers. Ce - modèle standard sera notre modèle de référence. Nous discuterons de ses succès et de ses problèmes.

L'étude de la structure à grande échelle de l'Univers est développée dans le chapitre 5, qui constitue incontestablement le cœur technique de la cosmologie primordiale. La théorie cosmologique des perturbations décrit comment les perturbations initiales évoluent dans un

Univers en expansion.

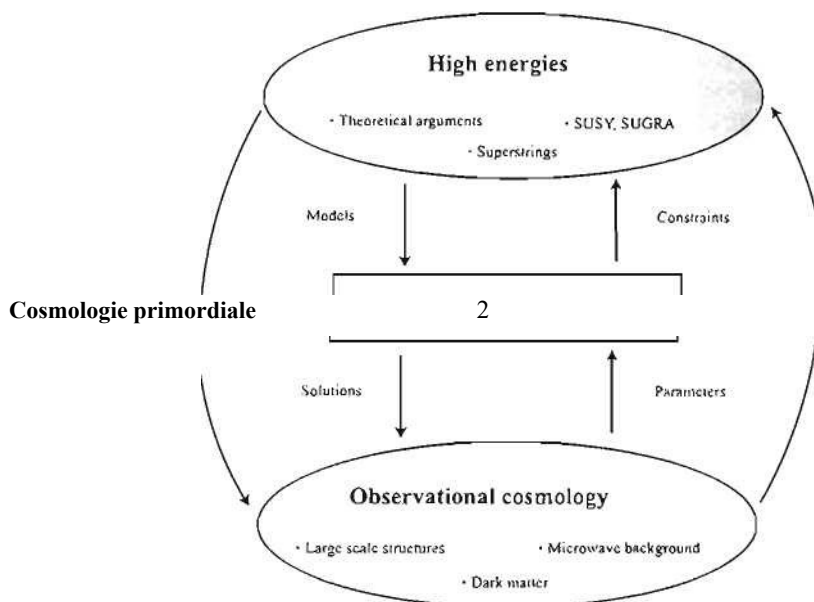


Fig. 2 La cosmologie primordiale construit des modèles phénoménologiques inspirés de la physique des hautes énergies pour décrire l'Univers. Elle recherche des mécanismes capables de décrire les phases primordiales de notre Univers, l'origine des structures à grande échelle et du contenu matière de notre Univers. Chaque modèle doit produire des prédictions observationnelles. En retour, la cosmologie observationnelle permet de mesurer les paramètres de ces modèles et de poser, dans le meilleur des cas, quelques contraintes sur les théories initiales.

Nous établirons les équations de cette théorie et discuterons de ses solutions au sein de certains régimes.

Notre livre ne se concentre pas beaucoup sur les aspects observationnels de la cosmologie, néanmoins les chapitres 6 et 7 sont consacrés au calcul de deux prédictions observationnelles fondamentales. Notre objectif est de rendre le lecteur capable de calculer ces prédictions au sein d'un modèle donné. Le chapitre 6 décrit le calcul du spectre de puissance angulaire des anisotropies cosmologiques de la température de fond des micro-ondes, et le chapitre 7 se concentre sur les effets de lentille gravitationnelle et sur les preuves de l'existence de la matière noire.

Le chapitre 8 développe le paradigme de l'inflation. Ce paradigme est fondamental pour expliquer l'origine de la structure à grande échelle et il apparaît non seulement cohérent avec toutes les observations, mais également comme le seul mécanisme jusqu'à présent capable de reproduire ces observations. Le modèle chaud du Big Bang associé à l'inflation fournit un modèle de référence de l'Univers. Ce chapitre décrit les propriétés générales des modèles inflationnistes et analyse en détail le calcul du spectre des fluctuations primordiales, principalement dans l'approximation lente. Nous aborderons également les mécanismes de réchauffement qui font la transition entre l'Univers inflationnaire, le Big Bang chaud et l'idée d'inflation éternelle.

La troisième partie aborde différentes extensions de ces formalismes standards, tant pour les théories fondamentales que pour le cadre cosmologique lui-même.

Le chapitre 9 se concentre sur les grandes théories unifiées et sur leurs conséquences pour la compréhension de l'origine de la matière ordinaire, ce qu'on appelle la baryogenèse.

Le chapitre 10 décrit différentes extensions du cadre théorique qui ont des conséquences pour la cosmologie. Nous décrivons d'abord les théories scalaires-tensorielles de la gravité. Ces théories représentent l'extension la plus simple de la relativité générale et incluent, outre le graviton, une interaction scalaire. Ces modèles sont motivés par des théories mimant des hautes énergies, telles que la théorie des cordes, pour laquelle l'action des basses énergies est généralement une théorie du tenseur scalaire. Nous décrivons ensuite les bases de la théorie quantique des champs dans un espace-temps courbe. Cela placera les calculs effectués au chapitre 8 sur une base plus solide. Enfin, nous décrirons la supersymétrie et la supergravité comme extensions du modèle standard de la physique des particules. Ces théories ont de nombreux candidats pour les particules de matière noire et de nombreux champs scalaires, ce qui les rend pertinentes pour l'élaboration de modèles inflationnistes.

Le chapitre 11 aborde la question des transitions de phase au cours de l'Univers primordial et décrit les modèles de défauts topologiques générés lors des transitions de phase avec rupture de symétrie. Ces reliefs peuvent jouer un rôle important au cours de l'Univers primitif même si l'on sait désormais qu'ils ne peuvent pas être responsables de l'origine de la structure à grande échelle telle que nous l'observons.

Les deux derniers chapitres décrivent les différentes implications de ces extensions pour la cosmologie. Le chapitre 12 tire les conséquences de la supersymétrie pour la construction de modèles inflationnistes. Nous aborderons ensuite la question de l'origine de l'accélération de notre Univers. Le chapitre 13 se concentre sur la phénoménologie de la théorie des cordes pour l'Univers primordial. Ces sujets sont encore aujourd'hui débattus par les chercheurs et notre objectif est d'en esquisser les motivations et les caractéristiques.

Avertissements

Afin d'éviter un débordement de références dans le texte, nous avons fait le choix de citer dans cet ouvrage principalement des revues détaillées et des textes que nous jugeons clairs et pédagogiques ou pour lesquels on peut trouver une bibliographie complète.

Quant aux valeurs numériques des paramètres cosmologiques déduites des différentes analyses, ces valeurs doivent être prises avec la plus grande prudence, car elles dépendent : (1) de l'ensemble des observations choisies, (2) du modèle que l'on compare à ces observations et pour par exemple sur le nombre de paramètres autorisés à varier, et (3) sur le type d'analyse statistique qui a été utilisé. Les valeurs que nous citons doivent être considérées davantage comme des indications approximatives plutôt que comme les dernières valeurs à retenir. Nous soulignons également que les observations se développent rapidement, de sorte que certaines conclusions, par exemple sur la matière noire, peuvent changer à l'échelle d'une année.

Les références

Pour une discussion sur le contexte de la formulation des modèles cosmologiques :

- [1] G. FR ELUS, 'Cosmologie et vérifiabilité', *Q. Jl. Astr. Soc.* **16**, 245-264, 1975.
- [2] H. BONDI, *Cosmologie*, Monographie de Cambridge sur la physique, 1961.

[3] GFR ELLIS, « Problèmes de philosophie de la cosmologie », astro-ph/0602280.

Livres d'introduction à la cosmologie :

[4] ER HARRISON, *Cosmologie, la science de l'Univers*, Cambridge University Press, 2000.

[5] J. BERNSTEIN, *Introduction à la cosmologie*, Englewood Cliffs, 1995. [6] A. LIDDLE, *Une introduction à la cosmologie moderne*, John Wiley and Sons, 1999. [7] B. RIDDEN, *Introduction à la cosmologie*, Addison Wesley, 2003.

[8] S. WEINBERG, *Les trois premières minutes*, Bantam Books, 1977.

[9] ER HARRISON, *L'obscurité la nuit : une énigme de l'univers*, Harvard University Press, 1987.

Livres d'histoire de la cosmologie moderne :

[10] H. KRAAUGH, *Cosmologie et controverse*, Princeton University Press, 1996.

[11] J.P. **Luminet**, *Alexandre Friedmann, Georges Lemaître, Essais de cosmologie*, Seuil, 1997.

Ouvrages de référence en cosmologie :

[12] PJE PEEBLES, *Cosmologie physique*, Princeton University Press, 1971.

[13] PJE PEEBLES, *Principe de cosmologie physique*, Princeton University Press, 1993.

[14] S. WEINBERG, *Gravitation et cosmologie : principes et applications de la théorie de la relativité générale*, John Wiley and Sons, 1972.

[15] EW KOLB et MS TURNER, *The early Universe*, Addison Wesley, 1993.

[16] T. PADMANABHAN, *Formation de la structure dans l'univers*, Cambridge University Press, 1993.

[17] S. DoDELSON, *Cosmologie moderne*, Académie Press, 2003.

[18] J. Ri CH, *Fondements de la cosmologie*, Springer, 2001.

[19] JA PEACOK, *Physique cosmologique*, Cambridge University Press, 1998.

[20] AR LIDDLE et DH LYTH, *Inflation cosmologique et structure à grande échelle*, Cambridge University Press, 2000.

[21] VF MUKHANOV, *Fondements physiques de la cosmologie*, Cambridge University Press, 2005.

Références 7

Pour les compléments astrophysiques :

[22] T. PADMANABHAN, *Astrophysique théorique* (3 volumes), Cambridge University Press, 2002.

[23] J. BINNEY et S. TREMAINE, *Dynamique galactique*, Princeton University Press, 1987.

[24] MS LÛNGAIR., *Formation de galaxies*, Springer-Verlag, 1998.

Première partie

Aperçu des bases théoriques

1

Relativité générale

Puisque la gravité est la seule force à longue portée qui ne peut être filtrée, les propriétés de l'Univers à grande échelle seront essentiellement déterminées par cette force.

Le but de ce chapitre n'est pas de présenter une description complète et rigoureuse de la théorie de la relativité générale. De telles explications détaillées existent dans la littérature et nous y renvoyons le lecteur pour plus de détails ; voir Réf. [1—5]. Nous souhaitons ici rappeler les hypothèses et formules de base de la relativité générale qui sont nécessaires pour la suite de ce livre.

Nous rappelons dans la section 1.1 l'évolution du concept mathématique d'espace-temps de la physique newtonienne à la relativité générale. La section 1.2 résume les principales définitions des outils mathématiques utilisés en relativité générale. Nous dérivons des équations d'Einstein qui déterminent la dynamique de l'espace-temps et des équations de conservation qui déterminent l'évolution de la matière dans la section 1.3 et nous montrons dans la section 1.5 comment la gravité newtonienne est récupérée dans une limite de champ faible. La section 1.4 décrit la cinétique dans un espace-temps courbe et nous résumons les différents tests de relativité générale dans la section 1.6. Les autres interactions fondamentales, telles que les interactions électromagnétiques, faibles et fortes, sont abordées au chapitre 2.

1.1 Espace-temps et gravité

1.1.1 Espace et temps absolus de la physique newtonienne

En physique newtonienne, l'espace est décrit par un espace mathématique absolu et immuable. Cet espace est euclidien en 3 dimensions. On peut donc le doter d'une origine et de 3 axes de référence arbitraires, déterminant ainsi un repère absolu de référencé.

Le temps est aussi idéal et absolu. Il est indépendant du mouvement de tout observateur et joue le rôle d'un paramètre externe. Pour tout événement P , il existe une notion intuitive de simultanéité (définie comme un ensemble de tous les événements qui se produisent en même temps). Si l'on considère un deuxième événement Q il y a trois issues possibles : (1) on peut en principe aller de P à Q , Q appartient donc au futur de P , (2) on peut en principe aller de Q à P , Q donc appartient au passé de P et (3) il est impossible de voyager entre P et Q , les deux événements sont donc simultanés. Cette structure causale de l'espace-temps newtonien est représentée sur la figure 1.1.

Puisque l'espace est supposé euclidien, le théorème de Pythagore permettrait de calculer la distance entre deux points voisins.

$$dP = (dP)^2 + (dz^2) + (dT^3)^2, \quad (1.1)$$

Temps

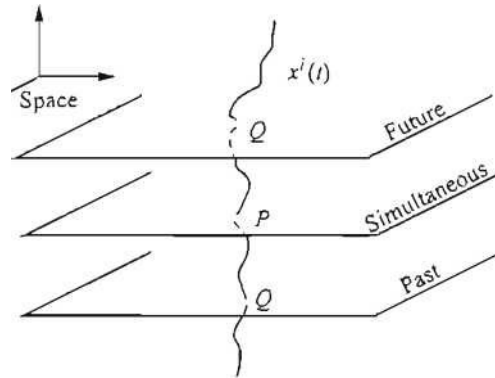


Fig. 1.1 La structure causale de l'espace-temps newtonien. Si Q peut être lié à P par une trajectoire $\mathcal{E}(t)$ de vitesse finie ($dx'/dt < \infty$), Q est dans le passé ou le futur de P , sinon il est simultané. L'ensemble de tous les événements simultanés constitue un espace euclidien tridimensionnel. en coordonnées cartésiennes. Nous pouvons réécrire cette distance sous une forme plus courte comme

$$d^2 = \sum_{j=1}^3 (da^j)^2 = \sum_{j=1}^3 \delta_{ij} dx^i dx^j \quad (1-2)$$

où δ^i_j est le symbole de Kronecker égal à 1 si $i = j$ et 0 sinon, et les indices latins $j, \dots = 1 \dots 3$. Cette forme introduit la convention de sommation d'Einstein selon laquelle on suppose implicitement une somme sur tous les indices répétés. Par exemple, si T et V sont deux vecteurs, $TV = T_j V^j = T^1 V^1 + T^2 V^2 + T^3 V^3$ est le produit scalaire de ces deux vecteurs.

La trajectoire de tout corps est donc donnée sous la forme paramétrique par $x^i(t)$. Le temps de trajet du point A à t_A au point B à t_B est donné par $t_B - t_A$ et est indépendant de la trajectoire entre A et B .

Les lois de la physique ne nécessitent pas nécessairement des coordonnées cartésiennes. On peut par exemple utiliser des coordonnées sphériques ou cylindriques si elles sont mieux adaptées au problème posé. Supposons que nous ayons un système de coordonnées (y^j) lié aux coordonnées cartésiennes (x^i) par une relation de la forme $x^i = x^i(y^j)$. Le vecteur da de coordonnées da^i dans le Système Cartésien a pour coordonnées $dy^j = (dy^j/dx^i) dx^i$; on en déduit donc que la distance entre deux points voisins, dans tout Système de coordonnées, est

$$ds^2 = g_{ij} dy^i dy^j \quad (i-3)$$

g_{ij} étant la métrique de l'espace dans les nouvelles coordonnées. Par exemple, les coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) sont définies par

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta.$$

En appliquant (1.3), on en déduit que les seules composantes non nulles de la métrique en coordonnées sphériques sont

$$g_{rr} = 1, \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2 \theta.$$

L'élément de ligne (1.2) prend la forme

$$ds^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2).$$

1.1.1.1 Groupe galiléen

Le choix du référentiel est arbitraire. Il est donc intéressant d'exposer les transformations de

repère qui préservent la forme (1.1) de l'élément de ligne dt^2 . Cela équivaut à trouver les transformations de coordonnées en gardant les 3 axes de référence orthogonaux. L'ensemble de ces transformations est donc donné par les rotations rigides de ces trois axes et une translation de l'origine

$$x'^\mu = A^\mu_\nu(t) x^\nu + T^\mu(t), \quad A^\mu_\nu(t) A^\nu_\rho(t) = \delta^\mu_\rho. \quad (1.4)$$

La rotation A' peut être dépendante du temps, mais elle est rigide car indépendante de la position ; il en est donc de même pour tous les points à un instant donné. est une traduction qui dépend du temps. L'invariance sous l'action de ces transformations (1.4) reflète l'isotropie et l'homogénéité de l'espace euclidien. Parmi toutes ces transformations rigides, celles du groupe galiléen jouent un rôle central. Le groupe galiléen est le sous-groupe des rotations indépendantes du temps et des traductions linéaires dans le temps, $T^\mu = v^\mu t$ où T_0^μ et v^μ sont des vecteurs constants, préservant ainsi l'équivalence entre référentiels inertiels. Les lois de la physique sont supposées identiques pour tous les référentiels inertiels, ce qui signifie qu'elles sont invariantes sous l'action d'une transformation du groupe galiléen.

$$x'^\mu = A^\mu_\nu x^\nu + T^\mu, \quad A^\mu_\nu A^\nu_\rho = \delta^\mu_\rho. \quad (1.5)$$

Ce groupe est composé de trois rotations, trois traductions et trois changements de référentiels inertiels. Prenant également la possibilité de changer l'origine du temps, il s'agit donc d'un groupe de dix paramètres (trois angles, un vecteur à trois coordonnées de translation, un vecteur vitesse et un changement de l'origine du temps).

1.1 J.2 Trajectoire d'un corps massif

Les équations de mouvement d'un corps de masse m évoluant dans un potentiel gravitationnel ϕ peuvent être obtenues en déterminant l'extremum du Lagrangien construit à partir de l'énergie totale de la particule

$$L = \frac{1}{2} m v^2 + m \phi = \left[\frac{1}{2} m g_{ij}(x^k) \dot{x}^i \dot{x}^j + m \phi(x^k) \right], \quad (1.6)$$

où nous avons considéré que la *masse inertielle*, m , et la *masse gravitationnelle*, m_g , pouvaient a priori être différentes. Les équations d'Euler-Lagrange $\frac{\partial L}{\partial x^i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}$ sont réécrites dans n'importe quel système de coordonnées comme ¹

¹Voir le chapitre suivant pour un bref rappel des mécanismes analytiques et Réf. [5] pour une étude complète et détaillée.

$$\ddot{x}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{x}^j \dot{x}^k = -\frac{m_c}{m_i} g^{ij} \partial_j \phi, \quad \Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{ip} (\partial_j g_{kp} + \partial_k g_{jp} - \partial_p g_{jk}). \quad (1.7)$$

En coordonnées cartésiennes, $\ddot{y}^j = \text{et } F^{\wedge} = 0$. On retrouve donc les équations du mouvement sous leur forme classique $x =$ quand $m, - m_c$. Les symboles $F^{\wedge}$ représentent le

des forces fictives (centrifuges, Coriolis...) qu'il faut prendre en compte lorsque le référentiel n'est pas inertiel.

Notons également que (1.7) est indépendant de la masse du corps si $m, = m_c$; Tous les corps tombent de manière identique, quelle que soit leur masse ou leur composition chimique. C'est ce qu'on appelle le *principe d'équivalence faible* ou *d'universalité en chute libre*. En effet, dans le cas newtonien, il est a priori possible d'introduire deux masses différentes et l'égalité entre la masse gravitationnelle et la masse inertielle semble fortuite. À l'aide de pendules, Newton (1686) montra que

$$\left| \frac{m_c}{m_i} - 1 \right| < 10^{-3}. \quad (1.8)$$

L'égalité entre la masse gravitationnelle et la masse inertielle n'était donc requise qu'au millième près. Cependant, Newton considérait cette égalité comme le nœud de sa théorie de la gravitation et il lui consacra l'introduction de ses *Principia*.

Comme nous le verrons, cette propriété joue un rôle central dans la construction des théories de la gravitation.

1.1.2 Espace-temps de la relativité restreinte

Les lois de Maxwell de l'électromagnétisme ont la propriété de ne pas être invariantes sous le groupe galiléen (1-5). Par exemple, la force électrique générée par une charge au repos n'est pas invariante puisqu'une force magnétique apparaît dans un référentiel où la source est en mouvement inertiel (voir par exemple Réf. [6]). D'autre part, Maxwell déduit de sa théorie que la lumière est une onde électromagnétique dont la vitesse de propagation, c , dépend de la permittivité et de la perméabilité du milieu. Il fallait introduire un milieu fictif dans lequel ces ondes pouvaient se propager; l'éther. Les équations de Maxwell ne seraient valables que dans ce référentiel particulier, identifié au système de référence absolu de Newton. Dans un référentiel inertiel différent, la vitesse de la lumière aurait donc dû être mesurée comme $c \pm u$, ce qui ouvrirait la possibilité de déterminer le référentiel absolu, celui de l'éther, au prix de l'abandon du principe de relativité galiléenne.

1.1.2.1 Transformations de Lorentz

Les expériences de Michelson et Morley (1887) ont réfuté l'hypothèse mentionnée ci-dessus; Il a été démontré que la lumière avait la même vitesse de propagation dans n'importe quel référentiel inertiel donné. En 1905, Einstein changea cette perspective en réaffirmant le principe de la *relativité restreinte* selon lequel toutes les lois de la nature devraient avoir la même forme, quel que soit le référentiel inertiel (voir par exemple Réf. [7] pour les aspects historiques). En particulier, cela aurait dû être le cas pour les équations de Maxwell, qui impliquaient que la vitesse de la lumière devait être la même dans tous les référentiels inertiels. Par conséquent, on en déduit que les règles de changement de référentiel inertiel ne peuvent pas être celles de Galilée (1.5).

Le nouveau groupe de transformations est le groupe de Lorentz. Un observateur inertiel peut étiqueter un événement en considérant un référentiel euclidien rigide, ce qui lui permet de déterminer les coordonnées cartésiennes x, y, z . En chaque point de cette grille, il peut placer une horloge synchronisée de telle sorte que tous les événements soient étiquetés par un quadruplet (i, x, y, z) . Un deuxième observateur dans un référentiel inertiel se déplaçant à une vitesse v le long de l'axe Ox par rapport au premier observateur peut également construire un

tel système de coordonnées. Cela lui permet d'identifier les mêmes événements par un autre quadruplet x', y', z' - Les deux ensembles de coordonnées sont liés par la transformation de Lorentz, appelée boost ,

$$x' = \gamma (x - (v/c)ct), \quad ct' = \gamma (ct - (v/c)x) \quad (1.9)$$

Ces transformations ont la propriété de se réduire aux transformations galiléennes lorsque $v \ll c$ et de maintenir la vitesse de la lumière égale à c dans tous les référentiels inertiels.

1.1.2.2 Espace-temps de Minkowski

La relativité restreinte postule que tous les observateurs inertiels sont équivalents, les ensembles de coordonnées déterminés par différents observateurs n'ont aucune signification intrinsèque. La quantité invariante lors du changement de référentiel est obtenue en considérant une version pseudo-euclidienne du théorème de Pythagore. L'élément-ligne (1.1) est remplacé par l'élément-ligne entre deux événements, en coordonnées Minkowski, de l'espace-temps

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 = p^\mu dx^\mu dx_\mu, \quad (110)$$

avec $x^0 = ct$. Les indices grecs varient entre 0 et 3 et la convention de sommation d'Einstein est étendue à ces valeurs. Nous notons que contrairement à la métrique euclidienne, ds^2 peut être négatif ou nul pour des événements non coïncidents. Dans ce cadre, l'espace et le temps sont réunis en un espace-temps, l'*espace-temps de Minkowski*. Cet espace-temps est absolu, tout comme dans le cadre newtonien. Il est doté de quatre axes orthonormés constituant le référentiel absolu de Minkowski.

L'ensemble des points tels que $ds^2 = 0$ est appelé cône de lumière et représente, pour tous les points M de l'espace-temps, l'ensemble des points pouvant recevoir un faisceau lumineux émis dans M (futur cône de lumière) ou reçu dans M (passé cône de lumière). Ce cône de lumière détermine la structure causale de l'espace-temps de Minkowski illustrée sur la Fig. 1.2. En effet, comme la vitesse de tous les corps est inférieure à c , seuls les couples de points (A, P) tels que $ds^2 < 0$, c'est-à-dire tels que A soit à l'intérieur du cône lumineux dans P , peuvent être joints par trajectoires émanant de P . La distance est alors de type temps et le temps propre τ est généralement introduit par la relation

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2. \quad (1.11)$$

Si $ds^2 > 0$, l'intervalle est dit spatial et les points du couple $\{M, P\}$ ne peuvent être rejoins par aucune trajectoire physique.

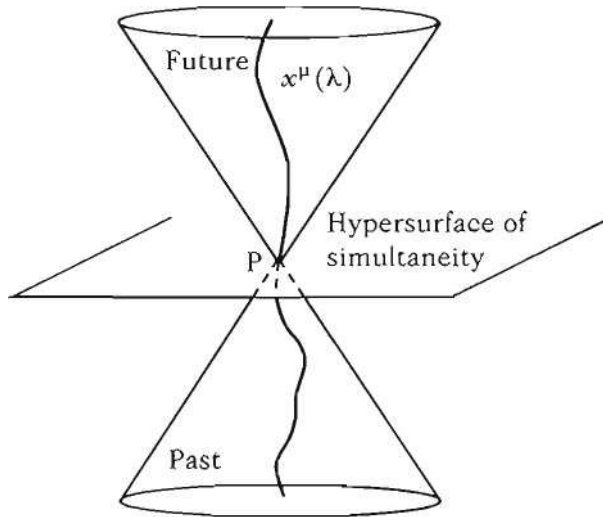


Fig. 1.2 La structure causale de l'espace-temps de Minkowski. La notion de simultanéité est remplacée par la notion de cône de lumière défini par $ds^2 = 0$. La ligne d'univers $x^\mu(\lambda)$ émanant de P se retrouve à l'intérieur du cône de lumière ($ds^2 < 0$). Tous les points extérieurs au cône ne peuvent jamais être rejoins par une trajectoire physique partant de P . Ils sont séparés de P par un intervalle de type espace ($ds^2 > 0$).

1.1.2.3 Moment approprié

La trajectoire de toute particule massive peut être représentée sous la forme paramétrique $x^\mu(A)$, où A est un paramètre arbitraire (croissant vers l'infini). On peut reparamétriser cette ligne du monde en fonction du temps propre

$$r = \int \sqrt{-g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu},$$

où $u = dx^\mu/dA$ est le vecteur tangent à la ligne du monde. Dans ce nouveau paramétrage, le vecteur tangent est donné par $u = dx^\mu/dr$ et il satisfait

$$u^\mu u_\mu = -c^2.$$

Considérons maintenant un observateur O' qui se déplace avec une vitesse v par rapport à un référentiel inertiel, S , où se trouve un observateur inertiel O . Comme O est immobile, sa trajectoire est donnée par $x = \text{const}$ et son temps propre est

$$dr = dt.$$

L'observateur mobile O' a une trajectoire telle que $dx^1/dt = v$ par rapport au référentiel S . Son temps propre est donc

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} dt$$

En conclusion, les temps propres mesurés par deux observateurs O et O' , obtenus en éliminant la coordonnée temporelle, sont liés par

Ainsi, contrairement au cas newtonien, la durée du trajet mesurée par O n'est pas la même

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt$$

que celle mesurée par O' , selon leurs trajectoires. Si les docks de O et O' ont été initialement synchronisés, ils ne le seront pas à un autre point de rencontre. C'est ce qu'on appelle le phénomène de *dilatation du temps*.

1.1.2.4 Groupe Poincaré

Tout comme dans le cas newtonien, la métrique (1.10) peut être écrite dans n'importe quel système de coordonnées (y^μ) lié aux coordonnées de Minkowski (x^μ) par une relation de la forme Un vecteur dx^μ dans l'espace de Minkowski a les coordonnées $(dy^\mu/dx^\mu)dx^\mu$. J'en déduis donc que l'élément-ligne (1.10) a la forme

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dy^\mu dy^\nu, \quad g_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\nu} \eta_{\alpha\beta} \quad (1.13)$$

Par exemple, on peut considérer les coordonnées de Rindler, liées aux coordonnées de Minkowski par

$$t = R \sinh T, \quad x = R \cosh T, \quad y = y', \quad z = z'.$$

L'élément de ligne (1.13) prend alors la forme

$$ds^2 = -R^2 dT^2 + dR^2 + dy'^2 + dz'^2.$$

Les lois de la physique devraient être, selon le principe de la relativité restreinte, indépendantes de tout référentiel inertiel privilégié. Il est donc important de mettre en évidence des transformations du référentiel qui préservent la forme (1.10). Ces transformations particulières constituent le groupe Poincaré et prennent la forme

$$x^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x'^\nu + A^\mu, \quad A^\mu = \begin{cases} \text{constante} \\ \text{ou fonction linéaire de } x'^\nu \end{cases} \quad (1.14)$$

où les matrices de rotation A^μ et le vecteur ne dépendent pas des coordonnées. Notons que ce groupe de transformations est plus contraint que le groupe galiléen dans lequel les rotations pourraient dépendre du temps. Ce groupe Poincaré est composé de 3 rotations, trois boosts Lorentz et quatre traductions. Il dispose donc de 10 degrés de liberté, ce qui signifie qu'il faut 10 valeurs pour décrire complètement toute transformation du groupe.

1.1.2.5 Algèbre de Poincaré

Le groupe de Poincaré peut être construit à l'aide de transformations infinitésimales. Laissez-nous d'abord considérer une transformation simple du vecteur $T^\mu =$ et écrivons la transformation (1.14) pour une fonction scalaire $f(r)$ sous la forme $f(r') = (1 - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} P) f(r)$. Cette relation définissant le générateur on obtient $P_\mu = i d^\mu$ par identification avec un développement de Taylor du premier ordre de la fonction $f(r)$. De manière équivalente, une transformation de Lorentz peut s'écrire $y^\mu = 4-$, avec et le générateur est obtenu en utilisant le

définition $f(y^\mu) = (1 - i L L^\mu J_\mu f(r))$, ce qui donne $= i (z^\mu d^\mu - x^\mu d^\mu)$.

D'autres représentations du groupe de Poincaré sont possibles, mais toutes respectent les relations de commutation suivantes, qui forment l'algèbre de Poincaré :

$$[P_\alpha, P_\beta] = 0, \quad [J_{\mu\nu}, P_\alpha] = i (g_{\mu\alpha} P_\nu - g_{\nu\alpha} P_\mu), \quad (1.15)$$

pour les traductions, et

$$[J_{\mu\nu}, J_{\alpha\beta}] = i (g_{\mu\alpha} J_{\beta\nu} + g_{\mu\beta} J_{\alpha\nu} + g_{\nu\alpha} J_{\mu\beta} + g_{\nu\beta} J_{\alpha\mu}), \quad (1.16)$$

qui est l'algèbre de Lorentz, elle-même fermée indépendamment. Rappelons la commutation qu'entre deux opérateurs se définit par

$$[A, B] = AB - BA.$$

1.1.2.6 Trajectoire d'un corps

De manière libre analogue au cas newtonien, la trajectoire d'un corps libre massif peut être obtenue en extrémisant l'action

$$(1.17)$$

où un point au-dessus d'une variable représente une dérivée par rapport à A . Les équations d'Euler-Lagrange prennent alors la forme

où dz^μ/dA et $\dot{u}A = du^\mu/dA$. Dans les coordonnées de Minkowski, nous constatons qu'un observateur inertiel doit le faire. suivre une trajectoire à vitesse constante

$$(119)$$

Notons l'analogie avec le cas des corps massifs dans (1.6), mais aussi la différence : dans le cas de (1.17), il n'est pas possible d'introduire simplement un terme équivalent au potentiel gravitationnel.

1.1.3 Relativité générale et espace-temps courbe

La relativité restreinte concilie la théorie de l'électromagnétisme et le principe de relativité au prix du remplacement du principe galiléen de relativité par le principe de relativité restreinte (car applicable uniquement aux référentiels inertiels).

Cependant, une autre contradiction apparaît. La théorie de la gravité newtonienne introduit une action instantanée à distance, incompatible avec la structure causale de la relativité restreinte.

1.1.3.1 Principe d'équivalence

Einstein a basé son analyse sur le fait que dans la gravité newtonienne, tous les objets testés tombent exactement de la même manière dans un champ gravitationnel externe, quelle que soit leur masse ou leur composition chimique.

En physique galiléenne et newtonienne, cette *universalité de la chute libre* vient de l'égalité entre la masse inertielle et la masse gravitationnelle, le *principe d'équivalence* [cf. (1-8)]. Cette égalité peut paraître accidentelle, mais elle est vérifiée expérimentalement avec une grande précision. Dans le cas newtonien, un petit écart par rapport à cette égalité ne serait pas catastrophique. Ce principe d'équivalence est-il une bonne approximation, une simple coïncidence ou signale-t-il quelque chose de plus profond ?

Einstein a envisagé l'étude du mouvement accéléré. À première vue, il pourrait sembler que les objets suivent des lois physiques différentes, puisqu'il faut ajouter des forces fictives (inertie, Coriolis...) pour décrire leur dynamique. Pour Einstein, ces forces sont tout aussi réelles que la force de gravité puisque cette dernière peut également être éliminée dans un référentiel en chute libre. Ainsi, un observateur accéléré est soumis aux mêmes lois de la physique que celles rencontrées dans le champ gravitationnel, introduites en plus des autres forces. Tout se passe comme si l'on pouvait s'affranchir de la gravité par un choix astucieux du référentiel.

Cela n'est possible que si le principe d'équivalence est strictement valable. Einstein l'a donc élevé au rang de principe premier. Cette propriété nous enseigne que la « confusion » entre gravité et accélération n'est pas accidentelle : c'est une propriété fondamentale de la gravité. À noter que cette propriété ne s'applique qu'à la gravité et à aucune autre force de la nature (dans le cas de l'électromagnétisme, par exemple, l'accélération dans un champ électrique donné dépendrait du rapport entre charge et masse, qui varie d'une particule à l'autre).

Le principe d'équivalence garantit que l'on peut toujours trouver localement un référentiel dans lequel la force de gravité est éliminée.

1.1.3.2 Forces de marée et courbure de l'espace-temps

Il semble que la gravité ait disparu. En fait, comme nous l'avons souligné, une telle opération n'est possible que localement. À titre d'exemple, considérons un corps A en orbite autour de la Terre à une distance r_A . Son accélération newtonienne est $a_A = -G_N M^\oplus r_A / r_A^3$. Un corps voisin B , en orbite selon $r_B = r_A + \delta r$ connaît une accélération relative par rapport au corps A

$$\delta a_{AB} = -\frac{G_N M^\oplus}{r_A^3} \left(\delta r - 3 \frac{r_A \cdot \delta r}{r_A^2} r_A \right)$$

au premier ordre en δr . Cette relative accélération ne peut être annulée. Si $r_{y.br} = 0$ le corps B se rapproche du corps A et si $r_{A \blacksquare} \delta r = \pm r_A \dot{e}r$, il s'éloigne. Ainsi, une petite sphère en orbite se déformerait lentement en une sorte de cigare ellipsoïdal, tout en conservant son volume. Cette distorsion caractérise les forces de marée.

Nous avons vu que dans les cadres newtonien et minkowskien, la trajectoire d'une particule libre correspond à un chemin qui minimise la longueur d'une trajectoire entre deux points. Même si l'on peut éliminer localement la gravité, les trajectoires voisines ont tendance à converger ou à diverger les unes des autres. Dans un espace-temps fiduciaire, un seul corps peut se libérer de la gravité et des forces fictives. Cependant, dans un espace-temps courbe, il est possible de considérer que tous les corps sont libres et suivent des lignes de longueur minimale. La gravité et les forces fictives disparaissent pour tous les corps au prix du postulat d'une nouvelle propriété de l'espace.

Dans ce cadre, tous les corps suivent les lignes de chemin le plus court et la gravité a localement disparu pour chacun d'eux. Mais comme cela n'est possible que localement, les géodésiques voisines révèlent la courbure de l'espace-temps. La gravité n'a donc pas disparu, elle est simplement cachée dans la courbure de l'espace-temps, ce qui explique d'une manière inédite les forces de marée.

Cet exemple heuristique nous montre qu'en introduisant un espace-temps courbe on peut éliminer toutes les forces fictives liées au choix d'un référentiel non inertiel, au détriment de l'introduction d'une courbure de l'espace. La trajectoire de tous les corps en chute libre, c'est-à-dire soumis à la seule gravité, peut être obtenue comme une géodésie, une ligne du plus court chemin, dans un espace-temps courbe. Ainsi, tous les référentiels, inertiels ou non, sont placés sur le même pied, ce qui permet de concilier gravité et relativité restreinte. Cette construction n'est cependant possible que parce que l'accélération ne dépend pas de la masse des particules en chute libre, ce qui donne un aperçu de la relation entre l'universalité de la chute libre et la géométrisation de la gravité.

1.1.3.3 La gravité comme manifestation de la géométrie

Le principe d'équivalence d'Einstein est au cœur de toutes les théories métriques de la gravitation, qui incluent entre autres la théorie de la relativité générale. Elle repose sur trois conditions :

- *le principe d'équivalence faible* (ou d'universalité de chute libre) selon lequel la trajectoire d'un corps d'épreuve neutre est indépendante de sa structure interne et de sa composition. Ce corps doit avoir une énergie gravitationnelle de liaison négligeable et être suffisamment petit pour que les inhomogénéités du champ gravitationnel puissent être ignorées ;
- *l'invariance de position locale* selon laquelle le résultat de toutes les expériences non gravitationnelles est indépendant du point de l'espace-temps où l'expérience a eu lieu ;
- *l'invariance locale de Lorentz* selon laquelle les résultats des expériences non gravitationnelles sont indépendants du mouvement du laboratoire tant qu'il est en chute libre.

On peut affirmer (voir, par exemple, Réf. [8]) que si le principe d'équivalence d'Einstein est valable alors la gravitation est la manifestation physique d'un espace-temps courbe, c'est-à-dire une théorie métrique. Une telle théorie possède les trois propriétés suivantes :

- la géométrie de l'espace-temps est décrite par une métrique,

- les corps libres suivent les géodésiques de cette géométrie,
- dans un référentiel local en chute libre, les lois de la physique prennent la même forme qu'en relativité restreinte.

Cela implique que la contribution des énergies de liaison des trois interactions non gravitationnelles à la masse est la même pour une masse gravitationnelle et une masse inertielle.

On pourrait se demander si cette propriété peut être généralisée à l'énergie de liaison gravitationnelle elle-même. Cela conduit à la formulation du *principe d'équivalence forte*. Si l'énergie de liaison gravitationnelle contribue de manière égale à la masse inertielle et gravitationnelle, il est alors possible d'éliminer le champ gravitationnel externe. Ceci peut être réalisé dans un référentiel localement inertiel dans lequel toutes les lois de la Nature, y compris la gravitation, ont la même forme qu'en l'absence de champ extérieur. Ce principe semble mal défini et grossier : il implique une loi gravitationnelle qui n'est pas encore définie. Une théorie de la gravitation qui satisfait à ce principe est nécessairement non linéaire puisque le champ gravitationnel « pèse » et génère un champ gravitationnel secondaire, etc. La relativité générale et la théorie scalaire de Nordström sont des exemples de théories qui satisfont à ce principe (voir Réf. [8]). Ces principes étant au cœur de la construction de la relativité générale, il est en effet important de les tester (voir section 1.6).

1.2 Éléments de géométrie différentielle

L'argument heuristique du paragraphe précédent montre que l'on peut décrire le mouvement d'un corps en chute libre (c'est-à-dire un corps sur lequel aucune autre force que la gravité n'agit) par une géodésie dans un espace-temps courbe à quatre dimensions. L'espace-temps est donc décrit par un continuum à quatre dimensions de sorte qu'il faudrait quatre valeurs pour localiser chaque événement, tout comme en relativité restreinte.

Dans le cadre newtonien et en relativité restreinte, cela est supposé être globalement valable de sorte qu'un ensemble d'événements puisse être cartographié de manière bijective avec $\mathbb{R}^4$. En relativité générale, nous ne voulons pas faire une hypothèse aussi forte sur la structure de l'espace-temps avant de l'avoir déterminé. Cette situation est analogue à la description d'une sphère en deux dimensions : il faut deux nombres pour caractériser la position de tous les points. Localement, la sphère ressemble à un plan $\mathbb{R}^2$ mais globalement ce n'est pas le cas.

L'espace-temps de la relativité générale sera donc modélisé comme une variété à quatre dimensions, c'est-à-dire un espace à quatre dimensions qui ressemble localement à $\mathbb{R}^4$ mais pas nécessairement globalement (comme dans le cas d'une sphère à deux dimensions).

1.2.1 Variétés et tenseurs

Ici, nous définissons les notions de variétés et de tenseurs de manière formelle. Les deux sections suivantes peuvent éventuellement être ignorées et le lecteur peut accéder directement aux règles de calcul tensoriel dérivées de la troisième section.

1.2.1.1 Collecteurs

Pour définir une variété, rappelons qu'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ est un ensemble qui peut être défini comme l'union finie des boules ouvertes $o(r)$. Une telle bélière de rayon r centrée en $y = (y_1, \dots, y_n)$ est définie comme l'ensemble des points x tels que $|x - y| < r$.

Une variété est un espace constitué de quartiers qui sont localement comme $\mathbb{R}^n$ et qui peuvent être continuellement collés les uns aux autres. Plus précisément, une variété M est une collection $\{O_i\}$ d'ensembles qui satisfont aux trois propriétés suivantes :

1. pour tous les points p de M , il existe au moins un ensemble O_i contenant p , ce qui signifie que $\{O_i\}$ couvre M ,
2. pour tout i , il existe un homéomorphisme ψ_i de O_i dans un sous-ensemble U_i de $\mathbb{R}^n$, soit une application continue qui associe tous les points p de O_i à un n -uplet de nombres réels que nous appellerons coordonnées de p dans l'application ψ_i ;
3. si deux ensembles O_i et O_j ont une intersection non vide, alors l'application $\psi_j \circ \psi_i^{-1}$ qui mappe les points de $\psi_i(O_i \cap O_j)$ dans $\psi_j(O_i \cap O_j)$ est une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^n$.

Des exemples de variétés sont le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, qui n'a besoin que d'une seule carte (identité), ou une sphère qui nécessite deux cartes.

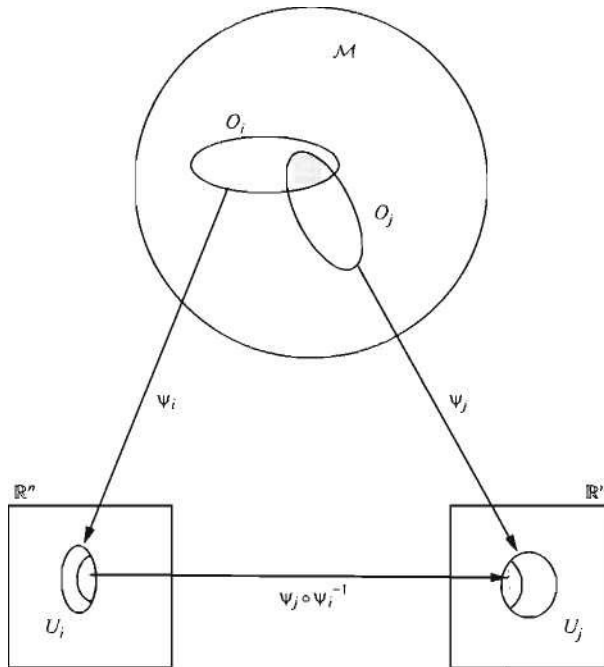


Fig. 1.3 Illustration de la relation entre différents diagrammes d'un même collecteur. Localement, on peut relier $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ mais globalement cela n'est possible que si l'on utilise une collection de graphiques (un atlas) qui couvrent toute la variété.

1.2.1.2 Vecteurs

L'espace euclidien en physique newtonienne est un espace vectoriel. Or, cette structure se perd dans les espaces courbes, comme celui d'une sphère, mais peut être récupérée dans la limite des

déplacements infinitésimaux.

Dans R^n il existe une application bijective entre vecteurs et dérivatives directionnelles et chaque vecteur $y = (y^1, \dots, y^n)$ définit une dérivative $y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, dans tout système de coordonnées arbitraire (x^i) . Dans le manifold A_4 , considérons l'ensemble F des fonctions 0 de A_4 dans K . On peut définir le vecteur tangent y en un point p dans A_4 comme une application de F dans K , qui est linéaire et satisfait la règle de Leibniz.

1. $y(af + bg) = ay(f) + by(g)$ pour tous les f, g dans F et tous les a, b dans R ,

2- $y(fg) = f(p)y(g) + g(p)y(f)$

L'ensemble des vecteurs tangents au point p forme un espace vectoriel V_p [puisque $(y_1 + y_2)(f) = y_1(f) + y_2(f)$ et $(ay)(f) = ay(f)$] de même dimension que le manifold. On peut construire une base de V_p en considérant l'application de F vers R définie par

Nous appelons généralement simplement dy/dx ou tel que tous les vecteurs y peuvent être exprimés, en utilisant la convention de sommation d'Einstein, sous la forme

$$y = y^\mu \partial_\mu, \quad (1.20)$$

$$\frac{dy^\mu}{dx^\nu} \neq 0, \quad (1.21)$$

où sont les composantes de y .

Le vecteur tangent à une courbe f de coordonnées $x^M(r)$ est alors donné par l'application

de sorte que $t =$ avec $F = dx^i(T)/dr$. Dans une transformation de coordonnées de la forme nous l'avons, pour tout $f \in F$, $dy^i = f^i_j dx^j$. On en déduit ainsi que les éléments du base sont transformés selon

$$(1.22)$$

de sorte que les composantes de tous les vecteurs y se transforment selon

$$y^\mu = \frac{dx^\mu}{dx^{\mu'}} y^{\mu'} \quad (1.23)$$

qui est la formule standard pour la transformation de coordonnées que nous avons utilisée précédemment.

1.2.1.3 Tenseurs

La notion de tenseur est une généralisation de celle de vecteur, lorsqu'on considère des quantifications qui ont des dépendances multilinéaires sous une transformation infinitésimale.

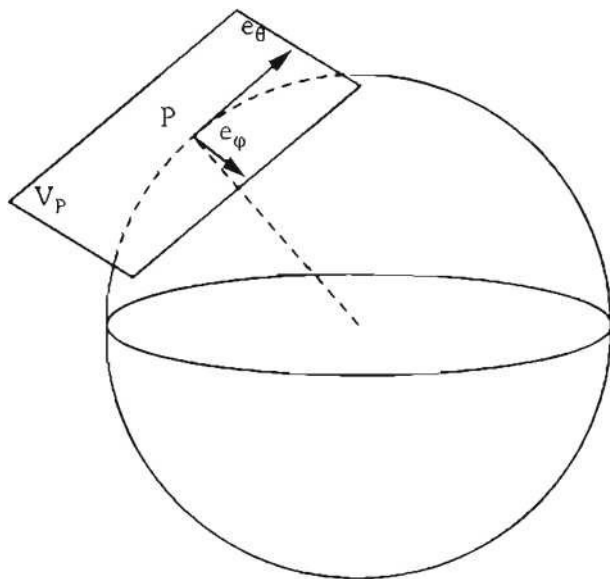


Fig. 1.4 L'espace tangent d'une sphère à deux dimensions est un plan dont la base est donnée par e_θ et e_ϕ .

Étant donné un espace vectoriel V_p , on peut construire un espace dual V' composé des applications linéaires de V_p à $\mathbb{R}$. Ce nouvel espace vectoriel a une base $y^{\alpha'}$ qui peut être définie en spécifiant leur action sur les éléments d'une base de V_p

$$y^{\alpha'}(e_\mu) = \delta^\alpha_\mu \quad \blacksquare$$

En particulier, dx^μ représente la base de V'_p associée à la base e_μ de V_p . dx^μ devrait donc satisfaire

$dx^\mu(e_\nu) = \delta^\mu_\nu$ et il associe tout vecteur y à sa composante y^μ définie par $dx^\mu(y) = y^\mu$. Dans une transformation coordonnée, dx^μ se transforme en composantes d'un vecteur

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \quad (1.24)$$

Un tenseur T de rang (r, q) est une application multilinéaire de $(V_p)^r \times (V'_p)^q$ vers $\mathbb{R}$ telle que

$$T = T^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_q} dx^{\beta_1} \wedge \dots \wedge dx^{\beta_q} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\alpha_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\alpha_r}} \quad (1.25)$$

où $\otimes$ est le produit tensoriel. Un tel objet est dit r fois contravariant et q fois covariant. En particulier, un tenseur de rang $(0,0)$ est un scalaire dont la valeur est indépendante du système de coordonnées, un tenseur de rang $(1,0)$ est un vecteur et un tenseur de rang $(0,1)$ est un 1-formulaire. En utilisant les lois de transformation des vecteurs et des 1-formes, nous pouvons en déduire que dans une transformation de coordonnées, les composantes d'une transformation tensorielle comme

$$T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\alpha_p}} \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\beta_q}}{\partial x'^{\nu_q}} T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q} \quad (1-26)$$

Un espace tangent est associé à chaque point de la variété. Des tenseurs de même nature définis en différents points agiront donc sur des espaces différents. On pourrait cependant introduire la notion de champ tensoriel en sélectionnant un tenseur de manière continue.

Nous pouvons maintenant introduire la notion de métrique. Tout comme dans l'espace-temps de Minkowski en coordonnées générales, il faut utiliser la métrique pour définir le carré de la distance entre deux points voisins. La métrique g doit donc être un tenseur symétrique et non dégénéré de rang $(0, 2)$. L'élément de ligne entre deux événements est alors donné par

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (1-27)$$

où g^μ_ν est le tenseur métrique ; il est symétrique et comporte donc 10 composants. Des résultats précédents, on peut déduire qu'il se transforme comme

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^\nu} g_{\alpha\beta} \quad (1-28)$$

Cette expression est analogue à celle obtenue dans les cas euclidiens ou Minkowski. En particulier, on peut en déduire que le déterminant de la métrique $g = \det g_{\mu\nu}$, se transforme comme

$$g' = J g \quad (1-29)$$

1.2.1.4 Tensor nous calcule

Les tenseurs sont donc une généralisation de la notion de vecteurs. Des tenseurs de même rang peuvent être ajoutés

$$T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} + S^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} = (T + S)^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}$$

et on peut multiplier des tenseurs de rangs différents pour obtenir un tenseur de rang supérieur

$$T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} S^{\mu_{p+1} \dots \mu_{p+q}}_{\nu_{q+1} \dots \nu_{q+q}} = (TS)^{\mu_1 \dots \mu_{p+q}}_{\nu_1 \dots \nu_{q+q}}$$

Les indices peuvent être contractés pour former un tenseur dont le rang est abaissé de 2

$$T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} g^{\nu_1 \mu_1} = T^{\mu_2 \dots \mu_p}_{\nu_2 \dots \nu_q} \quad \text{MI}$$

Cette opération se réduit à la somme sur l'index répété. Cela permet de définir un scalaire en

scalar product of two vectors. We conclude that $g^{\mu\nu}$ is a tensor if and only if its contraction with any tensor of the form R^μ_μ is an invariant.

contractant tous les indices. En particulier, $g^{\mu\nu} V_\nu T^\mu$ représente le

La métrique peut être utilisée pour augmenter ou diminuer les indices

$$R^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_2 \dots \nu_q} = R^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_q} g^{\nu_1 \mu_1}$$

En particulier, $g^{\mu\nu} g_{\nu\mu} = \delta^\mu_\mu = 4$.

Un tenseur est symétrique s'il satisfait $T^{*ij} = T^{ji}$ et est antisymétrique si $T^{ij} = -T^{ji}$. De n'importe quel tenseur, on peut extraire un tenseur symétrique et antisymétrique par

$$T^{(ij)} = \frac{1}{2}(T^{ij} + T^{ji}) \quad T^{[ij]} = \frac{1}{2}(T^{ij} - T^{ji}) \quad (1.30)$$

Ceci peut être effectué sur une ou plusieurs paires d'indices, ou sur tous les indices. Par exemple, symétriser deux indices d'un vecteur de rang 4 donne

$$T^{(ij)kl} = \frac{1}{2}(T^{ijkl} + T^{klij})$$

et un tenseur complètement symétrique est obtenu par

$$T^{(ijkl)} = \frac{1}{24}(T^{ijkl} + T^{iklj} + T^{iljk} + T^{jlik} + T^{jlki} + T^{klij} + T^{klji} + T^{ljk i} + T^{ljki} + T^{lkji} + T^{ijlk} + T^{iljk} + T^{ilkj} + T^{jlik} + T^{jlki} + T^{jkli} + T^{klji} + T^{klji} + T^{lkji} + T^{lkji} + T^{lkji} + T^{lkji})$$

Dans le cas particulier d'un tenseur de rang 2, il peut toujours être décomposé comme la somme d'un tenseur symétrique sans trace, d'un tenseur antisymétrique et d'une trace en quatre dimensions.

On remarque que le tenseur complètement antisymétrique de rang n est donné par

$$\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} = \sqrt{|g|} \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_n}$$

avec $\epsilon_{i_1 \dots i_n} = \sqrt{|g|}$ et $\epsilon^{i_1 \dots i_n} = 1/\sqrt{|g|}$. Pour $n = 4$, le tenseur antisymétrique a la propriété suivante

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = -24 \quad (1.32)$$

En contractant cette identité, on obtient

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = -24 \quad (1.33)$$

1.2.2 Équations de Géodésie et symboles de Christoffel

En utilisant les notions introduites dans la section précédente, on peut remonter à la trajectoire d'un corps en chute libre se déplaçant dans un espace-temps de métrique $g_{\mu\nu}$. Une telle trajectoire est une ligne de longueur la plus courte, telle que son équation, $x^\mu(\lambda)$, peut

$$s = \int \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} d\lambda$$

However, as already mentioned in the Minkowski case, ds can be négative or null for some trajectories. It is therefore cleverer to maximize the action

être obtenue en maximisant l'action

$$S = -mc \int \sqrt{-g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} d\lambda \quad (1.34)$$

avec $\dot{x}^\mu = dx^\mu/d\lambda$. Ceci équivaut à maximiser $J(ds^2/d\lambda^2)d\lambda$. Nous pouvons montrer que l'extrémisation de ces deux actions donne le même résultat si $ds^2 \neq 0$, mais l'utilisation de la

seconde nous permet d'obtenir le résultat correct également pour les géodésiques nulles ² ($ds = 0$, voir Section 1.4.2).

Les équations d'Euler-Lagrange prennent la forme

$$\frac{\partial L}{\partial x^a} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} \right) = 0$$

Depuis

$$= d_a g^{ab} x^b = J^a_b x^b$$

nous avons ça

$$g^{ab} = \frac{1}{2} (d_a g^{ab} x^b + d_b g^{ab} x^a - d_c g^{ab} x^c)$$

où nous avons symétrisé le terme $dpg_{JM} x^0 i : ^p$. Présentation des symboles Christoffel

$$2 \left(\frac{\partial M^a}{\partial x^b} + \frac{\partial M^b}{\partial x^a} - \frac{\partial M^c}{\partial x^c} \right) x^c = 0 \quad (1.35)$$

et

$$= \frac{1}{2} R_{AB} x^B \quad (i.36)$$

et en contractant notre équation avec g^{aa} , on obtient l'équation géodésie

identical to (118) obtained in spécial relativity. As we have stressed, space-time curvature does not intervene in the equation of the trajectory of a single particle, but it does in the déviation of close trajectories.

From the définition of the Christoffel symbols (1.35), we have, since the metric is symmetric,

$$+ \frac{1}{2} R_{AB} x^B = 0 \quad (1.37)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^a} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} = 0 \quad (1.38)$$

ainsi que

$$r = r_{a,b,M} \quad (i.39)$$

Notez qu'en quatre dimensions il y a $4 \times 10 = 40$ Christoffel symbols, which is précisément le nombre de dérivées partielles de la métrique $d_c g_a$. On peut donc inverser la relation (1.35) pour obtenir, après quelques algèbres,

$$g_{ab} = \frac{1}{2} (d_a g_{ab} x^b + d_b g_{ab} x^a - d_c g_{ab} x^c) \quad (1-40)$$

En utilisant l'équation géodésie, on peut se convaincre que les symboles de Christoffel ne sont pas des tenseurs puisqu'ils se transforment comme

$$d^2 x^a / dx^a dx^a$$

$$r, Q - \frac{dx^a dx^a dx^p}{0}$$

$$dx^0 dx'^1 dx''^{ap} dx^a dx^p dx^{lp} dx'''$$

transformation de coordonnées.

² Les géodésiques de type lumière sont également appelées **géodésiques isotropiques** ; nous éviterons cette terminologie qui peut prêter à confusion. Nous les appellerons soit **géodésiques nulles**, soit **géodésiques lumineuses** sans distinction.

Pour finir, considérons le déterminant de la métrique

$$g = \det^* p = 7rQ_{123} 9cxQ90igy29a^{\wedge}$$

où $\epsilon = +1$ si $(a/3y5)$ est une permutation paire de $(1, 2, 3)$, $\epsilon = -1$ si ϵ est impair permutation et 0 sinon. On obtient ainsi la dérivée du déterminant

$$d(*g) = 9g^{\wedge} g^{\wedge}. \quad (1.42)$$

Une autre façon de visualiser ce résultat est d'écrire que $dg = m^{th} dg_{ij}$, où rrC^{ij} sont les mineurs de la matrice des g_{ij} . L'inverse d'une matrice est $g^{\wedge u} = (p^{\wedge} p)^{-1} = rrC^{ij}/g$ donc on peut en déduire que $d_a g = m W d_a g^{\wedge} = gg^{\wedge} d_a g^{\wedge}$. On peut alors en déduire la propriété utile

$$= d_a (\ln |g|) = -g^{\wedge} d_a g^{\wedge}. \quad (1.43)$$

On peut aussi signaler une autre propriété intéressante obtenue en utilisant le fait que $g^{\wedge} g_{p,v} = 4$, et donc que $d(g^{\wedge} g^{\wedge}) = 0$, soit

$$g^{\wedge} d^{\wedge} = -g^{\wedge} d_{un} g^{\wedge}. \quad (1.44)$$

1.2.3 Dérivée covariante, transport parallèle et dérivée de Lie

Les lois de la physique prennent souvent la forme d'équations aux dérivées partielles. Il est donc important de comprendre comment un champ tensoriel peut être différencié de manière à préserver ses propriétés tensorielles.

1.2.3.1 Dérivée covariante

La dérivée partielle d'un champ tensoriel arbitraire

$$a \quad -PP \quad (r \otimes) \quad - \quad -^{\wedge} P \quad) \quad , , L^{\wedge} \otimes \otimes$$

n'est plus un tenseur, sauf cas exceptionnel de la dérivée d'un scalaire qui est une 1-forme. Pour vraiment comprendre cela, considérons la dérivée d'un vecteur et comment il se transforme sous une transformation de coordonnées

$$9T^{\wedge} = J_{-} \left(dx'^{\mu} dx'^{\nu} \right) = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial T^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\sigma} \partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\alpha}} T^{\nu}. \quad (1.45)$$

La raison en est que cette opération fait la différence entre la valeur du tenseur en x^a et $z^a + dx^0$ et qu'en ces points, le tenseur a des lois de transformation différentes. Considérons un

vecteur constant du plan euclidien, de coordonnées $T^x = 1, T^y = 0$. En coordonnées polaires, ses coordonnées dépendent de la position ($T^r = \cos \theta, T^\theta = -\sin \theta$) simplement parce que les directions des coordonnées fines changent d'un point à l'autre. Il s'ensuit que $d\hat{a}T^r$ et $\hat{O}T^\theta$ ne s'annulent pas même si T est une constante. Ce qu'il faut définir est une dérivée telle que les composantes d'un vecteur constant ne changent pas lorsqu'il est transporté de x^a à $x^a + dx^a$.

La dérivée covariante est l'opérateur de différenciation qui transporte en parallèle le tenseur de x^a à $x^o + \Delta x^a$ avant de soustraire sa valeur en x^a . Puisque cette opération est linéaire, on peut toujours définir une telle dérivée covariante par

$$= \nabla^a + C^a_{b} T^b_{c} \quad (1,46)$$

où les quantifications C^a_{b} doivent être déterminées. Pour cela, on remarque que (1.45) implique que ces quantifications doivent se transformer comme (1.41) lors d'un changement de coordonnée. En travaillant localement dans l'espace de Minkowski et en notant qu'alors $V = d_a T^a$, nous concluons que

$$= r^a. \quad (1,47)$$

Dans la suite de ce livre, nous dénoterons la dérivée covariante soit par le symbole ∇ , soit par ∇_a en indice, sans distinction : $\nabla_p T^{ab} = T^{ab}_{;p}$. De même, nous utiliserons la notation $d_p T^{ab} = T^{ab}_{,p}$ pour la dérivée partielle ordinaire. La relation (146) peut être généralisée à un tenseur arbitraire

$$\nabla_a T^{b_1 \dots b_n} = \frac{\partial T^{b_1 \dots b_n}}{\partial x^a} + C^a_{c} T^{b_1 \dots b_n c} - \sum_{i=1}^n C^b_i{}^c T^{b_1 \dots b_{i-1} c b_{i+1} \dots b_n}$$

Une conséquence de ce résultat est que $\nabla_a g_{bc} = 0$. En utilisant le expressions (1.36) pour les symboles de Christoffel et (1.40) pour la dérivée de la métrique, on obtient

$$\nabla_a g_{bc} = 0. \quad (1,49)$$

A chaque métrique, on peut donc associer une dérivée covariante. Notez que nous pouvons définir diverses dérivatives covariantes mais une seule est compatible avec la métrique dans le sens où elle satisfait la propriété (1.49).

1.2.3.2 Transport parallèle

La dérivée covariante permet de définir la notion de transport parallèle. Un vecteur est transporté parallèlement si $DV^a/d\tau = 0$. On peut utiliser cette condition pour définir la notion de transport parallèle d'un vecteur le long d'une courbe d'équation $x^M(r)$ par $DT^{ab}/Dr = 0$, c'est à dire par

$$\frac{DT^a}{Dr} = \frac{dT^a}{dr} + \Gamma^a_{bc} \frac{dx^b}{dr} T^c = 0, \quad (1,50)$$

où $u^a = dx^a/dx$. L'exemple de la sphère présenté sur la Fig. 1.5 montre que le résultat de cette opération dépend du chemin suivi.

Un cas particulier de transport le long d'une courbe est le transport auto-parallèle, c'est à dire une courbe telle que le vecteur tangent est transporté parallèlement à lui-même ; il devrait donc satisfaire

$$\frac{Du^\mu}{d\tau} = u^\nu \nabla_\nu u^\mu = 0. \quad (1,51)$$

Il s'agit simplement de l'équation de la géodésie (1.37) pour que l'on conclue que les géodésiques (courbes de plus court chemin) sont donc auto-parallèles.

1.2.3.4 Lie dérivé

Une autre façon de construire une dérivée est de considérer la dérivée de Lie. Pour cela nous supposons qu'il existe un champ vectoriel et essayons de définir comment les coordonnées d'un vecteur T^* changeront pour un observateur qui se déplace le long des courbes d'écoulement du vecteur P^* depuis un point P de coordonnées x^0 jusqu'à un point Q de coordonnées $x^0 + c$ (où c est un petit paramètre) et qui transporte son système de coordonnées avec lui (voir Fig. 1.5).

Utiliser les coordonnées définies dans P au point Q équivaut à effectuer une transformation de coordonnées dans Q définie par $x'^{\alpha} = x^{\alpha} - \epsilon \xi^{\alpha}$ telle que

$$\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} = \delta_{\nu}^{\mu} - \epsilon \partial_{\nu} \xi^{\mu}$$

$$\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} = \delta_{\mu}^{\nu} + \epsilon \partial^{\nu} \xi_{\mu}$$

et à l'ordre dominant en ϵ . Les coordonnées du vecteur en Q seront données par

$$T^{\alpha}(Q) = T^{\alpha}(P) + \epsilon \partial^{\alpha} \xi_{\beta} T^{\beta}(P).$$

La dérivée de Lie est obtenue en comparant cette quantité avec le vecteur en P

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [T^{\alpha}(Q) - T^{\alpha}(P)],$$

de sorte que

$$= \epsilon \partial^{\alpha} \xi_{\beta} T^{\beta}(P). \quad (1.56)$$

Cette relation peut être généralisée à n'importe quel tenseur en utilisant la définition (1.56) et les lois de transformation pertinentes

La dérivée de Lie joue un rôle important dans l'étude des symétries d'un espace riemannien. Si $\mathcal{L}_T g = 0$ alors $T^{\alpha} g_{\alpha\beta} = T^{\alpha} g_{\alpha\beta}$ et le champ tensoriel est invariant peu importe ce changement de coordonnées. En particulier, pour le tenseur métrique, en utilisant (1.57) pour un s. tenseur symétrique de rang 2, les relations (1.40) et (1.38), ainsi que la définition de la dérivée covariante pour un vecteur, on obtient

$$(1.58)$$

1.2.4 Courbure

1.2.4.1 Tenseur de courbure

Comme le montre la Fig. 1.5, le transport parallèle d'un vecteur le long d'une courbe fermée ne ramène pas le vecteur à son état initial si l'espace est courbe, contrairement à ce qui se passe.

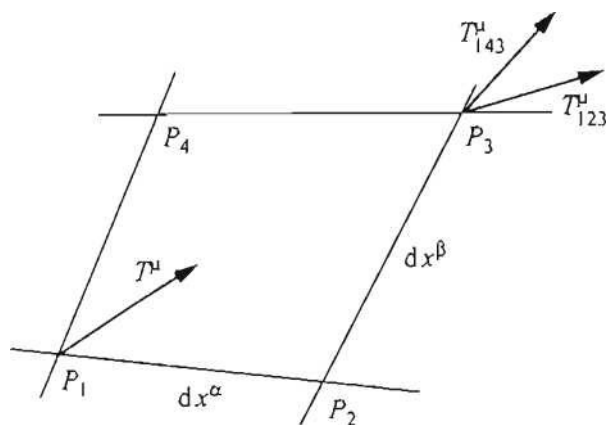


Fig. 1.6 The vector is parallel transporter! along the path P1F3 passing by either F2 or P_4 to give, respectively, the vectors T^{μ}_{123} and T^{μ}_{143} . These two vectors only coincide if the Riemann tensor vanishes.

se produit dans un espace euclidien. Tout comme la déviation géodésie, cela caractérise la courbure de l'espace.

Considérons le transport parallèle d'un vecteur T^{μ} le long du chemin fermé représenté sur la Fig. 1.6. De P_1 à P_2 , la relation (1.50) implique que la variation du vecteur est donnée par $(RPR)^{\mu}_{\nu} dx^{\alpha} T^{\nu} = dT^{\mu} - T^{\lambda} \Gamma^{\mu}_{\lambda\alpha} dx^{\alpha}$. En l'itérant, on obtient que la variation entre P_2 et P_3 est donnée par $\delta T^{\mu} = dx^{\alpha} dx^{\beta} R^{\mu}_{\nu\alpha\beta} T^{\nu} = d^2 T^{\mu} + 2r^{\lambda}_{\alpha\beta} dT^{\mu} + d^2 c^{\lambda} r^{\mu}_{\lambda} dx^{\alpha}$. La même variation passant par P_4 est donnée par $\delta T^{\mu} = dx^{\alpha} dx^{\beta} R^{\mu}_{\nu\alpha\beta} T^{\nu}$. En comparant ces deux expressions, seulement les termes proportionnels à $dx^{\alpha} dx^{\beta}$ sont différents et on obtient que

$$(1.59)$$

où le tenseur de Riemann est donné par

$$R^{\mu}_{\nu\alpha\beta} = -r^{\lambda}_{\alpha\beta} R^{\mu}_{\lambda\nu} = g_{\alpha\lambda} R^{\lambda}_{\nu\beta}{}^{\mu} \quad (1.60)$$

La définition (1.60) permet de conclure que le tenseur de Riemann est antisymétrique dans la permutation de la première ou de la deuxième paire d'indices et qu'il est symétrique dans la permutation des deux paires

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma} = R_{\gamma\delta\alpha\beta} \quad (1.61)$$

$$(1.62)$$

On peut aussi montrer qu'il satisfait à l'identité

$$R^{\mu}_{\nu\alpha\beta} R^{\nu}_{\rho\gamma\delta} + R^{\mu}_{\nu\gamma\delta} R^{\nu}_{\rho\alpha\beta} + R^{\mu}_{\nu\delta\alpha} R^{\nu}_{\rho\gamma\beta} = 0$$

Les deux premières propriétés de symétrie impliquent que le tenseur de Riemann a autant de composants qu'une matrice symétrique 6×6 , c'est-à-dire 21 composants. La dernière relation (1.63) est

33 indépendants des premiers et ajoute ainsi une contrainte supplémentaire au nombre de composants. Le tenseur de Riemann possède donc 20 composantes indépendantes.

Enfin, les dérivées du tenseur de Riemann bénéficient d'une propriété de symétrie cyclique qui est

$$3-R_{a[b}R_{c]d} = 0, \quad (1.64)$$

appelé l'identité Bianchi.

1.2.4.2 Tenseurs de Ricci et d'Einstein

Les propriétés de symétrie du tenseur de Riemann impliquent que l'on ne peut construire qu'un seul tenseur par contraction de deux indices. Il s'agit du tenseur de Ricci, symétrique et défini par

$$R_{ab} = R^c{}_{a}{}^b{}_c = -R^c{}_{c}{}^b{}_a. \quad (1.65)$$

Le tenseur de Ricci comporte 10 composantes indépendantes. Sa trace définit un scalaire, la courbure scalaire, également connue sous le nom de scalaire de Ricci.

$$R = R^a{}_a g^a{}_a. \quad (1.66)$$

Contracter les identités Bianchi (1.64), respectivement, par $g^{a,b}$ et $g^a{}_a g^{b,c}$ implique que

$$R^a{}_a g^{b,c} - R^b{}_b g^{a,c} + R^c{}_c g^{a,b} = 0, \quad R^a{}_a g^{b,c} - R^b{}_b g^{a,c} + R^c{}_c g^{a,b} = 0$$

On peut combiner ces deux équations pour construire un tenseur conservé pour la dérivée covariante

$$G^a{}_a = 0, \quad G^a{}_b = R^a{}_b - \frac{1}{2} R g^a{}_b. \quad (1.67)$$

Ce tenseur $G^a{}_a$ est appelé tenseur d'Einstein.

1.2.4.3 Tuer les champs de vecteurs

Un vecteur qui satisfait l'équation de Killing

$$\nabla_a \xi_a = 0$$

est appelé *vecteur Killing*, il garde la métrique invariante et correspond donc à une symétrie espace-temps. De la relation (1.59), nous concluons que (1.58) implique que $\xi_a = R^a{}_b \xi^b$

Cela montre qu'à partir de la valeur de ξ_a en un point donné

on peut déterminer le champ vectoriel Killing de manière unique. Il faut alors spécifier N valeurs pour ξ_a , et $(N-1)/2$ valeurs pour $\xi_a \xi_b$ garder en minci il est antisymétrique, de sorte que Il y a au plus $N(N+1)/2$ champs de vecteurs Killing linéairement indépendants. Pour $N = 4$, cela fait 10 vecteurs Killing, ce qui est précisément la dimension du groupe Poincaré de l'espace Minkowski.

En effet, ce nombre maximum de champs de vecteurs Killing n'est pas toujours atteint dans un espace-temps arbitraire puisque les équations de Killing ne sont pas nécessairement intégrables pour tout choix de conditions initiales ; la plupart des espaces-temps n'ont ni symétries ni champs de vecteurs tueurs !

Un espace-temps bénéficiant du nombre maximum de champs de vecteurs Killing est appelé espace-temps à symétrie maximale. On peut montrer à partir des équations de Killing et de (1.59) que le tenseur de Riemann doit alors satisfaire (voir, par exemple, Réf. [2] pour une démonstration) $(N - l)R = R^{\wedge} - R_{,,e} \delta t$,

de sorte que

le scalaire de Ricci, R , étant une constante. Les espaces à symétrie maximale sont donc des espaces de courbure constante. Pour $77 - 4$, il existe trois espaces-temps à symétrie maximale : Minkowski, de Sitter et anti-de Sitter. Voir également la discussion à la section 3.1.3 du chapitre 3.

1.2.5 Approche covariante

Nous considérons une famille de géodésiques temporelles représentant les lignes du monde d'observateurs typiques de l'Univers (les observateurs fondamentaux). Dans le cas d'un fluide, on peut considérer ce flux de géodésiques comme l'ensemble des éléments fluides de la ligne d'univers. Chaque observateur a un vecteur tangent à sa ligne d'univers, $= dx^p / dr$. Ce vecteur est de type temporel et satisfait $^3 = -1$.

Une description plus détaillée de cette approche covariante peut être trouvée dans la réf. [9].

1.2.5.1 3+1 décomposition

Avec le vecteur on peut définir deux tenseurs de projection

$$Y_{iiv} = Q_{p.b'} \llcorner \text{Je} \gg \quad (1,68)$$

respectivement le long et perpendiculairement au vecteur. Nous avons $U^?U'' = U^{\wedge} = W = <$

et

$$\llcorner = b\mathfrak{f} = 3, \quad 7(X = \hat{U}.$$

Ces deux projecteurs permettent de définir une notion naturelle d'espace et de temps pour un observateur O puisque l'élément-ligne prend la forme

$$ds^2 = -(u_M dT^M)^2 + y^{\wedge} d\tilde{r} + dx^{\iota'}. \quad (1,69)$$

Tout vecteur peut être décomposé en parties « temps » et « espace », par rapport au vecteur $u^{\iota'}$ comme

En particulier, une particule de masse m a une impulsion

³ Nous travaillons maintenant dans un système unitaire tel que $c = 1$. Cette équation prendrait autrement la forme

$$p^M = m n^M, P^M P_M = -m^2.$$

L'observateur O va mesurer l'énergie de cette particule pour être

$$E = -p^i u_{ii}, \quad (1.70)$$

de sorte que $F^2 - p_L p^L = m^2$. Notons que si cette particule ne suit pas de géodésie, alors son équation de mouvement est

$$m c F = F^*,$$

où F^M représente toute force non gravitationnelle appliquée sur la particule. Ici, la dernière égalité découle du fait que $\gamma = 1$.

1.2.5.2 Dérivées spatiales et temporelles

Nous pouvons maintenant définir une dérivée le long d'une ligne d'univers, tangente à

$$T^{a0} = u^\alpha V_i T^{00}.$$

Cela correspond à une dérivée par rapport au temps propre. On peut aussi définir une dérivée dans l'hypersurface orthogonale à par

$$= \gamma >$$

Cette dérivée est une dérivée covariante tridimensionnelle associée à la métrique spatiale (on peut en effet vérifier que $V_Q \gamma_{MI} = 0$). Cependant, notons que pour une fonction arbitraire p , $V^\alpha V_\alpha p = U|_{M;I} j p$ (le rappel est géodésie). Ainsi, ce terme ne disparaît que si $u[n|iy] = 0$. La dérivée V n'est bien définie que sous cette condition. On peut noter notamment $= V_{/t} T^M + u^\alpha T^\alpha$.

1.2.5.3 Distorsion du flux géodésie

On considère un flux vectoriel décrivant, par exemple, un flux de matière. La dérivée covariante du champ vectoriel peut être décomposée comme

$$= -u^\alpha \dot{u}_\alpha + \sim \odot \gamma_{MI} / + 0^\wedge + L J I W \quad (1.72)$$

La trace $\langle \gamma =$ est appelée *expansion* et décrit la distorsion isotropie, cr_{MI} est un tenseur symétrique sans trace appelé *shear* ($= 0$, $cr^\wedge = 0$) et décrit le distorsion du flux de matière, est un tenseur antisymétrique appelé *tourbillon* qui décrit la rotation du flux de matière ($= 0$). Le vecteur tourbillon est défini par

$$UJ^\alpha = -U_\alpha E^{00} \wedge \wedge \wedge \wedge \Leftrightarrow tI \in fia,$$

et satisfait par construction $= 0$. The shear and vorticity amplitude sont respectivement définis comme

$$o_-^2 =$$

ùtz est l'*accélération* et disparaît si u'l suit une géodésie.

Il sera utile d'introduire une échelle caractéristique $S(r)$ définie par

$$\frac{\dot{S}}{S} = \frac{1}{3} \Theta,$$

qui détermine S le long de chaque ligne d'univers jusqu'à un facteur global. Le volume de chaque élément du fluide varie comme S^3 .

1.2.5.4 Équation de Raychaudhuri

Je calcule maintenant $\Theta = u^\mu \nabla_\mu (V_\mu u^\mu)$ en utilisant la décomposition (1-72) ainsi que (1.59) pour commuter les dérivées covariantes. Cela conduit à l'équation de Raychaudhuri

$$\dot{\Theta} = -\frac{1}{3}\Theta^2 + \dot{u}^\mu \dot{u}_\mu + 2(u^\mu \nabla_\mu \Theta - \Theta^2) + R^{\mu\nu} u_\mu u_\nu \quad (1.73)$$

Cette équation est au cœur de l'étude de l'effondrement gravitationnel. Deux autres équations décrivant la projection du tourbillon et du cisaillement peuvent être obtenues de manière similaire (voir Réf. [9]).

Cette équation a une conséquence importante. Supposons que le tourbillon s'annule ($\omega = 0$) et que $\Theta = 0$ pour tous les temps. Il s'ensuit que si $\dot{\Theta} > 0$ pour tous les temps, on a que $\Theta + \Theta^2/3 < 0$ donc que

$$\frac{1}{\Theta} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\Theta} \right) > 3$$

• Si $\Theta_0 < 0$, soit. s'il s'agit d'un flux convergent, alors à un instant donné $r < -3/\Theta_0$, $1/\Theta$ doit passer par zéro et Θ doit donc diverger. Le flux géodésique est donc pathologique. Cela signifie la présence d'un caustique ou d'une singularité.

• Si $\Theta_0 > 0$ à un instant donné, on peut exprimer l'équation de Raychaudhuri en fonction de S pour obtenir que $\dot{S}/S < 0$. Il doit donc exister un instant antérieur $r_Q < 3/Q_0$ tel que $S \rightarrow 0$ quand $r \rightarrow r_Q$. Cela se traduit par l'existence d'une singularité dans le passé.

Il s'agit d'un cas particulier des théorèmes sur les singularités spatio-temporelles qui sont discutés en détail dans la Réf. [10]. Nous donnons dans le tableau suivant la définition de plusieurs conditions énergétiques qui apparaîtront tout au long de cet ouvrage.

Nom	Définition	Signification
numéro 11	$\dot{\Theta} > 0$ $W^\mu \cdot \dot{u}_\mu = 0$	La lumière est focalisée par la matière
causal	$G^\mu_\mu \dot{u}_\mu < 0$ $= -1$	L'énergie ne circule pas plus vite que la vitesse de la lumière
faible	$G^\mu_\mu u^\mu > 0$ $= -1$	La densité énergétique est positive pour tout observateur
dominant	causal et fort	
fort	$R_{\mu\nu} u^\mu u^\nu > 0$	$S < 0$

1.2.5.5 Cas d'un tourbillon disparaissant

Si $tu = 0$ pour tous les temps, alors les hypersurfaces localement perpendiculaires au flux rG peuvent être globalement étendues. $\gamma_{\hat{A}\hat{B}}$ est alors la métrique spatiale (ie métrique riemannienne tridimensionnelle) induite par $g_{\mu\nu}$ sur Σ et ∇_V est la dérivée covariante associée à $\gamma_{\hat{A}\hat{B}}$, $\nabla_V \gamma_{\hat{A}\hat{B}} = 0$ (voir Fig. 1.7). La « courbure » de Σ dans l'espace-temps à quatre dimensions A_4 peut être caractérisée par le changement de direction de la normale A^α lorsqu'elle est déplacée sur Σ . Ceci est associé au *tenseur de courbure extrinsèque*.

(1,74)

En utilisant (1.72), cela se réduit à

$$R_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta = -\gamma^{\alpha\beta} \nabla_\alpha n^\beta.$$

Un tenseur de Riemann ⁴, $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ peut être associé à V à partir de (1.59). Partant de l'égalité $\nabla_\alpha n^\alpha = 0$ pour un n^α de forme 1 sur Σ (soit $n^\alpha u_\alpha = 0$), nous comprenons ça

$$0 = \nabla_\alpha n^\alpha = \gamma^{\alpha\beta} \nabla_\alpha n^\beta + \gamma^{\alpha\beta} K_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta + \gamma^{\alpha\beta} \nabla_\alpha n^\beta n^\alpha n^\beta,$$

où nous avons utilisé le fait que $\gamma^{\alpha\beta} \nabla_\alpha n^\beta = K_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta$. En prenant la partie antisymétrique (sur α et β), le deuxième terme s'annule si bien qu'on obtient finalement la relation

$$\gamma^{\alpha\beta} \nabla_\alpha n^\beta \nabla_\beta n^\alpha = -\gamma^{\alpha\beta} \nabla_\alpha n^\beta \nabla_\beta n^\alpha, \quad (1,75)$$

où nous avons utilisé $\gamma^{\alpha\beta} \nabla_\alpha n^\beta = -K_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta$ pour exprimer les deux derniers termes. C'est la relation de Gauss. Contracté sur les deux indices (α et β) cela donne

$$R_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta = \gamma^{\alpha\beta} \nabla_\alpha n^\beta \nabla_\beta n^\alpha - K_{\alpha\beta} K^{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta,$$

et en prenant la trace, on obtient la *relation scalaire de Gauss*

$${}^{(3)}R + K^2 - K_{\alpha\beta} K^{\alpha\beta} = R + 2R_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta = 2G_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta. \quad (1,76)$$

Il relie la courbure intrinsèque de Σ au scalaire de Ricci de A_4 et à la courbure extrinsèque. Pour finir, la relation (1.59) pour le vecteur u^α projeté sur Σ conduit à la *relation de Codazzi*

ce qui donne, après contraction, la *relation de Codazzi contractée*

$$\gamma^{\alpha\beta} \nabla_\alpha n^\beta \nabla_\beta n^\alpha = \gamma^{\alpha\beta} \nabla_\alpha n^\beta \nabla_\beta n^\alpha. \quad (1,77)$$

⁴ En trois dimensions, le tenseur de Riemann est entièrement déterminé à partir du tenseur de Ricci et de la courbure scalaire comme

$$R_{ikl} = -\frac{1}{2} R_{ik} \delta_{jl} + \frac{1}{2} R_{il} \delta_{jk} + \frac{1}{2} R_{jl} \delta_{ik} - \frac{1}{2} R_{jk} \delta_{il} - \frac{1}{2} R_{kl} \delta_{ij} + \frac{1}{2} R_{ij} \delta_{kl}.$$

En utilisant l'expression de la courbure extrinsèque, la relation scalaire de Gauss (1.76) implique que la courbure de S est donnée par

$$= -\frac{1}{6} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2cr^2 + 2G^{\alpha\alpha} u \right) \quad (1.78)$$

qui est valable pour tout espace-temps tel que $\omega = 0$. Un tel flux est appelé *irrotationnel*.

1.2.5.6 Décomposition des tenseurs de rang 2

L'existence du champ vectoriel n^α permet de décomposer tout tenseur symétrique de rang 2 de manière unique, sous la forme

$$T_{\alpha\beta} = T \text{Par}^{\alpha\beta} H^{-1} \quad (1.79)$$

avec

$$q^\alpha = 0, \quad \omega = 0, \quad 7r(p^\alpha) = 7T \text{p}^\alpha, \quad -0, \quad = 0.$$

En particulier, nous avons

$$A = T_{M\alpha} u^\alpha V, \quad 3B = T^{\alpha\beta} y^\alpha.$$

1.3 Équations de mouvement

1.3.1 Les équations d'Einstein

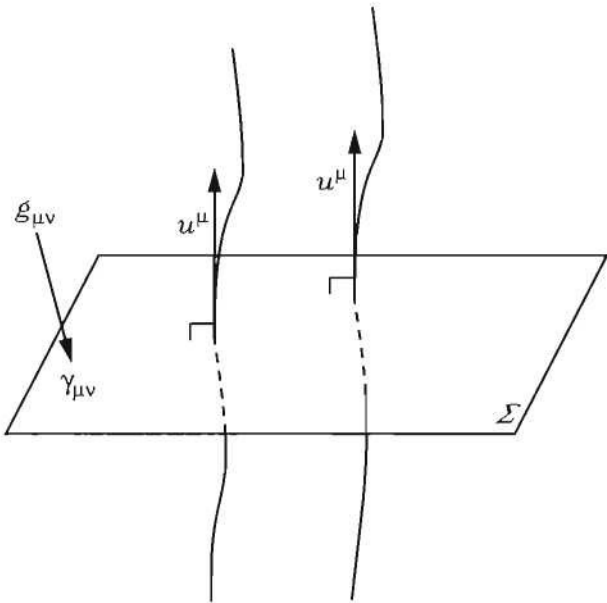
De la même manière que pour l'électromagnétisme, nous aimerions formuler des équations du second ordre pour $g_{\alpha\beta}$. Pour cela, nous avons besoin d'un Lagrangien qui dépend uniquement de la métrique et de ses premières dérivées.

Le lagrangien proposé par Einstein et Hilbert se réduit à la courbure scalaire. D'autres choix sont possibles, comme n'importe quelle fonction de la courbure scalaire ou des termes faisant intervenir d'autres invariants comme le terme de Gauss-Bonnet, ou encore des théories plus compliquées de type « tenseur-scalaire » ; tous ces cas sont discutés et étudiés au chapitre 10. Le choix « le plus simple » est en parfait accord avec toutes les observations et définit la théorie de la relativité générale. Tout autre choix sera considéré comme une extension du cas standard.

Ainsi, nous nous concentrons sur l'action

$$^4\mathcal{L} + j \quad \text{at} \sqrt{-g} d^4x, \quad (1.80)$$

où K est un coefficient à déterminer en exigeant que la théorie se réduise à la gravité newtonienne dans la limite du champ faible ; c'est le seul paramètre libre de la théorie. $\mathcal{L}_{\text{mat}}$ est le lagrangien des champs de matière et A est une constante appelée *constante cosmologique*. Nous allons maintenant présenter la variation de ces deux termes.



Fi
th

I.
W

$$-\int \delta \left(R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \right) \, \mathrm{d}^4 x,$$

w
w

T
g

w

T
c

$T_{\mu\nu} = 0$ (mais notez que les dérivatives des symboles Christoffel ne disparaissent pas). On obtient donc

$$\delta S = - \delta S_{\text{mat}}$$

To go from the partial derivative to the covariant derivative, we used the fact that

le résultat est un tenseur, et donc il devrait être le même dans n'importe quelle trame. Nous

$$\int_V g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta R_{\mu\nu} d^4x = \int_V \sqrt{-g} \left[\delta R - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} R \right] d^4x$$

pouvons donc conclure que

sur tout volume V . L'intégrande est donc de la forme $\delta S_{\text{mat}} = \int_V \delta \mathcal{L}_{\text{mat}} \sqrt{-g} d^4x$, qui peut être réexprimée, en utilisant la propriété (1.52), comme $\delta S_{\text{mat}} = \int_V \delta \mathcal{L}_{\text{mat}} \sqrt{-g} d^4x$. C'est donc l'intégrale d'une dérivée totale, qui peut être réduit à un intégral sur la frontière du volume V afin qu'il ne contribue pas aux équations du mouvement.

On obtient donc

$$\begin{aligned} \delta \int_V R \sqrt{-g} d^4x &= \int_V \sqrt{-g} G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^4x, \\ \delta \int_V \mathcal{L}_{\text{mat}} \sqrt{-g} d^4x &= - \int_V \Lambda \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^4x \end{aligned} \quad (1.82)$$

où le tenseur d'Einstein G est défini en (1.67). La variation du terme dans A est triviale et donne

1.3.1.2 Tenseur contrainte-énergie

$$\delta \int_V \mathcal{L}_{\text{mat}} \sqrt{-g} d^4x = \int_V \frac{\delta (\mathcal{L}_{\text{mat}} \sqrt{-g})}{\sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x$$

La variation de l'action de la matière par rapport à la métrique est donnée par que l'on peut écrire comme

$$\delta \int_V \mathcal{L}_{\text{mat}} \sqrt{-g} d^4x = - \frac{1}{2} \int_V \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^4x \quad (1.83)$$

$$T_{\mu\nu} = - \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}_{\text{mat}}}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (1.84)$$

où le tenseur énergie-impulsion défini par est un tenseur symétrique de rang 2.

1.3.1.3 Les équations d'Einstein

En utilisant les résultats des deux sections précédentes, on obtient la forme générale des équations d'Einstein

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (1.85)$$

Notez qu'il existe une autre façon de faire varier le lagrangien, connue sous le nom de méthode Palatini, dans laquelle la métrique et les symboles de Christoffel sont considérés comme indépendants.

L'extrémisation de l'action par rapport aux deux champs donne alors les équations d'Einstein et la condition $V^\alpha g_{\alpha\beta} p = 0$, ce qui est équivalent à la définition (1.35).

1.3.2 Équations de conservation

Les identités de Bianchi (1-64) imposent $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$, ce qui implique, en utilisant les équations d'Einstein et le fait que $g^\alpha_\alpha = 4$

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0. \quad (1.86)$$

Cette équation est satisfaite par le tenseur total énergie-impulsion (c'est-à-dire de tous les composants de la matière). Pour aller plus loin, on pourrait préciser la forme du Lagrangien matière ou de son tenseur énergie-impulsion.

1.3.2.1 Forme covariante

La forme la plus générale du tenseur énergie-impulsion est celle donnée dans (1.79) valable pour tout tenseur énergie-impulsion symétrique de rang 2,

$$T_{\alpha\beta} = p u_\alpha u_\beta + P g_{\alpha\beta} + 2g_{\alpha\beta} p u^\alpha u^\beta + \pi_{\alpha\beta},$$

dans laquelle $p = T_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta$ est la densité d'énergie mesurée par un observateur au repos avec le fluide, $P = T^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} / 3$ est la pression, $q^\alpha = -T^{\alpha\beta} u_\beta$ est le flux d'énergie par rapport à u^α et est le tenseur de pression anisotrope ($T^{\alpha\beta} - p u^\alpha u^\beta - P g^{\alpha\beta} = \pi^{\alpha\beta}$).

L'équation de conservation $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$ peut être projetée respectivement le long de u^α et $g_{\alpha\beta}$.

pour obtenir les deux équations de conservation

$$u^\alpha \nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0, \quad g_{\alpha\beta} \nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0.$$

En utilisant la décomposition (1.72), on obtient

$$\dot{p} + 2q^\alpha \hat{u}_\alpha \quad \text{et} \quad y^\alpha \hat{u}^\alpha = y^\alpha q^\alpha + V^\alpha P - V^\alpha \nabla_\beta T^{\alpha\beta} - \nabla_\beta T^{\alpha\beta} u^\alpha = 0.$$

Nous obtenons cela

$$\dot{p} + \bar{\nabla}_\mu q^\mu + (p + P)\Theta + 2q^\mu \dot{u}_\mu + \sigma^\mu_\nu \pi^\nu_\mu = 0 \quad (1.87)$$

$$\gamma^\lambda_\nu \dot{q}^\nu + \bar{\nabla}^\lambda P + \bar{\nabla}_\alpha \pi^{\alpha\lambda} + \frac{4}{3} \Theta q^\lambda + (\sigma^\lambda_\alpha + \omega^\lambda_\alpha) q^\alpha + (p + P) \dot{u}^\lambda + \pi^{\alpha\lambda} \dot{u}_\alpha = 0. \quad (1.88)$$

Ces équations sont valables pour tout tenseur énergie-impulsion et toute géométrie espace-temps.

1.3.2.2 Fluide parfait

Le fluide parfait est un cas particulièrement intéressant pour lequel $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$ et $q^\alpha = 0$. Les deux équations précédentes (1.87) et (1.88) se réduisent respectivement à l'équation de continuité de matière et à l'équation d'Euler

$$p + (p + P)Q = 0, \quad (1.89)$$

$$(p - 4 - V = 0. \quad (1.90)$$

Le terme $\dot{u}^\alpha = u^\alpha \nabla_\alpha u^\alpha$ représente une accélération nulle pour un fluide sans pression ($P = 0$). Les particules d'un tel fluide sans pression suivront donc les géodésiques.

Pour un flux irrotationnel, en utilisant (1.85) pour exprimer le tenseur d'Einstein, (1.78) est de la forme

$$^{(3)}P = 2/\text{tp} - |\mathbf{e}|^2 + 2\mathbf{r}^2 + 2A, \quad (1.91)$$

que nous appellerons l'équation de *Friedmann générique*.

Certaines conditions sont souvent imposées sur la pression et l'énergie. Les conditions énergétiques introduites précédemment peuvent être réécrites comme

- nul : $p > -P$,
- causale : $|p| > \rho$,
- nul et causal : $|p| > |P|$ et $p < 0$ si et seulement si $p = -P$,
- faible : $p + P > 0$ et $p > 0$,
- fort : $p - 3P > 0$ et $p + P > 0$.

1.3.2.3 Électromagnétisme

L'électromagnétisme est décrit par le tenseur antisymétrique appelé tenseur de Faraday et satisfaisant

$$3F_{[\mu\nu;\alpha]} = F_{\mu\nu;\alpha} + F_{\nu\alpha;\mu} + F_{\alpha\mu;\nu} = 0. \quad (1.92)$$

$F_{\mu\nu}$ can be defined as the curl of the vector potential A_μ as

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}. \quad (1.93)$$

The energy-momentum tensor can be derived from the action

$$S_{em} = -\frac{1}{4} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x, \quad (1.94)$$

which gives

$$T^{\mu\nu} = F^{\lambda\mu} F_\lambda{}^\nu - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}. \quad (1.95)$$

The conservation equations then reduce to Maxwell's equations in the vacuum

$$= 0. \quad (1.96)$$

Cette équation peut être réécrite en termes du vecteur potentiel A^μ comme

$$= 0, \quad (1.97)$$

où nous avons choisi la jauge de Lorentz, définie par $\nabla_\mu A^\mu = 0$ et où le tenseur de Ricci est issu de la commutation des dérivées covariantes. Un terme source peut être ajouté en introduisant un terme de couplage $A^\mu j_\mu$ dans le lagrangien pour obtenir

$$(1.98)$$

Un observateur avec le vecteur tangent u^p peut définir respectivement un champ électrique et un champ magnétique en

$$E_p = F^{\wedge} u^p, \quad B_p = \quad (1.99)$$

Ces vecteurs satisfont $E^{\wedge} U_y - B^{\wedge} U_y = 0$ et nous pouvons exprimer le tenseur du champ électromagnétique comme

$$F_{y,,} = 2u^y E^{\wedge} - \epsilon_{y \, u p a} u^p B^a. \quad (1.100)$$

En utilisant cette expression, on peut décomposer le tenseur énergie-impulsion comme celui d'un fluide

$$= (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) u^{\wedge} u^{\wedge} + \mathbf{j}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) y^{\wedge} + 2u^{\wedge} \mathbf{E}^{\wedge} p^{\wedge} x u_p E_a B_x + \mathbf{T} \mathbf{T}^{\wedge},$$

avec $E^2 = E^{\wedge} E_{\wedge} B^2 = B y B^{\wedge}$ et (le rappel est sans trace)

$$\begin{aligned} &= -(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) 7^{\text{MP}} - E^{\wedge} E^{\wedge} - B^{\wedge} B^{\wedge} \cdot 3 \\ &= -E^{\wedge} E^{\wedge} = -F^{\wedge} u F \end{aligned}$$

We can then deduce that the energy density measured by a comoving observer is $\rho_{\text{cm}} = \frac{1}{2}(E^2 + B^2)$ and that the équation of state for radiation is $P_{\text{cm}} = \frac{1}{3} \rho_{\text{cm}}$.

The trajectory of any particle of charge e and mass m in an electromagnetic field is of the form

Enfin, on peut réexprimer les équations de Maxwell, $\nabla_{\mu} F^{\mu\nu} = j^{\nu}$, en termes de $E^{\wedge}$ et $B^{\wedge}$. En projetant le long de u_p et le long de $y^{\wedge}$ nous obtenons respectivement :

$$= j, \quad (1.102)$$

$$= -y^{\wedge} j^{\wedge} - \frac{1}{2} \delta E^x + a^x E'' + e^{c \, i \, x \, l} u_a \zeta \hat{u}_f B_{,,} + u_f E_a, \quad (1.103) \text{ with } e^{\frac{1}{2} \frac{1}{104}}$$

$j^{\wedge} U_y$. The same procedure applied to the équation $\nabla_{\mu} F^{\mu\nu} = j^{\nu}$ gives,

respectively,

$$\begin{aligned} &V_p B^M + \quad = 0, \\ &y^x B^{\wedge} + \mathbf{E}^{\wedge} u_a \ddot{y}_p E_{,,} = -I \mathbf{E} B^x + \quad - e^{\circ x} u_a (\dot{u}_{,,} E_a - u_{,,} B_{,,}). \end{aligned} \quad (1.105)$$

Rédigées sous cette forme, ces quatre équations donnent une généralisation relativiste des quatre équations de Maxwell, valable pour toute géométrie espace-temps.

1.3.2.4 Champ scalaire

L'action d'un champ scalaire ϕ évoluant dans un potentiel $V(\phi)$ est donnée par

$$(1.106)$$

En faisant varier cette action par rapport à la métrique, on obtient le tenseur énergie-impulsion tel que défini dans (1.84)

les composantes de la métrique sont $g^{00} = -N^2 + y_{ij} N^i N^j$, $g_{00} = M$ et $g_{ij} = l_{ij}$ et les composantes de la métrique inverse sont $g^{00} = -N^{-2}$, $g^{0L} = N'/N^2$ et $g^{ij} = y^{ij} - N'^2/N^2$. Au fur et à mesure que t augmente, on passe d'une hypersurface à une autre et on peut considérer l'espace-temps à quatre dimensions comme l'évolution temporelle d'un espace riemannien à trois dimensions.

On peut alors en déduire une relation simple entre les déterminants g de $g^\wedge$ et γ de $\gamma^\wedge$. En utilisant la règle de Cramer pour calculer la métrique inverse, on obtient que $g^{00} = \gamma/g$ de sorte que

$$\sqrt{-g} = N\sqrt{\gamma}.$$

L'action d'Einstein-Hilbert (1.80) peut être réécrite sous la forme

$$S = \int \left[\int_{\Sigma_t} N \left({}^{(3)}R + K_{ij} K^{ij} - K^2 \right) \sqrt{\gamma} d^3x \right] dt$$

Cette action doit être considérée comme une fonctionnelle des variables $q = (q_{ij}, TV, N)$ et de leurs dérivées temporelles. La courbure extrinsèque est

$$= 2\sqrt{\gamma} \wedge^{kD} j e^{Nk} + \wedge^D \wedge^{Nk} \sim$$

de sorte que le secteur de gravité dérive de la densité lagrangienne

$$C[q, q] = N \wedge R + K_{ij} K^{ij} - K^2 \wedge \quad (1.110)$$

Puisque ce Lagrangien ne dépend pas de TV et TV' , nous concluons que la fonction lapse et le vecteur de décalage ne sont pas des variables dynamiques et seront associés à deux équations de contraintes. La seule variable dynamique est donc $\gamma^\wedge$ et sa quantité de mouvement conjuguée est

$$= \sqrt{\gamma} (\wedge^\wedge R - R^{ij} \wedge_{ij}). \quad (1.111)$$

Il s'ensuit que la densité hamiltonienne est donnée par $\mathcal{H} = \gamma^\wedge \dot{\gamma}_{ij} - C$ et peut être exprimée comme

$$-H = \left[\sqrt{\gamma} (\wedge^\wedge R - K_{ij} K^{ij} + K^2) + 2N' \right] - D_j J^j$$

$$+ 2 \wedge^{ans} D_j \zeta K N^j.$$

Le dernier terme, étant une divergence, ne contribue pas à l'intégral, de sorte que l'hamiltonien se réduit à

$$H = \int (1\sqrt{\gamma} C - 2\wedge^\wedge) \sqrt{\gamma} d^3x \quad (1H2)$$

avec

$$C = \wedge^\wedge R - K_{ij} K^{ij} + K^2, \quad -D_i K + D_j K_i \quad (1.113)$$

C'est une fonctionnelle de $q = (\gamma_{ij}, N, N')$ et $p = \delta C / \delta q = (\pi^{ij}, 0, 0)$. La courbure scalaire est fonction de $\gamma^\wedge$ et de ses dérivées spatiales et la courbure extrinsèque est fonction de $\gamma^\wedge$ et γ'^j obtenue à partir de l'inversion de (1.111)

Les équations de Hamilton conduisent à deux contraintes, la « contrainte d'énergie » $C_0 = 0$ et la « contrainte d'impulsion » $C_i = 0$ et une équation d'évolution qui dans le vide prend la forme $\dot{\gamma}_{ij} = \hbar H / f r p_i - 2N K_{ij} + D_i N_j + D_j N_i$. Déduire l'équation de Hamilton avec la

matière dépasse le cadre de ce livre. Lorsque la matière est incluse, les équations de contraintes prennent la forme

$$^{(3)}J^i + K^i{}_j - 16\pi G p, \quad (1-114)$$

$$D_j K^j{}_i - D_i K = 8\pi G n P_{iy} \quad (1,115)$$

avec $p = T_{ij} n^i n^j / n$ et $P_{ij} = T_{ij} - p n_i n_j$. Ces relations peuvent être obtenues

directement à partir des équations d'Einstein et de la relation de Gauss (1.76).

1.4 Géodésiques dans un espace-temps courbe

1.4.1 Quantifications conservées le long d'une géodésie

A chaque symétrie on peut associer un vecteur Killing, sous lequel la métrique espace-temps reste invariante. Un tel vecteur satisfait l'équation déduite de (1.58), $\nabla_\mu \xi^\mu = 0$. L'existence de tels vecteurs permet de calculer les valeurs conservées quantifiées utiles pour l'étude des solutions des équations d'Einstein.

Considérons une géodésie de vecteur tangent γ^μ . On peut vérifier que la quantité est constante tout au long de la trajectoire. En effet,

$$\frac{d}{ds} (\xi_\mu \gamma^\mu) = \gamma^\mu \nabla_\mu (\xi_\nu \gamma^\nu) = 0.$$

Le premier terme disparaît de l'équation géodésique et le deuxième terme est la contraction d'un tenseur symétrique avec un tenseur antisymétrique.

De même, si $T_{\mu\nu}$ est un tenseur énergie-impulsion alors $\xi^\mu T_{\mu\nu} \gamma^\nu$ est un vecteur conservé

$$\frac{d}{ds} (\xi^\mu T_{\mu\nu} \gamma^\nu) = 0.$$

Le premier terme disparaît de l'équation de conservation et le second est la contraction d'un tenseur symétrique avec un tenseur antisymétrique. Cette relation a une implication importante. Le vecteur γ^μ satisfait par construction

$$d^2 \gamma^\mu / ds^2 = 0.$$

En intégrant sur un volume V , on peut donc conclure que

$$\int_V (\xi^\mu T_{\mu\nu} \gamma^\nu) d^3x = \int_V \frac{d}{ds} (\xi^\mu T_{\mu\nu} \gamma^\nu) d^3x = 0.$$

La quantité Q , définie par

$$Q = \int_V \xi^\mu T_{\mu\nu} \gamma^\nu d^3x,$$

suit l'équation de conservation

Il s'ensuit que $doQ^a = 0$ si le terme limite disparaît.

1.4,2 Équation de déviation Géodésie

Nous considérons une famille $rr^{Zi}(A, s)$ de géodésiques voisines, où A est le paramètre affine le long des géodésiques et s est une étiquette. Le vecteur

$$= \frac{ds}{ds}$$

mesure la séparation entre deux géodésiques voisines. Il peut être choisi dans le plan orthogonal au flux géodésie, c'est à dire tel que $= 0$ (sinon one can remplacez-le par $y^{\wedge n^u}$). On peut vérifier ça

$$= n^>'d,,u^u + I>V = u^uV$$

L'accélération relative entre deux géodésiques voisines est définie par

$$a^{1'} = Ap - u^uV,$$

En utilisant la propriété précédente on obtient

$$= u^u V_Q = (u^a V_o n^0) V_{\beta} u^{\wedge} + \quad (1.117)$$

Pour évaluer le premier terme, notons que $= 0$ puisque satisfait les géodésiques équation. Cela signifie que $(n^{1'} V_f, u^{t'}) V_{1> U-hn^{\wedge} u^{t'} V_M Vp/ = 0$ qui peut être réécrit, en commutant et dans le premier terme et en commutant les indices fictifs p et v dans le second, comme $^{\wedge}u^0 + n^{1'} ^{\wedge}u^a = 0$. En utilisant ce résultat pour évaluer le deuxième terme de (1.117), on obtient, après commutation des deux dérivées partielles

$$a^* = -R^{\wedge}u^0. \quad (1.118)$$

Cette équation confirme l'argument heuristique sur la relation entre courbure et déviation des géodésiques proches. Même si l'on travaille dans un référentiel en chute libre (où la gravité s'annule localement) le tenseur de Riemann ne s'annule pas (car les dérivatives des symboles de Christoffel ne s'annulent pas a priori) et on ne peut éviter la focalisation ou la défocalisation des géodésiques voisines.

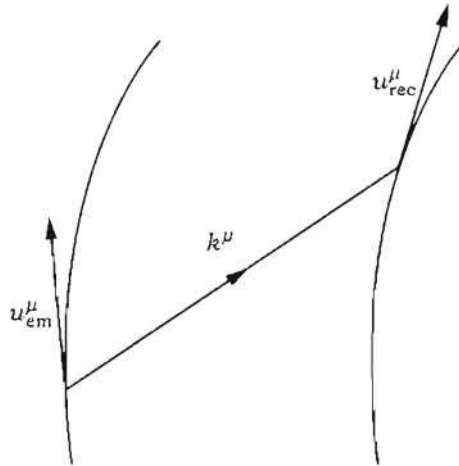
1.4.2.1 Approche covariante

On décompose le vecteur comme $avec = 1$ (donc, $\acute{e}^e_{\wedge} = 0$) et $= \hat{u}$.
On peut alors exprimer $soit comme = It'' + te^v$ soit comme $n^u =$. Par
en comparant ces deux expressions et en projetant dessus on obtient

$$-_{\wedge} = identifiant + cr^{\wedge}e^{1'}, \quad (1.119)$$

que nous appelons la loi de Hubble généralisée. Quant à la projection orthogonale, elle donne

$$= K^{\wedge} (^peM^{\wedge} - e^{\wedge}) \quad (1,120)$$



Réception d'émission

Fig. 1.8 Un photon émis par un observateur comobile à 4 vitesses se propage le long d'une géodésie nulle et est reçu par un observateur comobile à 4 vitesses

1.5 Régime de champ faible

1.5.1 Limite newtonienne

Un paramètre indéterminé apparaît dans les équations d'Einstein, la constante κ . POUR y remédier, nous considérons la limite du champ faible des équations d'Einstein afin de comprendre comment la gravité newtonienne est récupérée. Nous développons la métrique espace-temps autour d'un espace-temps de Minkowski, en coordonnées Minkowski, comme

$$d\tau^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + \epsilon_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (124)$$

où se trouve une petite perturbation.

1.5.1.1 Équations d'Einstein linéarisées

De la décomposition précédente, nous pouvons conclure qu'au premier ordre en

et cela $= g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu h_{\alpha\beta}$ et nous définissons $h = h^\alpha{}_\alpha$. L'ordre linéaire dans les symboles Christoffel est donné par

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu})$$

En conséquence, le tenseur de Ricci est de la forme $R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \partial_\nu h - \Delta h_{\mu\nu})$ qui

$$= \frac{1}{2} (\partial_\mu \partial_\nu h - \Delta h_{\mu\nu}), \quad (125)$$

où $\square = g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$ est le d'Alembertien dans l'espace Minkowski. En contractant l'expression précédente avec $g^\mu{}_\mu$, on obtient la courbure scalaire

$$R = \Lambda X - \text{oh.}$$

Le tenseur d'Einstein est donné par $G^\alpha = R^\alpha - \frac{1}{2}R\eta^\alpha$ DE SORTE que les équations d'Einstein se lisent

$$-r_i \text{ jusqu'à } d_a d f i h^{al3} = 2K.T^\alpha, \quad (1.126)$$

avec

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{h}\eta_{\mu\nu}$$

En particulier, on peut vérifier que $h = -\bar{h}$ et que $h_{\rho L} = -\bar{h}^{\rho L}$.

1.5.1.2 Liberté de jauge

coordinate Systems: two different metrics can describe the same space-time. In the

En relativité générale, il existe une liberté de jauge liée au choix arbitraire de limite linéarisée, deux perturbations peuvent représenter le même état si elles sont liées par un changement de coordonnées. Après un changement de coordonnées de la forme le la perturbation métrique se transforme comme

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} - \mathcal{L}_\xi \eta_{\mu\nu}, \quad \bar{h}_{\mu\nu} \rightarrow \bar{h}_{\mu\nu} - \mathcal{L}_\xi \eta_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \xi^\alpha$$

où la dérivée de Lie est donnée par $= 2d(\eta^\alpha \eta_\alpha)$

En utilisant ces transformations, l'équation d'Einstein linéarisée (1.126) prend la forme remarquablement simple

$$(1,127)$$

si l'on choisit G^* tel que . Cela signifie qu'après le changement de variable, la perturbation métrique satisfait la condition de jauge

$$(1,128)$$

Cette jauge est connue sous le nom de *jauge de Donder* ou *jauge d'harmonie*. C'est analogue à la jauge de Lorentz en électromagnétisme.

1.5.1.3 Solutions des équations d'Einstein

Dans la jauge d'harmonie, la solution des équations d'Emstein peut être trouvée en utilisant la méthode du potentiel retardé, tout comme en électromagnétisme,

$$\bar{h}_{\mu\nu}(x, t) = \frac{\kappa}{2\pi} \int \frac{\mathcal{T}_{\mu\nu}}{r}$$

The general solution is therefore of the form $\bar{h}_{\mu\nu}^{(\text{gen})} = \bar{h}_{\mu\nu} + \bar{h}_{\mu\nu}^{(H)}$, where $\bar{h}_{\mu\nu}^{(H)}$ is solution of the homogeneous equations $\square \bar{h}_{\mu\nu}^{(H)} = 0$ with $\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu}^{(H)} = 0$.

1.5.1.4 Équation Géodésie

Pour un fluide classique, et à l'ordre le plus bas en vitesse, seule la composante T_{00} apporte une contribution (puisque $P \propto \rho c^2$). et T_j ne doivent être pris en compte qu'au premier ordre post-newtonien (1PN), c'est à dire à l'ordre v^2/c^2 . La forme de la solution générale des équations d'Einstein linéarisées (1.127) implique que les seuls termes non nuls sont $\hat{A}_{00}$ et h_{0i} . Ils sont donnés par

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2} h_{ij}$$

Il s'ensuit que toutes les composantes diagonales de sont égales à $h^0_0/2$,

Considérons maintenant la trajectoire d'une particule dont la vitesse est petite par rapport à la vitesse de la lumière ($v/c \ll 1$). Comme nous l'avons vu précédemment, à l'ordre le plus bas en h , le vecteur tangent à la ligne du monde est donné par

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dt}{d\tau}$$

avec $v^i = dx^i/dt$ et $\gamma = dt/d\tau = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, de sorte qu'on a $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ (c, v^i). En utilisant la relation $d^2 x^\mu / d\tau^2 = d(y^\mu P)/d\tau = u^\mu \hat{a}_\nu / dt - J_\nu^\mu y^\nu dp/d\tau$ la composante spatiale de l'équation géodésie devient

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = \frac{dr^i}{dt} \frac{dp}{dt} \frac{dt}{d\tau} + \frac{dx^i}{dt} \frac{dp}{dt} \frac{dt}{d\tau}$$

D'ordre linéaire en h et v , cette équation est de la forme

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \frac{d^2 h_{ij}}{dt^2} \frac{dx^j}{dt} \frac{dt}{d\tau} + \frac{1}{2} \frac{d^2 h_{0i}}{dt^2} \frac{dt}{d\tau} \quad (1.129)$$

1.5.1.5 Détermination de κ .

Travaillons dans un champ gravitationnel statique. La perturbation ne dépend que de la position x^i . L'équation (1.129) se simplifie alors en

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \frac{d^2 h_{ij}}{dt^2} \frac{dx^j}{dt} \frac{dt}{d\tau} + \frac{1}{2} \frac{d^2 h_{0i}}{dt^2} \frac{dt}{d\tau}$$

Le premier terme représente l'accélération des coordonnées. Au deuxième terme, on reconnaît le gradient d'un scalaire que l'on identifie au potentiel gravitationnel $2\gamma^0_0 = c^2 \gamma^0_0$, de sorte que l'on retrouve la forme newtonienne

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = -\frac{1}{2} \frac{d^2 h_{0i}}{dt^2} \frac{dt}{d\tau}, \quad P$$

On peut donc revenir aux équations d'Einstein et les comparer dans cette limite avec l'équation de Poisson qui détermine le potentiel gravitationnel en mécanique newtonienne. Cela permet d'identifier la valeur de κ , telle que la limite de relativité en champ faible soit cohérente avec la gravité newtonienne. De l'équation précédente, on déduit que $\hat{A}_{00} = 4\gamma^0_0/c^2$. Le tenseur énergie-impulsion a pour composante principale $T_{00} = \rho c^2$

et la limite de l'équation d'Einstein est donc $\Lambda = \kappa c^4/2$. En comparant cette équation avec l'équation de Poisson $\Delta A = -4\pi G \rho$, il s'ensuit que

$$\kappa = \frac{8\pi G_N}{c^4}, \quad (1.130)$$

où est la constante de Newton.

J.5.1.6 Analogy with electromagnetism

In the previous expressions, the linearized equations of general relativity are very similar to the equations of electromagnetism. One can take the analogy a step further by defining

$$A_i = ch_{,0} i.$$

L'équation de géodésie peut alors être réécrite comme

$$\ddot{x} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \dot{A} + \frac{1}{c} \nabla A \cdot \nabla A + \frac{1}{c} \nabla^2 A.$$

Dans un espace-temps statique, pour lequel $\dot{A} = 0$, l'expression précédente se réduit à une forme similaire à celle de l'électromagnétisme. Les équations d'Einstein sont donc similaires aux équations de Maxwell si l'on introduit

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\nu} + \frac{2}{c} \partial_{(\mu} A_{\nu)} \\ \nabla_\mu A^\mu &= -\frac{1}{c} \nabla^2 A \\ \nabla_\mu \nabla_\nu A &= -\frac{1}{c} \nabla_{(\mu} \partial_{\nu)} A \end{aligned} \quad (1.131)$$

The following list summarizes some aspects of the analogy, which cannot unfortunately be pushed much further.

	électromagnétisme	relativité linéarisée
Variables	$A_\mu \rightarrow A^\mu + d^\mu y$	$d^\mu y = 0$
Transformations du	$d f A^\mu = G^\mu$	$= -2\kappa T_{\mu\nu}$
État de la jauge		
Équations de champ		
Restrictions de l'autre	$\square y = \hat{U}$	$= 0$
transformations de jauge		

1.5.1.7 Dégradation TSV

Pour aller plus loin dans l'étude des perturbations, décomposons comme

$$h_{\mu\nu} = \frac{2}{3} \delta_{\mu\nu} \phi + \frac{2}{3} \partial_\mu \partial_\nu \psi + \partial_{(\mu} \xi_{\nu)} + \partial_{[\mu} \xi_{\nu]} + Q_{\mu\nu}$$

avec

$$\partial_\mu \xi^\mu = 0, \partial_\mu \xi^\nu = 0, \partial_\mu \xi^\nu = 0, \partial_\mu \xi^\nu = 0.$$

Les 10 composantes du tenseur sont décomposées en 4 perturbations scalaires (ϕ, ψ, ξ^i), 2 perturbations vectorielles (ξ^i) qui ont $6 - 2 = 4$ composantes indépendantes et 1 perturbation tensorielle E_{ij} qui a $6 - 4 = 2$ composants indépendants.

La propriété importante de cette décomposition, qui sera utilisée dans le contexte cosmologique au chapitre 5, est que ces trois types de perturbations sont découplées (voir Réf. [11]). Comme précédemment, il faut tenir compte de l'effet d'un changement arbitraire de coordonnées. Pour ce faire, nous décomposons le champ de vecteurs de déplacement ξ^α comme

$$\xi^\alpha = \xi^\alpha_{(s)} + \xi^\alpha_{(v)} + \xi^\alpha_{(t)}$$

Sous une telle transformation de coordonnées, la métrique se transforme en $g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$ [voir (1.58)]. Il s'ensuit qu'un

$$\delta g_{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu}^{(s)} + \delta g_{\mu\nu}^{(v)} + \delta g_{\mu\nu}^{(t)}$$

pour les modes scalaires,

pour les modes vectoriels, et les modes tensoriels restent inchangés

$$\delta g_{\mu\nu}^{(t)} = \delta g_{\mu\nu}^{(t)}$$

Les modes tensoriels sont donc invariants de jauge puisqu'ils ne dépendent pas du choix du système de coordonnées. Ce n'est pas le cas pour les modes vectoriel et scalaire. Cependant, nous pouvons définir une combinaison de ces modes qui sont invariants par jauge. Pour les modes scalaires, on définit

$$\Phi = A + B - \dot{E}, \quad \Psi = -C,$$

et pour les modes vectoriels $V_i = \dot{E}_i - B_i$.

Nous avons donc défini 2 quantifications scalaires et 1 quantité vectorielle (2 degrés de liberté) qui sont invariantes de jauge. Tous ensemble, nous avons donc 6 + 10 = 16 degrés de liberté, une fois absorbés les 4 degrés de liberté arbitraires liés au choix de la jauge.

1.5.2 Des ondes gravitationnelles dans un espace-temps vide

1.5.2.1 Équations de propagation

Pour les modes scalaires, les équations d'Einstein $G_{\mu\nu} = 0$, impliquent que $A'' = 0$ (composante 00), $\dot{B} = 0$ (composante 0z) et $\dot{\Phi} = 0$ (COMPOSANTE ij). Le seul habitué la solution des deux premières équations est $\Phi = 0$ et donc

$$\Phi = 0,$$

ce qui signifie qu'aucun mode scalaire ne peut se propager.

Pour les modes vectoriels, la composante O_i implique que $A' = 0$, dont la seule solution régulière est $T = 0$. Tout comme pour les modes scalaires, aucun mode vectoriel ne peut se propager.

* Au premier ordre dans $\mathcal{C}$, $h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} + \delta h_{\mu\nu}$ et il suffit d'évaluer $\delta g_{\mu\nu} = 2T_{\mu\nu} - 2d_{\mu\nu} L$. $\delta g_{\mu\nu} = 2T_{\mu\nu} - 2d_{\mu\nu} L$.

La situation est différente pour les modes tensoriels. La composante ij des équations d'Einstein implique que $\bar{D}\bar{E}^{\wedge} = 0$.

Les seules perturbations qui peuvent se propager dans un espace-temps de Minkowski sont les ondes gravitationnelles et elles satisfont

$$\square \bar{E}_{je} = 0, E_i = 0, d, \bar{E}^{ij} = 0. \quad (1.132)$$

Les trois conditions $T = P = \dots = 0$ définissent une classe d'équivalence de jauge. Nous

peut choisir une jauge dans cette famille en imposant certaines conditions sur les perturbations A, B, C, E et $B^{\wedge}E_i$. Par exemple, en définissant $E = B = 0$ et $E_t = 0$, nous définissons ce qu'on appelle une jauge transversale et sans trace (TT) dans laquelle la métrique est complètement

1.5.2.2 Plane waves

Let us consider a plane wave propagating along the axis Oz in the TT gauge. Since the wave is transverse and traceless, it satisfies $h_{zz}^{(TT)} = h_{zx}^{(TT)} = h_{zy}^{(TT)} = 0$. Therefore, it has only two degrees of freedom (two polarizations) that should satisfy $h_{xx}^{(TT)} = -h_{yy}^{(TT)}$ and $h_{xy} = h_{yx}$. We hence can décomposé it as follows = $E_+(ct$

$$-z)e^{+} + (ci -$$

determined. In this case, the only non-vanishing component of $h_{\mu\nu}^{(TT)}$ is $\bar{E}_{ij}$
les deux tenseurs de polarisation étant définis par

$$\varepsilon_{ij}^{+} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 100, \quad \varepsilon_{ij}^{\times} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times 0$$

La solution de l'équation de propagation est $E_{+}/x = A_{+}/x \cos[fc(z - et)]$ où ip est une

1.5.2.3 Mouvement d'une particule d'essai

Considérons l'équation géodésie d'une particule test dans le champ gravitationnel d'une onde gravitationnelle dans la jauge TT. Puisque pour l'ordre dominant en perturbation nous avons $FQ_0 = 0$, une particule initialement au repos restera au repos.

Bien sûr, cela ne signifie pas que rien ne se passe, mais plutôt que le cadre de référence évolue avec la particule test. Pour voir si quelque chose se produit, nous devrions examiner le mouvement relatif de deux particules voisines, ce qui peut être fait en utilisant l'équation de déviation géodésie (1.118). L'accélération relative est donnée par $a^{\wedge} = -R^{ij} P_{ij} u^L u^p u^a$. En premier ordre dans u/c , on a $a = (1, 0)$ et $n^{\wedge 2} = (0, n^i)$ ($R^{\wedge}OjO =$

$j \ 2 \ \$o \ \grave{c}a$

$$\frac{d^2 n^i}{dt^2} = \frac{1}{2} \partial_t^2 h_j^{(TT)i} n^j.$$

Substituting the expression for $h_{ij}^{(TT)}$ from the previous section, we can easily integrate cette expression. La figure 1.9 illustre la déformation d'un anneau de particules sous l'influence d'une onde plane gravitationnelle se propageant le long de l'axe z pour chaque cas de polarisation.

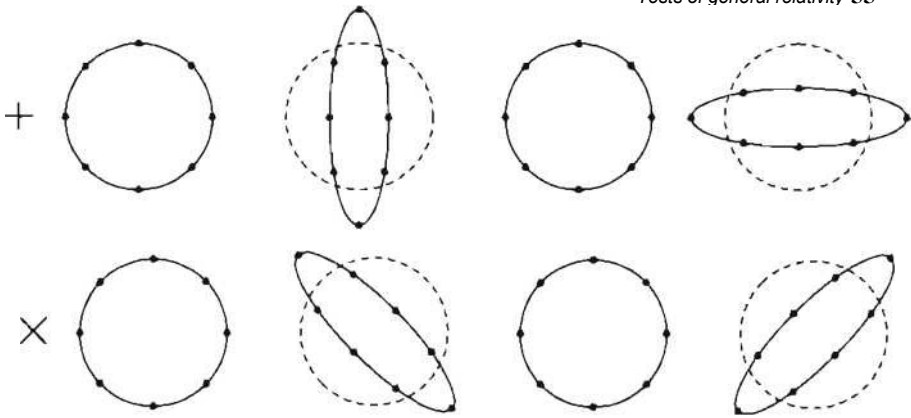


Fig. 1.9 Effets d'une gravitationale onde plane se propageant le long de l'axe z sur un anneau de particules situé dans le plan xy , en fonction de la polarisation de l'onde. Les quatre instantanés sont paramétrés par la période T correspondant à une onde gravitationnelle de longueur d'onde λ .

1.6 Tests de relativité générale

Les modèles cosmologiques que nous construirons s'appuieront fortement sur l'application de la relativité générale à l'Univers dans son ensemble. Il est donc important de comprendre les limites de validité de notre théorie de la gravitation.

Nous résumons ici les principes des principaux tests de gravitation ; Toutes les contraintes sont résumées dans le tableau à la fin de cette section. Cette question est présentée en détail dans les réf. [8,12,13].

1.6.1 Test du principe d'équivalence

1.6.1.1 Université de foi libre 1

La masse de tout corps provient de différentes contributions (énergie de repos, énergie de liaison électromagnétique ou nucléaire, etc.). Si l'une de ces énergies contribuait différemment à la masse inertielle qu'à la masse gravitationnelle, nous observerions une violation de l'universalité de la chute libre. Pour quantifier cette éventuelle différence, on écrit

$$m_i = m_0 + \sum_j \frac{r_f E_j}{c^2}, \quad (1,133)$$

où pour chaque interaction i , E_j est l'énergie de liaison associée, et r_f est un paramètre de petite dimension qui quantifie l'amplitude de la violation de l'universalité de chute libre associée à cette interaction. L'accélération de tout corps d'essai dans un champ gravitationnel externe est donnée par

$g,$

de sorte que mesurer la différence entre l'accélération de deux corps différents permet de définir le paramètre *Eötvds 17 par*

$$\eta = 2 \frac{|a_1 - a_2|}{|a_1 + a_2|} = \sum_i \eta^i \left(\frac{E^i}{m_1 c^2} \Big|_1 - \frac{E^i}{m_1 c^2} \Big|_2 \right), \tag{1.134}$$

to leading order in η^i . Two methods have mainly been used to constrain the value of the parameter η^i :

- 1. The first method uses the period T of a pendulum of length L ,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{m_G}} \sqrt{\frac{L}{g}},$$

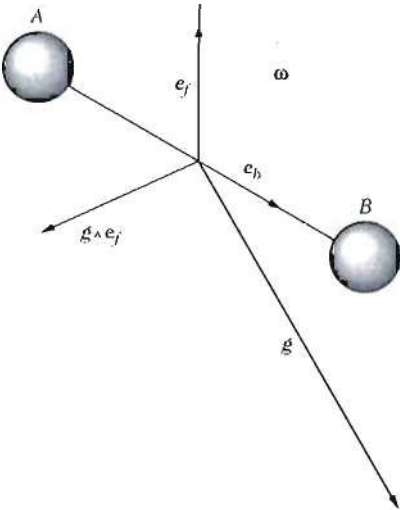


Fig. 1.10 Principle of Eötvös balance, g is the external gravitational field and ω is the angular velocity of the measurement device. The unit vectors e_f and e_b are, respectively, parallel to the torsion fibre and to AB .

de sorte que

2. La deuxième méthode utilise une balance de torsion (voir Fig. 1.10). Deux objets de compositions différentes, A et B, sont fixés à l'extrémité d'une poutre horizontale de longueur $2L$ suspendue à une fibre de torsion. Le balancier a une vitesse angulaire ω , provenant par exemple de la rotation de la Terre ; la force sur chaque masse est donc où c est l'accélération centrifuge. On peut conclure de cette expression que la tension du fil est $\mathbf{T} = F_A + F_a$ et que le couple appliqué sur la fibre de torsion est $M = L\omega \wedge (F_B - F_A)$. Il existe donc un couple M dirigé dans le même sens que la tension. En effectuant le produit scalaire $M \cdot T$, on obtient que

Cet appareil a été inventé par le baron Roland von Eötvös (voir Réf. [14]). Dans l'expérience originale, g correspondait à la gravité terrestre et la rotation était celle de la Terre.

Le pendule et la balance de torsion peuvent tester le principe d'équivalence faible car l'énergie de liaison gravitationnelle des objets testés est négligeable par rapport aux autres énergies. Afin de tester le principe d'équivalence forte, nous devons considérer des objets avec une énergie de liaison gravitationnelle importante tels que les objets célestes. Cela peut être fait en comparant le mouvement relatif de la Terre et de la Lune dans le champ gravitationnel du Soleil. Il y a donc une accélération supplémentaire avec l'expression

$$\delta \mathbf{a} = \frac{G_N M_\odot}{R^2} \eta \quad \left(\mathbf{f}'(\text{grav}) \right)_{\text{oon}} \mathbf{e}_r$$

où $\mathbf{e}_r$ est un vecteur unitaire dirigé du Soleil vers la Terre et R le rayon du Orbite terrestre. Cela implique que l'orbite de la Lune autour de la Terre est polarisée dans la direction du Soleil, avec une amplitude maximale

$$\frac{3\mathcal{E}_a}{\wedge(\wedge^{\text{UEarth}}\wedge^{\text{UMoon}})}$$

En négligeant l'énergie gravitationnelle de la Lune comparée à celle de la Terre, qui est considérée comme une masse homogène de rayon R et de masse m , il s'ensuit que $\mathcal{E}^{\wedge^{\text{grav}}}\wedge^{\text{rnz}}/2 = -3Gm/5Rr$? . Un calcul plus précis donne $\mathcal{E}^{\wedge^{\text{g}}}\wedge^{\text{av}}\wedge^{\text{mc}}/2 =$

-4.6×10^{-10} for the Earth and -0.2×10^{-10} for the Moon, from which we conclude that

$$\delta a < 2,6 \times 10^{-12} r^2 m \cdot s^{-2}$$

Ces mesures ont été rendues possibles, principalement grâce à l'expérience Lunar Laser Ranging (LLR) qui a mesuré la position de la Lune par rapport à la Terre avec une précision de 1 cm pendant une trentaine d'années.

1.6.1.2 Invariance locale de Lorentz

Il existe peu de tests propres de l'invariance locale de Lorentz. En particulier, de nombreux tests à haute énergie ne peuvent généralement pas distinguer les effets spécifiques de la rupture d'invariance de Lorentz des complications dues aux interactions faibles et fortes.

La meilleure contrainte est celle obtenue par l'expérience de Hughes-Drever [15]. L'expérience observe l'état fondamental du lithium-7, de nombre quantique $J = 3/2$. En

présence d'un champ magnétique, cet état se divise en quatre niveaux également espacés. Toute perturbation associée à l'existence d'une direction privilégiée, modifierait l'espacement entre les niveaux. Ceci fixe une limite sur l'anisotropie potentielle de la masse inertielle δm du noyau de lithium qui peut être paramétrée comme

$$\frac{\delta m}{m} = \frac{1}{2} \gamma_A \frac{E_A}{mc^2} \quad (1,135)$$

où γ_A est un paramètre sans dimension qui caractérise l'amplitude de l'anisotropie induite par l'interaction A avec l'énergie de liaison E_A . Dans l'expérience avec le lithium-7, on obtient $|\gamma_A| < 1,7 \times 10^{-16}$.

1.6.1.3 Invariance de position locale

Le premier test d'invariance de position locale est lié à l'effet Einstein, c'est-à-dire au fait que les quais avancent plus lentement en présence d'un champ gravitationnel. Considérons une transition atomique au point A émettant un photon vers un observateur situé en B . D'après les sections précédentes, le photon est reçu avec un redshift $(1 - \frac{1}{2} \gamma_A) = \frac{s_B}{s_A}$ ce qui implique que

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{\Delta \phi}{c^2}$$

où est le potentiel gravitationnel. S'il existe une dépendance spatiale, cette relation ne devrait plus être valable. On s'attendrait donc

$$z = (1 + \frac{\gamma_A}{2}) \quad (1,136)$$

où γ_A est un paramètre qui disparaît en relativité générale. Plusieurs expériences ont été réalisées pour mesurer le redshift, soit en envoyant des docks atomiques en orbite, soit en observant des spectres solaires.

Une autre méthode consiste à tester la variation des constantes fondamentales. De nombreux tests ont été effectués principalement sur la constante de structure fine, sur le rapport de masse des électrons sur les protons et sur la constante gravitationnelle. Ces expériences vont des échelles locales jusqu'aux débuts de l'Univers. Nous reviendrons sur ces tests dans des chapitres ultérieurs (voir aussi la revue Réf. [16]).

1.6.1.4 Cinquième force

Pour finir, nous signalons des tests sur la présence potentielle d'une cinquième force. Dans ces expériences, le potentiel gravitationnel est supposé être modifié par un potentiel de Yukawa de portée A .

$$y = \frac{1}{1 + 0.12e^{-\lambda}} \quad (W7)$$

où λ caractérise l'amplitude de la déviation. Les contraintes sur le couple (λ, A) sont résumées sur la Fig. 1.11. En laboratoire, des expériences utilisant des balances Cavendish permettent de tester la loi de Newton jusqu'à une centaine de micromètres [17]. Les contraintes remontent à des échelles de l'ordre de la taille du système solaire en étudiant le mouvement des objets célestes.

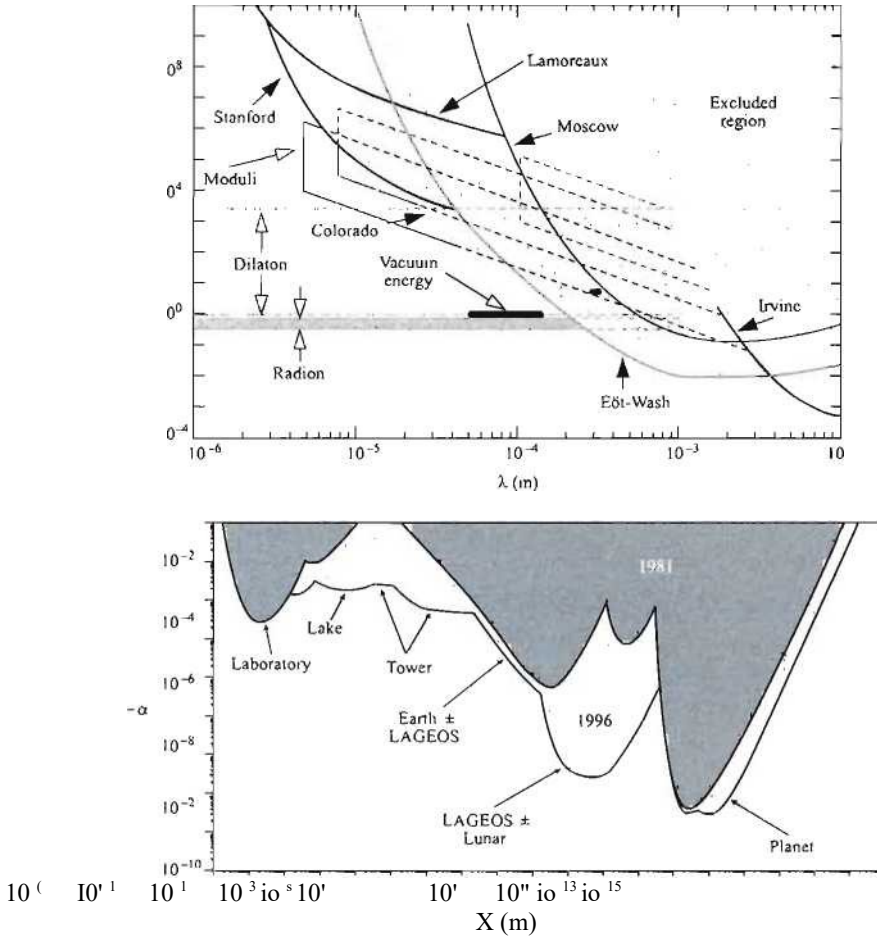


Fig. 1.11 Contraintes sur l'existence d'une cinquième force dérivant d'un potentiel de Yukawa. Le paramètre α représente le paramètre λ de (1.137), que nous supposons identique pour tous les corps. Le graphique du bas représente un zoom sur les plus petites échelles testées. Le diagramme présente les déviations attendues des modèles Sony, comme la présence de dimensions supplémentaires, d'axions ou de dilatons, etc... Ces différents modèles seront présentés dans les chapitres ultérieurs de cet ouvrage (citation de Réf. [18]).

1.6.2 Tests dans le système solaire

Nous allons maintenant nous concentrer sur les tests de la structure géométrique de l'espace-temps et des équations d'Einstein. Ces tests s'appuient principalement sur l'étude des géodésiques du système solaire. Nous nous concentrerons sur le cas de l'espace-temps de Schwarzschild qui décrit la métrique générée par un corps massif. On peut cependant souligner que de nombreux tests modernes (comme les expériences LLR, LAGEOS ou GPB), ne peuvent être décrits qu'avec une métrique de corps 7V, c'est à dire au-delà de la métrique de Schwarzschild, ce qui sort du cadre de cet ouvrage (voir Refs. [1—4] pour plus de détails).

1.6.2.1 Espace-temps de Schwarzschild

L'espace-temps dans le système solaire peut être décrit par une solution statique à symétrie sphérique de la forme

$$ds^2 = -e^{2\alpha} dt^2 + e^{2\beta} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (1.138)$$

avec $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$. La solution des équations d'Einstein avec une source de masse M localisée à l'origine est la solution de Schwarzschild dont la forme explicite est

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (1.139)$$

La plupart des tests dans le système solaire reposent sur l'étude des géodésiques de cette métrique.

1.6.2.2 Extension

Pour être plus général et pouvoir tester à la fois la structure géométrique de l'espace et les équations de champ, nous travaillerons dans l'approximation en champ faible ($GM/c^2 r \ll 1$, qui est justifiée puisque $GM_\odot/c^2 = 1,4 \times 10^{-3}$ m pour le Soleil). Nous supposons que la métrique est de la forme

$$ds^2 = -\left[1 - 2\frac{G_N M}{c^2 r} + 2(\beta^{\text{PPN}} - \gamma^{\text{PPN}}) \frac{G_N^2 M^2}{c^4 r^2}\right] dt^2 + \left(1 + 2\gamma^{\text{PPN}} \frac{G_N M}{c^2 r}\right) dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (1.140)$$

From the field equations of motion of general relativity and using (1.139), we get that $\gamma^{\text{PPN}} = 1$, but there is a priori no reason for this to be the case within another metric theory of gravity.

1.6.2.3 Flexion légère

L'étude de nul! les géodésiques peuvent être pétformées directement sous la forme générale (1.138). Par symétrie, on peut choisir de se concentrer sur les solutions qui se trouvent dans le plan $\theta = \pi/2$. La trajectoire se réduit alors à $\{t(\dot{A}), r(\dot{A}), \phi(\dot{A})\}$. Puisque l'espace-temps est statique et possède une symétrie sphérique, il doit y avoir deux constantes de mouvement. Celui associé à l'invariance par translation temporelle est identifié à l'énergie $E = u_\mu \dot{x}^\mu$,

tandis que le second, associé à l'invariance de rotation du moment cinétique, est $L = u^\# = g^{\lambda\mu} p_\mu / d\lambda$. Nous avons donc

$$\frac{dt}{d\lambda} = E e^{-\mu(r)} \quad r^2 \frac{d\varphi}{d\lambda} = L$$

Pour une géodésie nulle, on a aussi la condition supplémentaire $k^\lambda k_\lambda = 0$, que l'on peut écrire sous la forme

$$e^{-\mu(r)} \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 = e^{\nu(r)} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{d\lambda} \right)^2$$

En utilisant les constantes (1.141), on peut en déduire que l'équation de la trajectoire est

$$\left(\frac{dr}{r^2 d\varphi} \right)^2 = \left(\frac{E}{L} \right)^2 e^{-\nu(r) - \mu(r)} - \frac{e^{-\nu(r)}}{r^2} \quad (1.142)$$

Les fonctions $\mu(r)$ et $\nu(r)$ peuvent être identifiées aux termes correspondants dans (1.140). Après avoir introduit $y = G^{\text{PPN}} M / c^2 r$ et $b = L/E$, on a donc

$$\frac{A}{dr^2} + y = 3\gamma^{\text{PPN}} y^2 + (1 - \gamma^{\text{PPN}}) \frac{G_N^2 M^2}{b^2 c^4}.$$

Au second ordre dans M/bc , la solution de cette équation est donnée par la relation $y \sim (G_N M/bc) \sin \theta + (G_N M/bc) (1 + \gamma^{\text{PPN}} \cos^2 \theta)$ pour que le point le plus proche du corps central est CQ — $b[1 - (G_N M/6c)]$ (voir F* g- 112). Dans la limite $r \rightarrow \infty$, on obtient $y \rightarrow 0 = \text{TT 4-}$ $(1 - \gamma^{\text{PPN}})(G_N M/6c)$ ou $y \rightarrow 0 = (1 - \gamma^{\text{PPN}})(G_N M/bc)$. L'angle de courbure, $\Delta\theta = \theta_+ - \theta_-$, est alors

$$\Delta\theta = 2(1 + \gamma^{\text{PPN}}) \frac{G_N M}{b c^2} \quad (1.143)$$

qui se réduit à $\Delta\theta = 1,75''(1 + \gamma^{\text{PPN}})/2$ lorsque $r_0 = R_Q$.

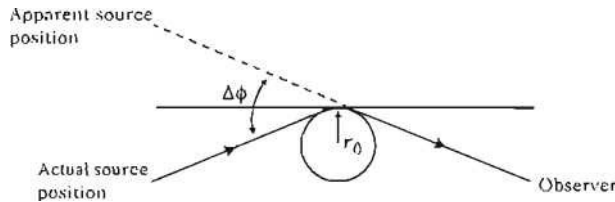


Fig. 1.12 Geometry of the trajectory of a photon deflected by a massive body.

1.6.2.4 Effet Shapiro

L'effet Shapiro, découvert en 1964, est un délai anormal au cours duquel des ondes électromagnétiques sont émises depuis la Terre et réfléchies par un satellite ou une planète. En utilisant les 11 équations géodésiques dérivées de la section précédente, nous obtenons

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = - \frac{GM}{r^2} \left(1 - \frac{2\gamma^{\text{PPN}}}{c^2} \frac{GM}{r} \right)$$

le temps coordonné qu'un photon met pour passer de r à r_0 est donc

$$t(r, r_0) = \int_r^{r_0} \sqrt{\frac{e^{\nu(r)} - \mu(r)}{1 - e^{\mu(r)} b^2 / r^2}} dr.$$

Intégrant cette expression de r_0 à r , on a, back and forth, we get that the rate of change of the proper time of the trajectory

$$= -(1 + 7 \gamma^{\text{PPN}}) (e - b'' \square T) \quad (1.144)$$

en supposant $r_0 \sim 7 \times 10^8 \text{ m}$.

1.6.2.5 Précession du périhélie de Mercure

Les trajectoires des planètes sont obtenues à l'aide de géodésiques temporelles, telles que

$$e \sim \frac{1}{2} \frac{M}{r} \left(\frac{1}{1 - e^2} \right) \left(\frac{1}{1 - e^2} \right)$$

En introduisant $y = 1/r$ et en négligeant les termes d'ordre $(G_N M / r c^2)^2$, on peut intégrer cette équation pour obtenir la solution approchée

$$\frac{G^2 M^2}{N}$$

où e est l'excentricité. A chaque orbite, le périhélie avance de

$$\Delta \varphi = 2\pi \left(2 + 2 \gamma^{\text{PPN}} - \frac{1}{3} \beta^{\text{PPN}} \right) \frac{1}{1 - e^2} + 2 \gamma^{\text{PPN}} - \frac{1}{3} \beta^{\text{PPN}}. \quad (1.145)$$

Pour Mercure, nous obtenons $42,98''$ par siècle si $\gamma^{\text{PPN}} = 1/3$ ce qui est cohérent avec les observations.

1.6.2.6 Résumé

Les tests effectués en laboratoire et dans le système solaire donnent un point de départ à la violation du principe d'équivalence et aux écarts par rapport à la théorie de la relativité générale. Nous n'avons présenté ici que certains de ces paramètres, mais le formalisme *post-newtonien paramétré* (PPN) met en jeu d'autres paramètres qui dépassent la théorie purement newtonienne. Ce formalisme a été développé afin de prendre en compte toutes sortes de déviations possibles. Le tableau suivant et la Fig. 1.13 donnent un résumé des principales contraintes obtenues dans le système solaire (voir Réf. [12] pour plus de détails).

1.6.3 Rayonnement gravitationnel

Tout comme tout objet chargé émet des ondes électromagnétiques, un corps massif peut émettre des ondes gravitationnelles. Dans ce qui suit, nous passons en revue les propriétés de ce rayonnement, sans apporter aucune preuve. L'existence et les propriétés des ondes gravitationnelles peuvent être utilisées pour tester la théorie de la relativité générale.

Tableau 1.1 Contraintes du système solaire sur les paramètres post-newtoniens.

Paramètres	Contraintes	Détails	Référence
77 (faible)	10^{-3} 5×10^{-10} $(-1,9 \pm 2,5) \times 10^{-12}$ $5,5 \times 10^{-11}$	Pendule Équilibre de torsion Équilibre de torsion (Be-Cu) Équilibre de torsion (Terre-Lune)	Newton (1686) [14] [19] [20]
r_l (fort)	$(1 \pm 15) \times 10^{-3}$	LLR	[21]
C_i	10^{-4} 2×10^{-4}	Photon émis (effet Mossbauer) H-Maser en orbite	[22] [23]
P_i	$1,7 \times 10^{16}$ eV 10^{23} 10^{-22} 5×10^{-18}	Lithium Forte interaction Interaction électromagnétique Faible interaction	[15]

Le rayonnement provient donc du quadripôle de la distribution de matière, et il n'y a pas de

1.6.3.1 Radiation of gravitational waves

The gravitational radiation emitted by an object is given by

$$L_{TT} = \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{G}{c^4} \right) \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{Q_{ij}}{r} \right) \quad (K)'_c /$$

where $P_{ij}(n) = (5_{ik} - n_{ik})(6_{jl} - n_{kl})$ is the quadrupole of the mass distribution and where Q_{ij}

$$Q_{ij}(t) = \int d^3x \rho(x) x_i x_j$$

contribution monopôle (du fait de la conservation de masse) ni dipolaire (du principe d'équivalence). La puissance totale du rayonnement est donnée par la formule quadripolaire d'Einstein

$$\frac{dE}{dt} = \frac{c^5}{32\pi G} \int d\Omega \left(\frac{dQ_{ij}}{dt} \right)^2$$

1.6.3.2 Pulsar binaire PSR 1913+16

Découvert en 1974 by Taylor et Hulse, ce pulsar a permis de tester la formule du rayonnement gravitationnel et de prouver l'existence du rayonnement gravitationnel. En utilisant la loi de Kepler, on peut montrer que si l'énergie du système binaire diminue, sa période doit alors augmenter à mesure que l'énergie du système binaire diminue.

$$\frac{dP}{dt} = - \frac{192\pi}{5c^2} \frac{G^3}{P^2} \frac{m_1 m_2 (1 + 73e^2/24 + 37e^4/96)}{(1 - e^2)^{7/2}}$$

où m_1 et m_2 sont les deux masses et e est l'excentricité. Pour le pulsar PSR 1913+16, $m_1 = 1,44A7\odot$ et $m_2 = 1,38MQ$, $e = 0,617$ et $P = 7$ h 40min donc que

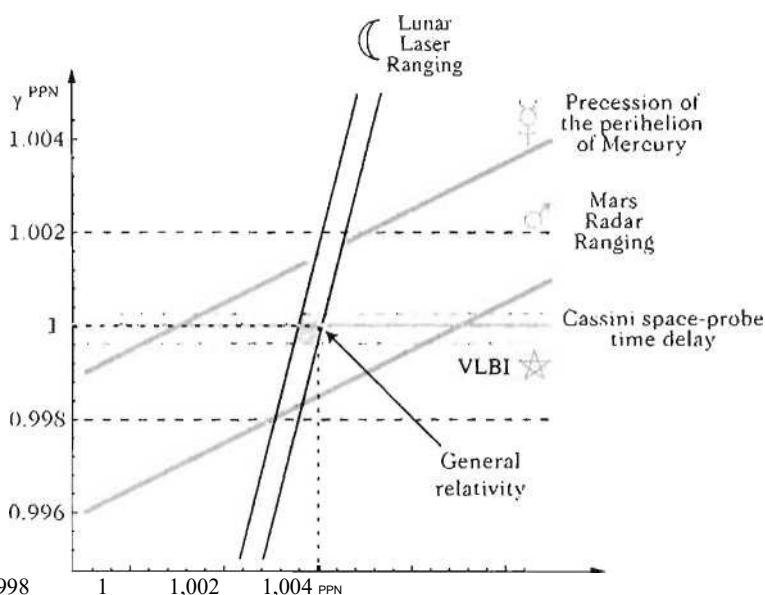


Fig. 1.13 Résumé des contraintes sur les paramètres post-newtoniens dans le système solaire. Les contraintes actuelles sont $|2\gamma^{\text{PPN}} - 3\beta^{\text{PPN}} - 1| < 3 \times 10^{-3}$ forment la précession des périhéliori de Mercure, $4\hat{\gamma}^{\text{PPN}} - \gamma^{\text{PPN}} - 3 = (-0,7 \pm 1) \times 10^{-3}$ de l'expérience Lunar laser range (LLR), $|\gamma^{\text{PPN}} - 1| < 4 \times 10^{-4}$ de la courbure de la lumière (VLBI : Very Long Baseline Interferometer) et $|\gamma^{\text{PPN}} - 1| = (2,1 \pm 2,3) \times 10^{-5}$ à partir de la mesure du retard du signal de la sonde spatiale Cassini.

$(dP/dt) = -2,4 \times 10^{-12}$. On peut noter cependant qu'il existe un écart réel de 14 a entre la diminution observée et la prédiction théorique. En effet, il faut prendre en compte l'effet Doppler provenant de l'accélération du pulsar vers le centre de la Galaxie. Les travaux théoriques de la Réf. [24] ont permis de calculer les équations du mouvement jusqu'à l'ordre v^5/c^5 et ont conduit à des idées sur la manière de tester la relativité générale dans la limite des champs forts [25] (voir Réf. [26] pour une revue). Ils prouvent également que la gravité se propage à la vitesse de la lumière.

1.6.3.3 Détection directe

De nombreuses expériences sont aujourd'hui en cours pour détecter les ondes gravitationnelles, soit par interférométrie (LIGO, VIRGO, LISA,...) soit à l'aide de barres de Weber (voir Réf. [27] pour une revue).

Afin de comprendre à quel point il est difficile de les détecter, donnons une estimation de l'amplitude des ondes gravitationnelles. Considérons pour cela une barre de longueur L et de masse M tournant avec une vitesse angulaire ω . L'amplitude caractéristique du quadripôle est $Q = ML^2$, de sorte que $d^4Q/dt^4 \sim ML^2 \omega^4$. On a donc une amplitude typique

$$h \sim \frac{1}{c^4 r} \frac{d^4 Q}{dt^4} \sim \frac{GM^2 L^4 \omega^6}{c^5 r}$$

Pour un. Masse de 500 tonnes et barre de 20 m de long tournant à 5 rad/s. on obtient $h \sim 10^{-38}$ à 50 m, et $dE/dt \sim 10^{-32}$ W ! Le rayonnement des objets ordinaires est donc indétectable. Pour un système binaire de masse typique avec une orbite de 10^6 km et une orbitale période d'ordre 10 h, on obtient $dE/dt \sim 10^{22}$ W. Cette puissance peut même être augmentée et atteindre une valeur typique de $dE/dt \sim c^5/GN \sim 3,6 \times 10^{52}$ W pour une source ultrarelativiste.

1.6.4 Nécessité de tests aux échelles astrophysiques

La plupart des tests présentés ! ont ici une échelle caractéristique de l'ordre de la taille du Système Solaire ou tout au plus de la taille de notre Galaxie pour les pulsars binaires. En cosmologie, on extrapolera la loi de la gravitation à l'Univers lui-même. Cette extrapolation nécessite quelques vérifications que nous présenterons en détail dans la suite de cet ouvrage. Rappelons néanmoins quelques faits qu'il convient de garder à l'esprit (voir Réf. [28] pour plus de détails) :

1. Aux échelles des galaxies, les courbes de rotation indiquent que le potentiel gravitationnel va comme $d > 0$ ou $\ln r$ à grande échelle. Ce comportement s'explique généralement par la présence de matière noire, qui n'a pas encore été détectée. Au-delà d'une échelle donnée, tout se passe effectivement comme si la gravité avait un comportement bidimensionnel. L'étude des courbes de rotation montre cependant que si une telle transition existait, cette échelle devrait dépendre de la masse de la galaxie (voir chapitre 7 pour plus de détails sur ces relations).
2. Pour les amas de galaxies d'environ 2 Mpc, les effets de la lentille gravitationnelle, qui mesure le potentiel gravitationnel de la courbure de la lumière, et de l'émission de rayons X, qui retrace la température du gaz, peuvent être comparés. Cette comparaison a montré que l'équation de Poisson est valable jusqu'à un facteur 2. Elle fournit donc un test de relativité générale (testant à la fois la déviation de la lumière et les équations d'Einstein dans la limite du champ faible).
3. Aux échelles astrophysiques et cosmologiques, il n'existe aucun test direct de la loi de la gravité. La croissance de la structure à grande échelle de l'Univers constitue un test, mais elle mélange les propriétés de la gravité avec celles de la matière. Pour que la théorie soit cohérente avec les observations, la matière noire doit être présente.
4. La récente expansion accélérée de l'Univers observée (voir chapitre 4) ne peut pas être expliquée dans le cadre de la relativité générale avec la matière ordinaire (entre autres conditions, la matière à pression positive ; cela découle de l'équation de Raychaudhuri). Cette observation s'explique soit par la matière exotique (certaines candidates comme la constante cosmologique, la quintessence,, ,seront décrites au chapitre 12) soit par la modification des lois de la gravité à grande échelle.
5. Deux tests sont actuellement proposés. D'une part, le principe d'équivalence d'Einstein peut être testé en vérifiant la constante des « constantes de la nature » à grande échelle. En revanche, la loi de Poisson peut être testée jusqu'à des échelles de la centaine de mégaparsecs, en comparant la distribution de matière dans les catalogues de galaxies avec la faible lentille des structures à grande échelle (voir Réf. [29]).

Cela montre l'importance de tester la gravité soit pour valider l'approche standard qui ajoute de nouveaux secteurs de matière exotique (matière noire, énergie noire), soit pour donner de nouvelles explications sur l'Univers. Nous reviendrons sur toutes ces questions au chapitre

Les références

- [1] R. HAKIM, *Une introduction à la gravitation relativiste*, Cambridge University Press, 1999.
- [2] H. STEPHANI, *Relativité générale*, Cambridge University Press, 1990.
- [3] S. WEINBERG, *Gravitation et cosmologie*, John Willey and Sons, 1972.
- [4] R. WALD, *Relativité générale*, Chicago University Press, 1984.
- [5] L. LANDAU et E. LIFSCHITZ, *Cours de physique théorique*, Volume 2, Pergamon Press, 1976.
- [6] JD JACKSON, *Électrodynamique classique*, Wiley, 1998.
- [7] J. EISENSTAEDT, *Einstein et la relativité générale*, CNRS Éditions, 2003.
- [8] CM WILL, *Théorie et expériences en physique gravitationnelle*, Cambridge University - Press, 1984.
- [9] GFR ELLIS, « Cosmologie relativiste », dans *Proc. Aéroport international. École de physique 'Enrico Fermi'*, Corso XLVII, RK Sachs (éd.), pp. 104-179, Academie Press, 1971.
- [10] SW HAWKING et GFR ELLIS, *La structure à grande échelle de l'espace-temps*, Cambridge University Press, 1973.
- {II} J. BARDEEN, 'Gauge-in variantes cosmological perturbations', *Phys. Rev.D* **22**, 1882, 1981.
- [12] CM WILL, « La confrontation entre relativité générale et expérience », *Living Rev. Relativity* **4**, 4, 2001.
- [13] L CTUFOLINI et JA WHEELER, *Gravitation et inertie*, Princeton University Press, 1995.
- [14] RV EÔTVÔS, V. PEKAR et E. FEKETE, 'Contributions à la loi de proportionnalité de l'inertie et de la gravité', *Ann. Physique* **68**, 11, 1922.
- [15] VW HUGHES *et al.*, « Limite supérieure de l'anisotropie de la masse inertielle issue d'expériences de résonance nucléaire », *Phys. Le révérend Lett.* **4**, 342, 1960 ; RW DREVER, « Une recherche de l'anisotropie de la masse inertielle à l'aide d'une technique de précession libre », *Phil. Mag.* **6**, 683, 1961.
- [16] JP UZAN, « Les constantes fondamentales et leur variation : statut observationnel et théorique », *Rev. Mod. Phys.* **75**, 403, 2003.
- [17] E. FISCHBACH et C. TALMADGE, « Dix ans de la cinquième force », dans *Matière noire en cosmologie, mesures quantiques, gravitation expérimentale*, Actes Moriond, 443 (1996), arXiv : hep-ph/9606249 ; E. ADELBERGER, B. HECKEL et A. NELSON, « Tests de la loi gravitationnelle du carré inverse », *Ann. Révérend Nue. Phys.* **53**, 77, 2003.
- [18] CD HOYLE *et al.*, « Tests sub-millimétriques de la loi gravitationnelle du carré inverse », *Phys. Rev. D* **70**, 042004, 2004.
- [19] Y. Su *et al.*, « Nouveaux tests de l'universalité de la chute libre », *Phys. Rev.D* **50**, 3614, 1994.

Références 67

- [20] S. BAESSLER *et al.*, « Test amélioré du principe d'équivalence pour l'auto-énergie gravitationnelle », *Phys. Tour. Lett.* **83**, 3585, 1999,
- [21] JO DICKEY *et al.*, « Télémétrie laser lunaire : un héritage continu du programme Apollo », *Science* **265**, 482, 1994.
- [22] RV POUND et GA REBKA, « Poids apparent des photons », *Phys. Le révérend Lett.* **4**,

337, 1960.

- [23] R. VESSOT et M. DEVINE, 'Un test du principe d'équivalence à l'aide d'une horloge spatiale', *J. Gen. Rel. Grav.* **10**, 181, 1979.
- [24] T. DAMOUR et N. DERUELLE, 'Mécanique céleste relativiste générale des systèmes binaires', *Ann. Inst. H. Poincaré* **43**, 107, 1985 ; **44**, 263, 1986.
- [25] T. DAMOUR et JH TAYLOR, « Tests sur le terrain forts de la gravité relativiste et des pulsars binaires », *Phys. Rév.D* **45**, 1840, 1992.
- [26] IH STAIRS, « Test de la relativité avec le timing des pulsars », *Living Rev. Relativity* **5**, 1, 2003.
- [27] I. BLAIR, « Détection des ondes gravitationnelles », *Rep. Prog. Phys.* **63**, 1317, 2000.
- [28] J.-P. UZAN, 'Tests de gravité à grande échelle et variation des constantes', *Int. J. Théor. Phys.* **42**, 1163, 2003.
- [29] J.-P. UZAN et F. BERNARDEAU, « Lentilles aux échelles cosmologiques : un test de gravité dimensionnelle supérieure », *Phys. Rév. D* **64**, 083004, 2000.

2

Aperçu de la physique des particules et du modèle standard

Bien que la gravité structure l'espace-temps à grande échelle, de nombreux processus physiques reposent sur la description de trois autres interactions, à savoir l'électromagnétisme, les forces nucléaires faibles et fortes. Ce chapitre est consacré à la description de ces interactions et des particules sur lesquelles elles agissent. Ce *modèle standard de la physique des particules* décrit la matière ordinaire, telle qu'observée en laboratoire. Nous verrons plus tard que les observations cosmologiques concernant l'existence de la matière noire appellent à étendre ce cadre. Il est donc nécessaire de le présenter en détail. Pour cela, nous travaillerons dans ce chapitre dans un espace-temps fiat.

La section 2.1 rappelle les bases de la mécanique analytique et les étapes de la mécanique classique à la mécanique quantique. La section 2.2 se concentre ensuite sur le cas particulier d'un champ scalaire. Étant le modèle prototype le plus simple, le champ scalaire libre ou à interaction automatique illustre de manière complète ce qui peut être appris de la théorie quantique des champs.

Les sections suivantes donnent un aperçu général du modèle standard de la physique des particules. La section 2.3 présente le spectre des particules détectées dans les accélérateurs, et la section 2.4 décrit comment, en s'appuyant sur la notion de symétrie, une classification peut être esquissée. Le mécanisme de Higgs sera ensuite décrit dans la section 2.5. L'application de ce mécanisme aux interactions électrofaibles permettra d'obtenir le modèle standard de physique des particules, présenté dans la section 2.6. Enfin, la section 2.7 présente une étude des symétries discrètes, suivie d'un aperçu de l'état actuel de ce modèle standard.

Les idées présentées dans ce chapitre seront utilisées à plusieurs reprises dans le reste du livre. Par exemple, les aspects de quantification et en particulier ceux des champs scalaires seront au centre de notre discussion sur l'inflation (chapitre 8), ainsi que lorsque nous aborderons le problème des constantes cosmologiques (chapitre 12) ; la notion de rupture de symétrie joue un rôle crucial dans la formation des défauts topologiques (Chapitre 11) et dans les grandes théories unifiées. Ce chapitre pose donc les bases nécessaires à l'étude de sujets cosmologiquement pertinents comme l'inflation bien sûr, mais aussi les défauts topologiques, l'origine de la matière noire, la baryogenèse, le problème des constantes cosmologiques, etc.

2.1 Du classique au quantique

Cela fait maintenant un peu plus d'un siècle que les principes de la mécanique quantique ont commencé à être utilisés pour décrire les lois de la nature. Cette section résume les étapes de la mécanique analytique classique à la mécanique quantique.

2.1.1 Mécanique classique analytique

Formellement, la mécanique quantique peut être considérée comme une extension de la mécanique classique telle que finalement formalisée, par exemple, par Lagrange dans la seconde moitié du XVIII^e siècle et Hamilton au début du XIX^e siècle. Les lois classiques peuvent être transformées en leurs homologues quantiques en appliquant le *principe de correspondance*.

2.1.1.1 Mécanique classique analytique

L'essence de la mécanique classique (dont tous les détails peuvent être trouvés dans de nombreux ouvrages, dans les Réf. [1, 2] entre autres) peut être résumée par l'existence d'une fonction lagrangienne L à partir de laquelle toute la dynamique d'un Système peut être résumée. dérivé. Pour un ensemble de N particules en interaction, ce lagrangien dépend des coordonnées p ($i = 1, \dots, N$) de ces particules, et de leurs vitesses, $\dot{X}_i$. On fusionne l'ensemble de toutes ces coordonnées, qui ne sont pas forcément cartésiennes, sous la désignation q_i (*coordonnées généralisées*), avec l'indice i variant désormais de 1 à $3N$, et les vitesses généralisées $\dot{q}_i$. La dynamique de ce système peut être obtenue en minimisant l'action

$$S = \int_{t_{\text{initial}}}^{t_{\text{final}}} L[q_i(t), \dot{q}_i(t), t] dt, \quad t_{\text{initial}}, t_{\text{final}} = \text{const.}, \quad (2-1)$$

en supposant que la valeur des coordonnées est fixée à la limite du domaine d'intégration — 0 avec $\delta q_i(t_{\text{final}}) = \delta q_i(t_{\text{initial}}) = 0$. Les équations d'Euler-Lagrange then obtained as

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (2.2)$$

sont

Le premier terme de cette équation met en jeu les quantités $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$ qui sont les *impulsions généralisées*.

Il est possible d'inverser ces relations pour déterminer les vitesses généralisées en termes de coordonnées et d'impulsions. Grâce à une transformation de Legendre, toutes les dynamiques peuvent alors être décrites en changeant les variables et en utilisant les impulsions généralisées au lieu des vitesses. Pour cela, définissons la fonction Hamilton, ou Hamiltonien par

$$H = \sum_{i=1}^{3N} \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \quad (23)$$

ce qui nous permet d'écrire les équations différentielles du second ordre (2.2) comme une équation du premier ordre

System,

$$\dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (2-4)$$

Ce système nous permet d'obtenir facilement la dérivée temporelle de toute grandeur physique en utilisant les *parenthèses de Poisson* définies par

$$\{A, B\} \equiv \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right) \quad (2.5)$$

A et B étant deux quantités dépendant de $\mathbf{p}^*$. En substituant à B l'hamiltonien H dans la définition (2.5), et en utilisant les équations du mouvement (2.4), la dérivée en temps total de A peut facilement être considérée comme étant

Enfin, les parenthèses de Poisson des coordonnées et de l'impulsion satisfont

$$\{A, B\} = -\{B, A\} \quad \text{et} \quad \{p_i, p_j\} = 0 \quad (2.7)$$

Ce formalisme introduit un opérateur antisymétrique entre deux quantités, c'est à dire tel que $\{A, B\} = -\{B, A\}$. Cette propriété va permettre de faire le passage formellement mais très facilement à la description quantique.

2.1.1.2 Fonction à dérivée

La théorie classique des champs, qui peut être illustrée par exemple par la relativité générale, peut être écrite en utilisant le même formalisme que la théorie analytique des particules ponctuelles, si l'on s'appuie sur des fonctionnelles de champ plutôt que sur des fonctions.

Une fonctionnelle $Z[\varphi]$, est définie comme une application d'un espace linéaire normalisé de fonctions, $Z = \langle f(x) | x \in \mathbb{C}$ sur l'ensemble des nombres complexes (ou réels dans certains cas), soit $Z : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$). La dérivée fonctionnelle est alors définie de la même manière que la dérivée partielle pour une fonction à plusieurs variables. Une fonctionnelle peut en effet être comprise comme une fonction à un nombre infini de variables. Sa variation

is

$$\delta Z[f] = \int \frac{\delta Z[f]}{\delta f(x)} \delta f(x) dx$$

infinitésimale

$$(2.8)$$

en introduisant la variable muette x , cela se réduit à une définition similaire à celle de l'analyse normale, c'est-à-dire

$$\delta Z[f] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (Z[f + \epsilon \delta f] - Z[f]) = \int \frac{\delta Z[f]}{\delta f(x)} \delta f(x) dx \quad (2.9)$$

où δ est la distribution de Dirac dans une dimension. Notons que pour tous les calculs, les fonctions sont supposées être intégrables et disparaître assez vite en grand x pour que les termes surfaciques disparaissent dans l'intégration par parties. et la loi de composition fonctionnelle

The two definitions (2.8) and (2.9) are équivalent and can both easily be shown to satisfy the rules required for a dérivative, i.e. the Leibniz rule

$$\frac{\delta}{\delta f(x)} (Z[f] W[f]) = \frac{\delta Z[f]}{\delta f(x)} W[f] + Z[f] \frac{\delta W[f]}{\delta f(x)} \quad (2.10)$$

$$\frac{\delta Z(W[f])}{\delta f(x)} =$$

A partir de la définition (2.9), on peut facilement montrer que

$$\frac{\delta Z(W[f])}{\delta f(x)} = \langle T - y \rangle, \quad (2.12)$$

où la première fonction, $f(x)$, est vue ici comme la fonctionnelle triviale qui mappe toute fonction en elle-même. Nous avons aussi la propriété utile

$$\frac{\delta}{\delta f(x)} \left[\frac{df(x)}{dx} \right] = \frac{d}{dx} \left[\frac{\delta f(x)}{\delta f(x)} \right]$$

où le premier indique une dérivée simple de la fonction par rapport à son argument.

Enfin, il est intéressant de montrer que, du point de vue fonctionnel, une fonction et sa dérivée ne sont pas indépendantes. En choisissant $f(x) = T(\tau)$, et en utilisant la définition (2.8), on trouve que

$$\delta f(x) = J(x) = T(x) \text{ et on peut donc faire}$$

l'identification

$$\frac{\delta f(x)}{\delta f(x)} = \frac{d}{dx} \left[\frac{\delta f(x)}{\delta f(x)} \right]$$

Toutes ces relations peuvent facilement être généralisées à un nombre arbitraire de dimensions. Plus important encore, ils nous permettent d'écrire une théorie classique des champs d'une manière qui ressemble beaucoup à la formulation hamiltonienne d'une particule classique.

2.1.1.3 Lagrangien d'un champ classique

L'équivalent de l'action (2.1) pour un champ scalaire est obtenu à partir d'une densité lagrangienne $\mathcal{L}[\phi(x^\mu)]$, comme

Considérons d'abord L en fonction de x et t . L'utilisation d'une dérivée ordinaire suivie d'une intégration par parties en quatre dimensions donne naissance aux équations d'Euler-Lagrange, équivalentes à (2.2) pour un champ scalaire,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(x^\alpha)} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi(x^\alpha)} \right]. \quad (2.14)$$

Cette relation peut également être obtenue en utilisant une différenciation fonctionnelle, c'est-à-dire en considérant C comme une fonctionnelle du champ et sa dérivée temporelle, de la manière suivante. Les dépendances temporelles et spatiales du Lagrangien peuvent être séparées explicitement avant la variation

où une intégration par parties a été effectuée pour obtenir le deuxième terme. La définition (2.8) de la dérivée fonctionnelle implique alors que

$$SL = J d^3x$$

et donc, par identification, on obtient

$$\text{and} \quad \frac{dC}{d\phi(x,t)} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi(x,t)}$$

En intégrant ces relations par parties, en supposant que la variation à la frontière disparaît, cela se réduit à (2.14).

2.1.1.4 Hamiltonien et Champ Poisson

En partant du Lagrangien (2.13), et en utilisant une approche tout à fait similaire à celle utilisée en mécanique des particules ponctuelles, nous pouvons d'abord définir le champ canoniquement conjugué $\pi(x,t)$, qui est équivalent à l'impulsion généralisée [voir (2.2)], par

$$(2-15)$$

de sorte que l'équation du mouvement est de la même forme que pour les particules ponctuelles, à savoir $\ddot{\phi}(x,t) = \delta \mathcal{H} / \delta \phi(x,t)$.

Afin de généraliser (2.3) au cas du champ scalaire, l'hamiltonien peut s'écrire sous la forme suivante

$$(2-16)$$

ce qui définit donc la densité hamiltonienne, liée à la densité lagrangienne $\mathcal{L}$, par la relation

$$\mathcal{H}(x,t) = \pi(x,t)\dot{\phi}(x,t) - \mathcal{L}(x,t). \quad (2.17)$$

In this formalism, the Euler-Lagrange equations (2.14) get replaced by the set of Hamilton equations ;

$\begin{aligned} & \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \phi} \\ & \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \pi} \end{aligned}$	$\begin{aligned} & \dot{\phi} \\ & \dot{\pi} \end{aligned}$

(2.18)

This system of first-order equations is the equivalent of (2.4) for a scalar field.

La tranche de Poisson de deux fonctionnelles est construite de la même manière que pour deux grandeurs classiques via la simple généralisation de (2.5)

$$\{W(x, t), W(x', t)\} = \{W(x, t), W(x', t)\} = 0, \quad (2.19)$$

Les équations de Hamilton peuvent donc fournir l'évolution temporelle de toute fonctionnelle W par

L'impulsion conjuguée TT et le champ ϕ obéissent aux relations

$$\{T(x, t), T(x', t)\} = \{T(x, t), T(x', t)\} = 0, \quad \{T(x, t), T(x', t)\} = (x - x'), \quad (2.20)$$

ce qui généralise (2.7).

2.1.1.5 Théorème de Nœther et lois de conservation

En 1918, E. Nœther énonce le théorème selon lequel une quantité conservée peut être associée à toute transformation laissant invariante l'action d'une théorie. Plus précisément, ce théorème s'énonce de la manière suivante :

Si l'action d'une théorie donnée est invariante sous les transformations infinitésimales d'un groupe de symétrie, alors il existe autant de quantités conservées (constantes dans le temps) que de transformations infinitésimales associées à ce groupe de symétrie.

De plus, ces quantités conservées peuvent être obtenues à partir de la densité lagrangienne.

A titre d'exemple de ce théorème, ainsi que pour son propre intérêt, citons la conservation de l'énergie qui résulte de l'invariance par translation temporelle des lois de la physique (une invariance, une quantité conservée), ainsi que la conservation de la quantité de mouvement et le moment cinétique, qui résultent respectivement des invariances de translation et de rotation de l'espace-temps. Dans ces deux derniers cas, l'invariance est vectorielle (trois coordonnées pour le vecteur translation, ou trois angles pour la rotation), et la quantité conservée reste de même nature. Toutes ces invariances, habituelles en mécanique classique, découlent de la conservation d'une quantité unique, le tenseur énergie-impulsion. Cette construction peut être généralisée au cas de la relativité générale (Chapitre 1, Section 1.4).

2.1.1.6 Cas des particules ponctuelles classiques

La mécanique classique des particules ponctuelles est complètement décrite en spécifiant un Lagrangien $L(q_i, \dot{q}_i, t)$. Si la physique qui correspond à ce Lagrangien est invariante par translation temporelle, c'est-à-dire telle que le résultat de toute expérience impliquant cette théorie ne dépend pas du moment auquel elle est réalisée, on s'attend alors à ce que

$L(q_i, \dot{q}_i, t) = L(q_i, \dot{q}_i, t_0)$ pour toute heure initiale arbitraire. Cela implique que le Lagrangien ne peut pas *explicitement* dépendre du temps, c'est-à-dire $L(q_i, \dot{q}_i, t) = L(q_i, \dot{q}_i)$; elle ne dépend du temps qu'à travers les variables q . Il s'ensuit que $dL/dt = 0$, de sorte que sa dérivée totale par rapport au temps est

$$\frac{dL}{dt} = 0 \quad (2.21)$$

Les équations de mouvement (2.2) impliquent alors que la fonction E , définie comme

$$E = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2} m_i \dot{q}_i^2 + V(q_i) \right) \quad (2.22)$$

est conservée dans la chaîne, soit $dE/dt = 0$. On peut facilement être convaincu que E est bien une énergie si l'on prend l'exemple d'un ensemble de N particules ponctuelles de masse m_i

$$T_{\text{ex}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{q}_i^2 + V(q_i) \quad (2.23)$$

La relation (2.22) implique alors que

le potentiel V pour lesquelles

$$E = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2} m_i \dot{q}_i^2 + V(q_i) \right),$$

ce qui correspond à l'expression classique de l'énergie totale (cinétique plus potentielle) d'un système de particules ponctuelles. Notez que (2.22) est simplement l'hamiltonien (2.3).

L'invariance sous transformations de coordonnées infinitésimales et vitesses généralisées, est obtenue à l'aide de la transformation $q_i \rightarrow q_i + \epsilon \hat{q}_i$, et $\dot{q}_i \rightarrow \dot{q}_i + \epsilon \hat{\dot{q}}_i$, où ϵ est un petit paramètre ($\epsilon \ll 1$) et $\hat{q}_i$ est un vecteur qui sera spécifié plus tard. L'invariance sous cette transformation peut s'écrire

En développant le côté gauche de cette relation à l'ordre dominant dans ϵ , nous

$$\text{obtenons } \delta E = 0.$$

Encore une fois, les équations de mouvement (2.2) impliquent que

$$\delta E = 0, \quad (2.24)$$

et donc à l'existence de a. nouvelle quantité conservée.

L'équation (2.24) peut être illustrée sur l'exemple (2.23) si l'on choisit la translation dans l'espace comme transformation de coordonnées (ie $\hat{q}_i = \hat{e}_i$ constantes en coordonnées cartésiennes). Pour chacune des trois quantifications indépendantes possibles (c'est-à-dire

selon les trois

axes possibles), la quantité $p = mq$ est conservée : c'est l'impulsion. On voit bien ici qu'à une invariance de type vectoriel (trois quantifications indépendantes forment un vecteur) correspond une loi de conservation elle-même de type vectoriel. C'est le sens du théorème de Noether.

2.1.1.7 Cas de théorie des champs

Revenons maintenant au cas de la théorie des champs, dont un exemple est l'action (2.13), et considérons une transformation de coordonnées générale

$$= \quad (2.25)$$

Ensuite le champ scalaire ϕ se transforme comme

$$\phi(x^a) = \phi'(x'^a),$$

qui est une variante locale. On peut aussi définir une variation globale δ à travers

$$\delta\phi(x^a) = \phi'(x'^a) - \phi(x^a),$$

qui ne prend en considération que la modification du champ lui-même au point définissant ainsi une variation totale après que la variation locale soit ramenée à son point d'origine. Au premier ordre en ϵ , ces deux variations sont liées par

$$\delta\phi(x^a) = \delta\phi'(x'^a) - \quad (2.26)$$

A noter que la variation δ fait la navette avec la dérivée, contrairement à la variation δ . En

effet,

$$\delta(\partial_\mu \phi(x)) = \partial_\mu (\delta\phi(x)) = \partial_\mu (\phi'(x') - \phi(x)) = \partial_\mu \phi'(x') - \partial_\mu \phi(x) = \delta(\partial_\mu \phi(x')),$$

alors que

$$\partial_\alpha [\epsilon \delta\phi(x^\beta)] = \partial_\alpha [\phi'(x'^\beta) + \epsilon f^\mu_{\alpha\beta} \partial_\mu \phi'(x'^\beta) - \phi(x^\beta)] = \epsilon [\delta \partial_\alpha \phi(x^\beta) + f^\mu_{\alpha\beta} \partial_\mu \phi(x^\beta)],$$

encore au premier ordre en ϵ .

La théorie sera dite invariante sous la transformation $x \rightarrow x'$ (pour simplifier, on écrit $x = x^\alpha$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté) si l'action, c'est à dire l'intégration de la densité lagrangienne sur un espace-temps le volume V_4 , reste inchangé pendant l'opération. Autrement dit,

$$S = \int_{V_4} \mathcal{L} \left[\phi(x), \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^\mu} \right] d^4 x = \int_{V'_4} \mathcal{L}' \left[\phi(x'), \frac{\partial \phi(x')}{\partial x'^\mu} \right] d^4 x', \quad (2.27)$$

où l'intégration s'effectue sur le même volume d'espace-temps, exprimé en fonction des nouvelles coordonnées (d'où la notation V_4 dans la deuxième égalité). L'élément volume est modifié par le déterminant de la matrice jacobienne où la deuxième égalité provient du développement au premier ordre en ϵ . L'équation (2.27) devient alors utilisant la relation (2.26) entre les opérateurs δ et d , cela conduit à

$$d^4 x' = \frac{d(\wedge)}{d(x'^\mu)} d^4 x \simeq (1 + \epsilon \partial_\mu f^\mu) d^4 x, \quad (2.28)$$

De plus, nous pouvons développer $d\mathcal{L}$ dans cette expression comme

$$\hat{A}r^{dC} \sim u^{dL} A d\mathcal{L} = \gamma d\theta + \dots$$

ce qui est possible puisque d est une différentielle exacte (d et d_{int} trajet). En intégrant cette expression et en utilisant les équations de champ (2.14), on obtient tel que (2.28) devient

Puisque V_4 est arbitraire, cela implique que l'intégrande disparaît, ou en d'autres termes, que le terme entre parenthèses est un courant conservé, c'est-à-dire, qui satisfait $\partial_\mu J^\mu = 0$. Ce courant est explicitement donné, à l'aide de (2.26), par

$$\mathcal{J}^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \delta \phi - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \partial^\alpha \phi - \eta^{\mu\alpha} \mathcal{L} \right) f_\alpha, \quad (2.29)$$

pour une transformation de la forme (2.25). Dans cette expression nous avons réintroduit la variation locale $\delta\phi$, souvent mieux contrôlée que la variation totale $d\phi$.

La discussion précédente ne dépend pas du fait que ϕ est un scalaire, c'est à dire de la façon dont il se transforme sous un changement de coordonnées, ni du fait que nous n'avons considéré qu'un seul corps. De manière plus générique, pour une théorie à N corps ϕ_a , où $a \in \{1, \dots, N\}$, la relation (2.29) peut être généralisée à

$$\mathcal{J}^\mu = \sum_{a=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_a} (\delta \phi_a - f_\alpha^\mu \partial^\alpha \phi_a) + \eta^{\mu\alpha} f_\alpha \mathcal{L}. \quad (2.30)$$

Cette relation est toujours valable si les indices de ϕ forment, par exemple, un vecteur ($\phi \in \mathbb{R}^M$) ou un tenseur de rang supérieur.

La conservation du courant JZ implique l'existence d'une quantité constante dans le temps. Pour s'en rendre compte, il suffit d'évaluer l'intégrale de $dp \cdot J^\mu$ sur un volume spatial arbitraire V_3 , à savoir

$$\dot{U} = f d^3x = \int_{V_3} (\partial_0 F_V \cdot J) d^3x,$$

avant d'utiliser le théorème de Stokes-Ostrogradski pour éliminer le deuxième terme

$$\int_{V_3} d^3x \nabla \cdot J = \oint_{\partial V_3} dS \cdot J \rightarrow 0. \quad J_V \cdot J$$

Il s'ensuit donc que

$$\int_{V_3} dt J^0 d^3x = \sim \int J^0 d^3x = 0, \quad J_V \cdot d^3x$$

et l'intégrale de la composante temporelle du courant est bien conservée (voir la généralisation de la section 1.4 du chapitre 1).

2.1.1.8 Énergie et élan du champ

Tout comme l'invariance par translation temporelle et spatiale implique la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement dans la mécanique des particules ponctuelles, la même invariance, exprimée en termes de courant (2.30), génère la conservation du tenseur énergie-impulsion. Sous une transformation infinitésimale en coordonnées

minkowskienne, où le

sont quatre quantités constantes, on voit que le champ reste inchangé, c'est-à-dire $\delta \phi = 0$. Notez que cela reste vrai pour toute quantité de type vectoriel ou tensoriel de rang arbitraire, puisque $dx^\mu \rightarrow dx^\mu + \delta x^\mu$ pour ce cas spécifique.

Puisque les quantifications sont supposées constantes, il est possible de les lire à partir de la définition (2.30). La quantité conservée est alors un tenseur de rang 2, puisque

$$d^4x \wedge \Theta = 0$$

ce qui nous permet de définir un tenseur énergie-impulsion canonique

$$\Theta^{\mu\alpha} = \eta^{\mu\alpha} \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \partial^\alpha \phi. \quad (2.31)$$

Ce tenseur est conservé par construction, c'est à dire

$$\partial_\mu \Theta^{\mu\alpha} = 0.$$

$$(2.32)$$

A chaque valeur de $\mu, \alpha = 0, 1, 2, 3$, correspondant à des variations indépendantes de x^μ est associée une quantité conservée : ce sont les composantes du vecteur énergie-impulsion $P^\alpha = (E/c, \mathbf{P})$, donnée par

$$P^\alpha = - \int d^3x \Theta^{\alpha 0}, \quad (2.33)$$

qui se conserve donc dans le temps.

2.1.1.9 Symétrisation du tenseur énergie-impulsion

Le tenseur énergie-impulsion (2.31) n'est pas nécessairement symétrique et Chus ne correspond pas nécessairement au tenseur (1.83) qui apparaît dans les équations d'Einstein (1.85). Cependant, il est toujours possible de le rendre symétrique de manière appropriée, tel qu'il reste conservé et tel que les quantités physiques que l'on peut en déduire n'en soient pas affectées. Cela nous permet d'utiliser sa version symétrique comme source des équations d'Einstein.

Définissons

$$-F d_p G^{ppo}/.$$

Ce tenseur est conservé par construction si $G^{ppc>}$ est antisymétrique dans ses deux premiers indices, soit $G^{pp\dot{u}} = -G^{ppa}$. De plus, T^{poc} conduit à la même quantité conservée tant que les champs diminuent assez vite à l'infini. Nous avons en effet

$$d^3z d_2 G^{i\dot{o}a\dot{r}}. \quad (2.34)$$

Le deuxième terme de la dernière égalité s'annule à l'identique puisque G^{ppo} est antisymétrique. Le dernier terme peut s'exprimer comme un intégral sur la surface qui limite V_3 , c'est à dire $dV^\wedge$ que l'on envoie à l'infini, là où les champs sont censés disparaître. Il s'ensuit que

$$(2.35)$$

que nous pouvons identifier avec le vecteur impulsion.

Ceci peut être illustré par l'exemple de l'électromagnétisme libre. Dans ce cas, le champ 0 est remplacé par le potentiel vectoriel A_p . Sa dynamique est déterminée par la densité lagrangienne [cf. (1,94)]

qui ne contient qu'un terme cinétique, avec $F_{00} = d_a A_0 - d_0 A_a$.

$$(2.36)$$

La partie du tenseur énergie-impulsion qui est proportionnelle à la métrique est déjà symétrique. Le deuxième terme de (2.31) est donné par

$$f_{p^*} \sim \frac{1}{\rho a \delta}$$

qui peut s'exprimer, après un simple réarrangement, comme

$$. = F^{ap} F_p - \wedge^{fict} F_{a0} F^{a0} - F^{pp} d_p A^a$$

Là encore, seul le dernier terme empêche le tenseur d'être symétrique (notons d'ailleurs qu'il n'est même pas invariant de jauge).

Cherchons maintenant un tenseur à trois indices G^{ppa} , antisymétrique dans ses deux premiers indices, qui permettra de supprimer le dernier terme. En d'autres termes, il doit satisfaire à $d_p G^{ppa} = F^{pp} d_p A^{cl}$. En utilisant les équations de Maxwell, cela peut être facilement résolu pour obtenir $Q^{p||O} \cdot p p u \cdot \wedge q$ -le tenseur énergie-impulsion symétrisé est donc

$$T_{e.m.}^{\mu\nu} = F^{\nu\rho} F_{\rho}^{\mu} - \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}, \quad (2-37)$$

qui s'avère être aussi saine que celle obtenue par variation par rapport à la métrique (1.83).

2.1.2 La physique quantique

2.1.2.1 Principe d'incertitude et pièces de rechange de Hilbert

La grande révolution conceptuelle de la mécanique quantique [3] est née de l'affirmation selon laquelle on ne peut déterminer simultanément avec une précision arbitraire les positions et les impulsions d'aucun objet. Cela signifie, par exemple, que si l'on mesure la position et l'impulsion d'une particule avec les précisions Δq et Δp , alors, au mieux (en une dimension),

$$\Delta q \cdot \Delta p \geq \frac{1}{2} \hbar, \quad (2.38)$$

où $\hbar$ est la constante de Planck. L'existence d'une telle limitation intrinsèque à la possibilité de connaître l'état d'un Système physique nous oblige à abandonner la notion de trajectoire classique. (Voir cependant la réf. [4], qui discute de l'interprétation ontologique de Bohm-de Broglie pour laquelle de telles notions ont encore un sens.)

La description quantique remplace les hypothèses classiques, en supposant que tout Système physique est décrit par un élément d'un espace vectoriel complexe, un espace d'états, c'est-à-dire de configurations, dont la dimension dépend du Système. Imaginons, par exemple, que l'on veuille étudier un faisceau lumineux polarisé linéairement, soit verticalement, soit horizontalement. Si c'est la seule propriété que nous décrivons sur le Système, nous avons alors un Système avec deux états possibles, notés $|<->\rangle$ et $|J\rangle$, dans la notation « kets » introduite par Dirac ; la notation inverse permet de définir un produit scalaire, par exemple $\langle J |$ représente un 'bra', de sorte que l'ensemble d'entre eux forme un 'bra-c-ket'. L'espace vectoriel dans lequel évolue ce Système, peut avoir ces deux états comme base, c'est donc un espace à deux dimensions. Tout élément de cet espace peut toujours être décomposé comme $|P\rangle = \langle a | * \rangle \langle 3 | J \rangle$ avec $\langle a |$ et $\langle 3 |$ dans $\mathbb{C}$. Le 'bra' associé est alors obtenu par le conjugué hermitien, qui est $\langle P | = \langle a | * \rangle \langle 3 | + \langle J |$, de sorte que le produit scalaire est donné par le nombre $\langle P | P \rangle = \langle a | * \rangle \langle 3 | \langle 3 | + \langle J | J \rangle$ pour les états de base orthogonaux. Nous choisissons généralement ces vecteurs de base pour qu'ils soient normalisés à l'unité.

Lors de la description de la dynamique de la position ou de l'élan d'une particule, chacune de ces quantifications correspond à une « coordonnée » dans l'espace vectoriel concerné. Cela signifie que la base sur laquelle le système peut être décrit est constituée de tous les éléments $\{|</>\rangle\}$. Puisque la coordonnée q varie continuellement dans $\mathbb{R}$, l'espace

vectorel a une dimension inexplicablement infinie. Dans ce cas (de dimension infinie et doté d'une norme), on parle d'espace de Hilbert. ²

2.1.2.2 Les opérateurs et le principe de superposition

Dans le cadre quantique, les variables physiques sont remplacées par des opérateurs qui agissent sur l'espace vectoriel des états. Par exemple, pour l'état $|g\rangle$, qui décrit une particule à la position q , il existe un opérateur de position, noté q tel que

$$q|q\rangle = q|q\rangle \quad (2-39)$$

En d'autres termes, l'état de position devient un état propre de l'opérateur de position. Pour éviter tout risque de confusion et d'erreur dans ce qui suit, nous dénoterons systématiquement une grandeur quantique correspondant à une grandeur classique par la même lettre avec le symbole 'qq, pp, etc.

Tout opérateur A doit satisfaire certaines conditions pour correspondre à une grandeur mesurable. En particulier, puisque l'espace des états est complexe, il faudrait exiger que les valeurs propres d'un observable, potentiellement mesurable, soient réelles. Cela implique que A est hermitien, ie $A^\dagger = A$. De plus, puisque les valeurs propres de cet opérateur correspondent à toutes les valeurs possibles de la propriété concernée, les états propres $|a\rangle$ de A devraient former une base orthonormée de l'espace de États. En d'autres termes, tout état physique arbitraire $|T\rangle$ peut être décomposé comme

$$|T\rangle = \sum_k |a_k\rangle \langle a_k|T\rangle \quad (2.40)$$

où la somme discrète doit être remplacée par une somme intégrale dans le cas d'une infinité continue de degrés de liberté, c'est-à-dire dans le cas d'un espace d'états de Hilbert. Un opérateur A qui satisfait ces conditions est appelé un *observable*.

La relation (2.40) conduit directement à la propriété centrale de la théorie quantique, à savoir le *principe de superposition*, selon lequel plusieurs configurations physiques peuvent se superposer dans une combinaison linéaire qui est encore un état physique ; c'est le cas dans (2.40). De plus, une mesure de l'observable A effectuée sur l'état $|T\rangle$ donnera nécessairement une valeur propre unique de cet opérateur. Partant de ce principe, nous pouvons voir que l'équation dynamique satisfaite par l'état physique est nécessairement linéaire.

2.1.2.3 Non-commutativité

Toute grandeur physique classique donnée correspond à un opérateur dans l'espace des états, et les équations qui contrôlent la dynamique doivent reproduire celles de la physique classique dans la limite où l'on sait qu'elles sont valables. Le moyen le plus simple d'obtenir les lois quantiques est donc de les dériver des lois classiques correspondantes. Or, contrairement aux fonctions qui définissent la physique classique, les opérateurs agissent sur un espace vectoriel et ne font pas toujours la navette. C'est cette propriété qui est utilisée pour réaliser la correspondance.

Nous définissons le commutateur entre deux opérateurs A et B comme $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$. Cet objet a les mêmes propriétés de symétrie que les crochets de Poisson introduits dans

² L'expression « espace de Hilbert » est également très souvent utilisée pour désigner les espaces de dimension finie, bien que cela soit mathématiquement incorrect.

(2.5). Il en résulte que nous obtenons une prescription appropriée si nous effectuons la - substitution

$$[AB] \cdot \quad (2.41)$$

En particulier, les variables position et moment et p^j sont désormais des variables qui ne commutent plus et (2.7) devient

$$[\hat{q}_i, \hat{q}_j] = 0 = [\hat{p}^i, \hat{p}^j] \quad \text{and} \quad [\hat{q}_i, \hat{p}^j] = i\hbar\delta_i^j. \quad (2.42)$$

Cette relation peut être généralisée à de nombreux cas (voir par exemple le cas d'un champ scalaire plus loin). On peut explicitement vérifier ici que dans la représentation où l'opérateur de position est exprimé par (2.39), l'opérateur moment devient alors $p^j = -i\hbar d/dq^j$.

2.1.2.4 Prévisibilité et statistiques

Les prédictions de la mécanique quantique sont essentiellement probabilistes. Formellement, cela se traduit par dire que si un système physique est dans un état $|T\rangle$, alors la probabilité qu'il soit mesuré dans un état $|4\rangle$ est proportionnelle au carré du produit scalaire $\langle T|T\rangle$. Puisque seules ces probabilités sont effectivement prédites par la théorie, on peut choisir de normaliser ces états physiques, ce qui sera généralement supposé dans ce qui suit, c'est-à-dire $\langle T|T\rangle = 1$. Avec cette convention, nous avons

$$\langle T|T\rangle = |\langle T|T\rangle|^2. \quad (2.43)$$

Notez que la normalisation d'un état est toujours possible, également parce que le produit scalaire d'un état avec lui-même est par définition positif dans un espace vectoriel de norme définie positive (ce qui est ici un pré-requis pour définir des probabilités)

$$\langle T|T\rangle = (\langle T|T\rangle)^2 > 0.$$

Pour un opérateur observable A , nous avons vu que les seules valeurs qu'une mesure pouvait donner étaient celles appartenant au spectre (l'ensemble des valeurs propres possibles) de cet opérateur. Supposons que nous ayons un grand nombre de particules préparées dans le même état physique, pour être précis, nous choisissons, par exemple, l'état $|T\rangle$ de décomposition (2.40). La mesure de A sur cet ensemble de particules sera donnée par la moyenne de l'opérateur dans l'état $|T\rangle$, narnelj'

$$\langle A \rangle = \langle T|\hat{A}|T\rangle,$$

avec un écart autour de cette valeur moyenne donnée par

$$= \langle T|(\hat{A} - \langle A \rangle)^2|T\rangle = \langle \hat{A}^2 \rangle - \langle A \rangle^2.$$

Comme on pouvait s'y attendre, cette variance disparaît lorsque $|T\rangle$ est un état propre de A .

La relation d'incertitude pour les observables A et B s'obtient de manière similaire [5] en considérant l'opérateur $C = AB - \hat{A}\hat{B} = i\hbar\hat{A}\hat{B} - \langle A \rangle\langle B \rangle$, où désormais (sauf précision sinon) la moyenne est prise dans un état arbitraire $|\wedge\rangle$, et l'index redondant a été supprimé. Il

suffit de remarquer que $(CAC) = \|C|T\rangle\|^2 > 0$ et développer cette inégalité pour obtenir

$$AXAB > \quad (2.44)$$

qui, une fois appliquée aux opérateurs de position et de quantité de mouvement, se réduit à l'inégalité de Heisenberg (2.38) » avec un facteur supplémentaire provenant du fait que les coordonnées et la quantité de mouvement dans des directions orthogonales commutent.

2.1.2.5 Représentations de Heisenberg et Schrödinger

Tout état physique peut toujours être normalisé à l'unité. Cela permet une interprétation probabiliste, qui n'a de sens que si l'évolution dynamique conserve la normalisation des états. Notant $U(t)$ l'opérateur d'évolution de tirne, le fait que l'évolution soit linéaire implique que l'état $|T(t)\rangle$ évolue comme

$$|T(t)\rangle = \hat{U}(t) |T(0)\rangle \quad (2.45)$$

où U satisfait

$$\langle P(t) | T(t) \rangle = \langle P(0) | T(0) \rangle \quad \hat{U}^\dagger \hat{U} = 1. \quad (2.46)$$

Ainsi l'opérateur d'évolution U est un opérateur unitaire. Pour être physique, toute théorie quantique doit satisfaire à ce principe d'unité ; ce critère permet d'écarter certaines théories, généralement très spéculatives, sans même avoir recours à l'expérimentation.

Les transformations unitaires permettent en effet d'aller plus loin et de définir des représentations c'est-à-dire des couples contenant tous les opérateurs et opérateurs possibles.

états de la théorie. Ces représentations sont liées les unes aux autres par

$$|T\rangle_{\text{fc}} = \hat{U} |T\rangle_{\text{k}}, \quad \dot{A}_n - A_n = U A_n \dot{U}^\dagger \quad (2.47)$$

Ces relations garantissent la conservation de la norme des états, et donc des probabilités : toutes les prédictions faites dans une représentation donnée seront identiques à celles obtenues dans une autre représentation.

Il existe de nombreuses représentations utiles, en particulier l'image de Heisenberg dans laquelle les opérateurs dépendent du temps mais où les vecteurs de base, les états, sont indépendants du temps. Dans cette représentation, grâce à (2.41), l'équation classique est directement transposée à

$$i\dot{A} = [A, H] \quad (2.48)$$

où H est l'opérateur qui correspond à la fonction hamiltonienne du système classique. Pour obtenir (2.48), nous avons supposé que l'opérateur A ne dépendait pas explicitement du temps. Une telle dépendance explicite peut être prise en compte en ajoutant simplement le terme recherché avec une dérivée partielle.

Le tableau de Schrödinger correspond à l'autre extrême en matière de possibilité de choix. Dans cette représentation les opérateurs ne dépendent pas de la teinte, et seuls les

états dépendent du temps. La différence entre ces deux représentations est similaire au choix que l'on peut faire lors de la description des rotations. Soit on considère une rotation active du Système, laissant l'axe inchangé, soit on peut décrire les mêmes rotations de manière passive, en considérant que ce sont les axes qui changent (en sens inverse) tandis que le Système lui-même ne bouge pas.

2.1.2.6 équation de Schrödinger

Dans la représentation de Schrödinger, la dynamique quantique de l'état, désormais dépendant du temps, découle simplement de l'exigence selon laquelle les prédictions, et donc les probabilités, doivent être invariantes par traduction temporelle. En effet, (2.45) implique que le propagateur temporel $\hat{U}(t - t_0)$ satisfait

Cependant, si l'équation décrivant la dynamique d'un état est linéaire et indépendante de l'état initial et du temps écoulé, alors le terme de droite dans la relation précédente doit être proportionnel au vecteur $|\psi(t)\rangle$. Nous pouvons donc conclure que

$$\frac{d}{dt} \hat{U}(t - t_0) \propto \hat{U}(t - t_0).$$

Cette équation différentielle peut être résolue très facilement pour donner

$$\hat{U}(t - t_0) = \exp \left(-i H (t - t_0) \right) \quad (2.49)$$

où H est un opérateur hermitien. De l'invariance par translation temporelle, cet opérateur doit être conservé, et doit donc être lié à l'énergie. En fait, il ne peut s'agir que du hamiltonien. La forme de (2.49) garantit que l'opérateur $\hat{U}$ est bien unitaire.

Considérons maintenant à nouveau (2.45) avec la solution (2.49), on obtient l'équation de Schrödinger

$$i \hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle \quad (2.50)$$

De plus, on peut noter que $\hat{U}$ est précisément l'opérateur unitaire dont on a besoin pour passer de la représentation de Schrödinger à celle de Heisenberg. Le vecteur $|\psi(t_0)\rangle$, qui est effectivement indépendant du temps, constitue la base de cette représentation.

L'équation (2.50) peut également être comprise comme une règle formelle de correspondance entre la fonction de Hamilton, c'est-à-dire l'énergie, et l'opérateur r/dt .

2.1.2.7 Oscillateur Harmonique

Avant d'aborder les sujets de la mécanique quantique relativistique et de la théorie des champs, rappelons d'abord les résultats d'un système très simple, l'oscillateur d'harmonie. Cela nous permettra de mettre en pratique les notions évoquées précédemment. De plus, ce système sera également utile dans la théorie des champs puisque tous les champs, dont nous utiliserons les propriétés, peuvent être étendus comme des ensembles parfois infinis de tels

oscillateurs d'harmonie.

The Hamiltonian of a one-dimensional harmonic oscillator of mass m and angular frequency ω is

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2. \quad (2.51)$$

The Schrödinger equation (2.50) for this Hamiltonian is obtained from the correspondences discussed previously, namely $H \rightarrow \hbar i \frac{d}{dt}$ and $p \rightarrow -i \hbar \frac{d}{dq}$,

$$\hbar i \frac{d}{dt} \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dq^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 \psi. \quad (2.52)$$

où nous avons défini la fonction d'onde $\psi(q, t)$ = $\langle q | V^*(t) \rangle$. Cette fonction est généralement complexe. Étant donné l'interprétation (2.43) de la mécanique quantique, le carré de son module, $|\psi|^2$, représente la densité de probabilité de trouver la particule à la position q au temps t . La normalisation de l'état $|V\rangle(t)$ implique simplement que la probabilité totale, intégrée sur tout l'espace, est l'unité, de sorte que $\int |\psi|^2 dq = 1$.

Le spectre de l'hamiltonien, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres associées à l'opérateur H , est ici obtenu en résolvant l'équation aux valeurs propres $H\psi = E\psi$ ou de manière équivalente en recherchant les modes d'oscillation de la fonction d'onde de la forme $\psi(q, t) = \phi(q) \exp(-iEt/\hbar)$. L'équation que l'on obtient est bien connue et ses solutions ne sont normalisables que si l'énergie est positive, ce qui est physiquement acceptable. De plus, la dérivée de la solution à $q = 0$ n'est continue que pour un ensemble discret de valeurs de l'énergie, E_n .

On définit les opérateurs $\hat{a}$ et $\hat{a}^\dagger$, appelés respectivement opérateurs d'annihilation et de création (compris comme étant associés à chaque mode d'oscillation), par les relations

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(q + \frac{i}{m\omega} p \right), \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(q - \frac{i}{m\omega} p \right) \quad (2.53)$$

ils sont conjugués entre eux mais non hermitiens : ils ne sont pas observables. En inversant ces relations et en utilisant les règles de commutation (2.42), on trouve que $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$. L'hamiltonien peut alors s'exprimer comme

Sous cette forme, nous pouvons comprendre pourquoi les énergies sont définies positivement puisque

$$E_n = \langle n | H | n \rangle = \hbar \omega \left(\langle n | \hat{a}^\dagger \hat{a} | n \rangle + \frac{1}{2} \right) > 0,$$

par la définition de la norme dans un espace de Hilbert.

Une fois qu'on obtient un état $|n\rangle$ d'énergie E_n , on peut déterminer tous les autres en appliquant l'opérateur de création :

ce qui montre que $|n+1\rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \hat{a}^\dagger |n\rangle$ est un état propre de l'hamiltonien de valeur propre $E_{n+1} = \hbar \omega (n+1 + \frac{1}{2})$. De même, $|n-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \hat{a} |n\rangle$ est l'état propre de H

d'énergie $E_n - E_0 = E_n - E_0$. L'état avec la plus faible énergie, l'état de vide $|0\rangle$, satisfait $\hat{a}|0\rangle = 0$, et a) les états peuvent être obtenus par

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle.$$

Ainsi, l'état de vide a une énergie non nulle, $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$, et le spectre E_n est $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$.

2.1.2.8 Potentiel général

Revenons maintenant à l'espace tridimensionnel. Une particule évoluant dans un potentiel général $V(x)$ peut être développée de la même manière sur la base des états propres de l'hamiltonien, avec des fonctions propres, $V(x)$ satisfaisant

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(x) \right] \psi = E \psi \quad (2,54)$$

où la valeur propre de l'hamiltonien E , est l'énergie de l'état.

Pour un oscillateur d'harmonie, $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$, et (2.54) devient invariant sous les transformations $x \rightarrow -x$ et $p \rightarrow p$. Par conséquent, les états propres ont alors des valeurs moyennes de position et d'impulsion nulles, c'est-à-dire $\langle x \rangle = 0 = \langle p \rangle$. Cela reflète le fait que le potentiel a un minimum à l'origine, augmente avec la distance (analogue quantique d'une force de rappel) et est symétrique. Ainsi, les fonctions d'onde sont essentiellement localisées à l'origine et l'exigence qu'elles soient normalisables exige qu'elles disparaissent asymptotiquement.

Un potentiel général $V(x)$ ne respecte pas forcément ces conditions. En particulier, il ne peut être non-disparu que dans une région finie de l'espace. C'est le cas par exemple du potentiel coulombien de l'interaction électrique entre un électron et un proton. Ce potentiel attractif est en outre négatif. On en déduit donc que les valeurs propres sont des énergies négatives formant les différents états possibles de l'atome d'hydrogène, étalés sur un spectre discret de fonctions d'onde normalisables. Il existe également une composante continue formée par toutes les énergies positives, qui correspond à des fonctions d'onde non normalisables. En fait, ce sont les fonctions d'onde de l'opérateur impulsion qui peuvent être exprimées sous la forme

$$\psi_p(x) = e^{i(p x / \hbar)},$$

c'est-à-dire les ondes planes. Nous les normalisons généralement en plaçant artificiellement la particule dans une boîte de volume fini V_3 et en divisant la fonction d'onde par V_3 . Une fois tous les calculs effectués, plus rien ne doit dépendre de V_3 et on peut prendre la limite $V_3 \rightarrow \infty$. Si ce n'est pas le cas, utiliser les fonctions d'onde de l'hamiltonien est délicate et il faut recourir à d'autres méthodes et représentations différentes.

Un point important, valable aussi bien en mécanique classique qu'en mécanique quantique, est que le potentiel $V(x)$ doit être déterminé par des expériences, ou doit être imposé d'une manière ou d'une autre. Sa forme fonctionnelle est dans le contexte théorique complètement arbitraire. La description de quelques interactions dans le cadre de la théorie des champs permettra de calculer la forme de ce potentiel dans de nombreux cas.

Les états propres de la quantité de mouvement peuvent également servir de base à la représentation de particules libres, c'est-à-dire sans potentiel. Dans ce cas, l'opérateur de création $\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})$ agit sur l'état de vide pour créer une particule d'impulsion $\mathbf{p}$, et la fonction d'onde est obtenue à l'aide de la transformée de Fourier de ces états. Il s'ensuit que

$V^>(\mathbf{z}, t) = \langle \mathbf{z} | \psi(\mathbf{z}, t) \rangle = \int d^3\mathbf{p} \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}) \psi(\mathbf{p}, t)$, (2.55) ce qui permet de définir l'opérateur de champ par

(2,56)

tel que $\psi(\mathbf{x}, t) = \langle 0 | \psi(\mathbf{x}, t) | 0 \rangle$. L'opérateur $T(\mathbf{a}, \mathbf{c})$ annihile une particule au point $\mathbf{a}$, tandis que son conjugué hermitien $T^\dagger(\mathbf{a}, \mathbf{c})$ produit une particule au même point.

Les relations de commutation généralisées pour les opérateurs de création et d'annihilation pour les états propres de quantité de mouvement, à savoir

$$[\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}_{\mathbf{k}}] = 0 = [\hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger], \quad [\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger] = \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{k}), \quad (2.57)$$

se traduire par

$$[T(\mathbf{z}), T(\mathbf{p})] = 0 = [T^\dagger(\mathbf{a}), T^\dagger(\mathbf{p})], \quad [T(\mathbf{a}), T^\dagger(\mathbf{p})] = -\delta^{(3)}(\mathbf{a} - \mathbf{p}). \quad (2.58)$$

A noter qu'il est également possible de définir un élan conjugué $\mathbf{p}(\mathbf{a})$ et un formalisme hamiltonien. Nous y reviendrons dans le cadre de la théorie relativiste.

2.1,3 Mécanique quantique et relativiste

L'application du principe de correspondance permet la formulation immédiate d'une théorie quantique relativiste. Au lieu d'utiliser les expressions classiques reliant l'énergie totale, l'hamiltonien, aux énergies cinétique et potentielle, il suffit de considérer l'impulsion relativiste, $\mathbf{p}^* = \mathbf{p} / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ et l'invariant $p^\mu p_\mu = -m^2 c^2$,

qui peut être exprimé en fonction de l'énergie E et de l'impulsion $\mathbf{p}$, comme $p^\mu p_\mu = -E^2/c^2 + \mathbf{p}^2 = -m^2 c^2$, pour obtenir

$$E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4.$$

L'équation de Klein-Gordon pour la fonction d'onde ψ peut alors être obtenue en utilisant la correspondance $E \rightarrow i\hbar \partial_t$ et $\mathbf{p} \rightarrow -i\hbar \nabla$

(2,59)

On montrera dans ce qui suit comment il est possible de prendre en compte les propriétés de la relativité restreinte pour décrire la théorie quantique des champs. Une partie importante de ces développements peut être généralisée aux espaces-temps courbes, notamment en remplaçant les dérivées partielles par des dérivées covariantes ∇_a . C'est ainsi que l'on peut considérer l'influence

gravité en passant par la relativité générale dans une large mesure : la théorie quantique des champs dans l'espace courbe suppose que la gravitation ne modifie la théorie des champs qu'à travers la métrique dans laquelle les champs quantiques (de test) évoluent.

Désormais, on considérera les unités naturelles et on fixera donc ' $\hbar = c = 1$ ' (voir annexe A).

2.1.3.1 Équations de Klein-Gordon et Dirac

En unités naturelles, l'équation de Klein-Gordon, qui décrit la dynamique d'un champ scalaire libre, devient

$$(\hat{\epsilon}^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu - m^2) \phi = 0 \quad (2.60)$$

Pour un potentiel général d'auto-interaction, le Lagrangien dont est dérivée cette équation est donné par (1.106). Dans le cas d'un champ scalaire libre massif, nous prendrons

$$\mathcal{L}_{\text{KG}} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2) \quad (2.61)$$

c'est-à-dire un simple terme de masse. Sa quantification sera discutée en détail à la section 2.2.

Un problème apparaît immédiatement dans (2.60), celui de l'existence de solutions d'énergie négative. En effet, la relation classique $E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ suppose que $E > 0$. Mais les solutions de (2.60) sont simplement les états propres de la quantité de mouvement et de l'énergie, qui sont $\exp[i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et)]$, mais rien n'indique quel doit être le signe de l'énergie. Autrement dit, les deux choix $E = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ sont possibles. Mais si la fonction d'onde ϕ correspond à l'un de ces états, alors elle contient moins d'énergie que l'état de vide lui-même. Ainsi, une théorie contenant de tels états est nécessairement instable. C'est pourquoi il faut aller au niveau de la théorie quantique des champs, pour laquelle la solution de (2.60) n'est pas une fonction d'onde, comme dans le cas de $i\hbar \partial_t \psi$ pour l'équation de Schrödinger, mais un opérateur, semblable à T de (2.56).

La difficulté que nous venons d'évoquer pour le champ scalaire vient du fait que son équation dynamique, contrairement au cas classique, est du second ordre en temps, ce qui est normal pour respecter l'invariance relativiste. Une autre façon de procéder est de postuler une équation du premier ordre en temps, et donc aussi en espace. Afin de respecter l'invariance relativiste, il faudrait pouvoir l'écrire sous la forme

$$(i \not{\partial} - m) \psi = 0, \quad (2.62)$$

que l'on peut obtenir en faisant varier le Lagrangien de Dirac

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\psi} (i \not{\partial} - m) \psi. \quad (2.63)$$

Puisque cette équation, connue sous le nom d'équation de Dirac, décrit la dynamique d'une particule relativiste, son carré devrait également reproduire la correspondance observée dans l'équation de Klein-Gordon. On devrait donc aussi avoir $(i \not{\partial} - m)^2 \psi = 0$, ce qui implique que

$$(\hat{1} \partial^\mu \partial_\mu - m^2) \psi = 0.$$

Ceci n'est compatible avec l'équation de Klein-Gordon que si les coefficients γ^M satisfont

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} + \gamma^\mu \gamma^\nu = 0 \quad (2.64)$$

Ainsi, les γ_μ ne peuvent pas être de simples nombres. En fait, il doit s'agir de matrices de rang au moins égal à quatre. Une représentation utile pour ces γ^M est

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.65)$$

où chaque entrée de ces matrices est elle-même une matrice 2×2 , $J = \gamma^0 \gamma^j$ signifiant la matrice identité bidimensionnelle, soit $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. The γ^j are the Pauli matrices» that

est

$$\gamma^j = \begin{pmatrix} \sigma^j & 0 \\ 0 & -\sigma^j \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.66)$$

Enfin, nous avons défini les vecteurs $\epsilon^\mu = (1, -\gamma^1, -\gamma^2, -\gamma^3)$. Pour des raisons qui Cela deviendra clair plus tard, les matrices de (2.65) sont appelées la *représentation chirale* de l'algèbre de Clifford, définie par (2.64).

Il est intéressant de noter que (2.62) peut également être obtenu à partir de l'action

$$(2.67)$$

En supposant que V_μ , défini par

$$(2.68)$$

et ψ sont considérés comme deux quantifications indépendantes, alors les variations doivent être effectuées simultanément. Cette action présente l'opérateur

$$F^\mu dG_\mu = F d(G) - d(F) G. \quad (2.69)$$

pour deux quantités F et G . Dans le cas de (2.67), F et G sont des spineurs, mais cette définition s'applique également à tout type de corps, par exemple les scalaires.

2.1.3.2 de Maxwell et Proca

Le champ scalaire ϕ est de spin 0 et le champ de spineur ψ de spin 1/2. Les champs connus expérimentalement, parmi lesquels on retrouve toutes les particules listées dans la section 2.3, incluent également des particules de spin 1 comme le photon, de masse nulle, ou les vecteurs Z^0 de l'interaction électrofaible. De tels champs sont décrits par un vecteur dont la dynamique est régie par le lagrangien de Proca

$$(2.70)$$

pour un champ réel de masse M_A . Le tenseur de Faraday a la définition habituelle, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

En faisant varier (2.70) en utilisant (2.14) pour chaque composante A_a du champ vectoriel, on trouve

$$d(d^\wedge A^a) \quad \left(-\frac{1}{4} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right) = -F_{\mu\alpha},$$

et donc

$$(DM^2)A_a = rF d_c A^a. \quad (2.71)$$

Ce n'est pas le cas de cette équation. semblent être équivalents à l'équation de Klein-Gordon pour chaque composante du champ en raison du terme de droite. Cependant, si l'on prend la divergence d a^{de} cette équation, le terme de droite devient un d'Alembertien, qui se simplifie avec celui de gauche, de sorte que

$$M^\wedge d^a A_a = 0.$$

Notons que les choses sont plus compliquées dans le cas relativiste, où les dérivées covariantes ne commutent pas [cf. (1.97)]. Comme on peut le voir ici, si le champ vectoriel est massif, c'est-à-dire $M_A \neq 0$, alors la condition de jauge de Lorentz $d^\wedge A^\wedge = 0$ est automatiquement satisfaite [le fait que la théorie de Proca (2.70) n'est pas invariante de jauge précisément à cause de ce terme n'est pas une surprise], et (2.71) conduit à une équation de Klein-Gordon pour chaque composante, ce qui est attendu du principe de pondence des cônes quantiques classiques discuté autour de (2.59).

Le tenseur énergie-impulsion du champ vectoriel massif, une fois convenablement symétrisé, est identique à celui du champ de jauge de l'électromagnétisme (2.37) jusqu'au terme de masse qu'il faut ajouter. Cela mène à

$$= F^{a\beta} F^\wedge \sim \wedge r) \wedge^a F_c. \quad {}_0 F^{a0} - M^2_A \quad A_U A^\wedge. \quad (2.72)$$

2.2 Découpages canoniques

Le cas particulier d'un champ scalaire, qu'il soit réel ou complexe, est discuté en détail dans la plupart des manuels de théorie des champs ; voir, par exemple, Réf. [6-9], nous l'examinons brièvement dans cette section. Pour être complet, nous décrivons également brièvement le cas des champs de vecteurs et de spineurs.

2.2.1 Clarification technique

Dans ce qui suit, nous choisirons systématiquement une définition symétrique de la transformée de Fourier et de son inverse définies par (B.58) et (B.59).

2.2.1.1 Mesure invariante de Lorentz

L'une des propriétés importantes de la distribution de Dirac est que

$$-[*] = 52 \quad 6(xx_a), \quad (2.73)$$

où les x_a représentent les zéros de l'argument, c'est à dire les solutions de $f(x_a) = 0$.

Cette propriété permet de remplacer les intégrais de Fourier en 4 dimensions par des intégrais tridimensionnels lorsque les domaines sur lesquels on effectue l'intégration sont 'sur coque', c'est à dire que leurs composantes de Fourier satisfont la relation $E^2 = k^2 + m^2$ l'énergie étant défini positif. Dans ce cas, il est possible d'effectuer l'intégration sur la composante temporelle /CQ avec la relation précédente en posant $\omega = \sqrt{k^2 + m^2}$. Cela donne

$$d^4k \rightarrow d^3k \frac{1}{2\omega} \quad (2.74)$$

with the definition

$$u_k = \sqrt{k^2 + m^2}, \quad (2.75)$$

et où θ est la fonction d'étape Heaviside. La relation (2.74) définit une mesure invariante de Lorentz bien qu'elle soit tridimensionnelle. Notons que pour obtenir cette mesure, il faut imposer la condition d'énergie positive afin de ne conserver qu'un seul terme de (2.73).

2.2.2 Véritable champ libre

L'équation (2.60) peut être obtenue en faisant varier le lagrangien (1.106) dans lequel on postule un potentiel arbitraire $V(\phi)$ pour le champ scalaire. Le champ conjugué est alors

$$\pi = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\phi}} = \dot{\phi}, \quad (2.76)$$

de sorte que la densité hamiltonienne, $\mathcal{H} = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L}$, est donnée par

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} [\pi^2 + (V'(\phi))^2 + 2V(\phi)]. \quad (2.77)$$

Les potentiels généraux $V(\phi)$ sont utiles en cosmologie, par exemple pour aborder les scénarios d'inflation (Chapitre 8).

2.2.2.1 Expansion des modes

Les statistiques propres de l'opérateur quantité de mouvement sont à la base de toute field expansion de la théorie quantique. Pour en déduire, il faut d'abord connaître le tenseur énergie-impulsion, qui

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi + 2V(\phi)) \right) \quad (2.78)$$

The field varying (1.84) with respect to the metric.

La dernière égalité découle du fait que le tenseur énergie-impulsion d'un scalaire est déjà symétrique. De plus, il coïncide avec le tenseur (1.107) obtenu par

Le tenseur (2.78) permet de construire le vecteur à quatre impulsions obtenu par $P^a = T^{0a}$, à partir duquel on obtient en effet d'abord la densité hamiltonienne, qui correspond à la composante purement temporelle, soit $P^0 = T^{00} = 7i$, puis la quantité de mouvement associée au champ scalaire $P = 7rV$.

Parce que la présence d'un potentiel général V peut conduire à des non-linéarités potentielles pouvant impliquer des complications inutiles, ici et dans les sections suivantes nous nous limitons au cas du champ massif libre pour lequel $V =$ Ayant trouvé l'impulsion P , il suffit d'effectuer la substitution du principe de correspondance et de remplacer P par $P \rightarrow -iV$. Les modes propres $u_k(x)$ de valeur propre k de l'opérateur d'impulsion satisfont donc $-iV u_k(x) = k u_k(x')$. Ce sont des ondes planes

$$u_k(x) = \alpha,$$

N_k étant un facteur de normalisation à déterminer ultérieurement. Il suffit désormais d'élargir le champ sur la base de ces états propres comme

$$\langle \alpha, t \rangle = y d^3 f \alpha_k(t) u_k(x). \quad (2.79)$$

Puisque $\langle \alpha \rangle$ satisfait l'équation de Klein-Gordon (2.60), on trouve que les coefficients α/t évoluent comme

$$\ddot{\alpha}_k(t) + (k^2 + m^2) \alpha_k(t) = 0,$$

où nous avons utilisé le fait que $V^2 u_k(x) = -k^2 u_k(x)$. En prenant $k^2 = k^2 + m^2$, la solution de cette équation est simplement

$$u_k(x) = b_k e^{-i k x} + c_k e^{i k x},$$

avec $b_k^* = a_k$ puisque $\langle \alpha \rangle \in \mathbb{R}$. Après quelques manipulations algébriques, et en utilisant les relations entre les coefficients du développement, on trouve une expression quadridimensionnelle plus explicite, soit

$$\phi(x) = \phi(x, t) = \int d^3 k N_k (a_k e^{i k \cdot x} + a_k^* e^{-i k \cdot x}), \quad (2.80)$$

où l'on rappelle que $k \cdot x = k \cdot x$. De (2.80) et de la mesure invariante (2.74) on voit que le développement de champ, même s'il a été réalisé sur la base d'états tridimensionnels, est invariant, ie que $\langle \alpha \rangle$ est effectivement un scalaire de Lorentz, tant que l'on choisit la normalisation

$$N_k = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_k}}. \quad (2.81)$$

De plus, cette relation permet de retrouver les relations de commutation habituelles après quantification. Notez que l'impulsion conjuguée du champ est simplement

$$7r(\alpha, t) = J \int d^3 k N_k (-i u_k(x) (a_k e^{i k x} - a_k^* e^{-i k x}))_y \quad (2.82)$$

ce que nous obtenons de la même manière que précédemment. Le facteur $(-i u_k(x))_y$ dans l'intégrande de (2.82) implique que ce dernier n'est pas explicitement un scalaire de Lorentz. Ce n'est pas un problème puisque seul le champ doit absolument satisfaire cette propriété.

2.2.2.2 Quantification

Le champ et son élan conjugué peuvent maintenant être « promus » au statut d'opérateurs, ce qui peut être fait en remplaçant les coefficients et par les opérateurs d'annihilation et de création, respectivement, et $\{, \}$. Les parenthèses de Poisson du champ deviennent alors les relations de commutations à temps égal. Si nous imposons

$$[\hat{a}(x), \hat{a}^\dagger(x')] = \delta^3(x - x'), \quad (2.83)$$

et toutes les autres à disparaître, c'est à dire les relations de commutation habituelles, on obtient bien les relations canoniques pour le corps

$$[\hat{a}(x), \hat{p}(x')] = i\delta^3(x - x'), \quad (2.84)$$

un calcul qu'il est recommandé d'effectuer explicitement. Les relations (2.83) et (2.84) ne peuvent être respectées que si la normalisation des modes de champ est donnée par (2.81). Les modes propres de l'opérateur de champ sont maintenant définis par

$$u_k(x, t) = N_k e^{i(kx - Et)} \quad (2.85)$$

de sorte que l'opérateur de champ s'exprime comme

$$\hat{\phi}(x, t) = \int d^3x' [\hat{a}(x') u(x, t) + \hat{a}^\dagger(x') u^*(x, t)]. \quad (2.86)$$

Cette relation peut être inversée pour exprimer les opérateurs de création et d'annihilation en fonction du champ, à savoir

$$(2.87)$$

où la dérivée d est définie par (2.69).

Cette analyse est alors complétée dès que l'on connaît l'hamiltonien, qui est donné par

-2

$$(2.88)$$

On obtient alors

$$H = \int d^3x \left[\frac{1}{2} (\partial_t \phi)^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + V(\phi) \right] \quad (2.89)$$

où nous avons utilisé la relation de commutation (2.83) et défini N_k comme l'opérateur 'nombre de particules dans l'état d'impulsion k ', dont la signification nous amènera à la définition de l'espace de Fock associé à cette théorie.

Une remarque concernant (2.89) s'impose à ce stade. Le deuxième terme, proportionnel à $\int d^3x (\nabla \phi)^2$, est clairement divergent, même dans le cas où l'espace des impulsions est fini, c'est à dire s'il existe un seuil au-dessus duquel on ne peut plus effectuer le calcul. En théorie des champs, telle que discutée ici, cette énergie infinie n'est pas gênante car

elle n'a aucune signification physique puisqu'en pratique seules les différences d'énergie sont mesurables. En pratique, on définit un ordre normal qui met automatiquement les opérateurs de création à gauche et ceux d'annihilation à droite, ou en « normalisant » l'énergie en supprimant simplement l'énergie du vide ainsi obtenue. Cette possibilité n'est malheureusement plus envisageable dès que la théorie est couplée à la gravité. L'énergie du vide prend alors tout son sens et agit comme une constante cosmologique, de toute façon bien plus significative que celle que nous mesurons (Chapitre 12), *C'est, dans l'état actuel des connaissances, le problème le plus sérieux auquel la cosmologie théorique soit confrontée, et il vient de la théorie quantique des champs !*

2.2.2.3 Espace de stockage

La théorie quantique complète est obtenue une fois que nous connaissons l'état des particules. Pour cela, on commence par définir le vide $|0\rangle$ comme étant l'état annihilé par tous les opérateurs d'annihilation, soit $\hat{a}_j|0\rangle = 0$ $\forall j$. On considère par ailleurs que cet état est normalisé, à savoir $\langle 0|0\rangle = 1$. Un état à une particule est alors construit à partir de cet état de vide en lui appliquant un opérateur de création. Nous avons donc

$$|1\rangle = \hat{a}^\dagger |0\rangle, \quad (2.90)$$

normalisé par

$$\langle 1|1\rangle = \langle 0|\hat{a}\hat{a}^\dagger|0\rangle = 1$$

et nous construisons ainsi un espace complet d'états, chaque état ayant $n(\mathbf{k})$ particules dans l'état d'impulsion $\mathbf{k}$. La définition (2.90) montre qu'un état avec $n(\mathbf{k})$ est un état propre de l'opérateur $\hat{A}_\mathbf{k}$, puisque

$$\hat{A}_\mathbf{k} |n(\mathbf{k})\rangle = \hat{a}_\mathbf{k} \hat{a}_\mathbf{k}^\dagger |n(\mathbf{k})\rangle = n(\mathbf{k}) |n(\mathbf{k})\rangle. \quad (2.91)$$

Il s'ensuit que tout état décrivant un ensemble de particules sera un élément de

$$\mathcal{F} \equiv \{|n_1(\mathbf{k}_1), n_2(\mathbf{k}_2), \dots\rangle\}$$

appelé *espace de Fock* et ayant une infinité inexplicable d'états.

Notons enfin qu'à partir de l'état de vide $|0\rangle$, il est possible de produire une particule au point x simplement en appliquant l'opérateur de champ lui-même qui apparaît essentiellement comme la transformée de Fourier de l'état d'une particule avec une impulsion donnée, d'où son interprétation. Notons que cette équation utilise l'opérateur pour générer une particule, ce qui ne joue ici aucun rôle important puisque le champ est réel et donc $\phi = \phi^\dagger$, mais dans le cas plus général d'un champ complexe, la distinction est importante.

$$\phi(x, t) = \langle 0|\phi(x, t)|0\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ik \cdot x}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} | \mathbf{k} \rangle, \quad (2.92)$$

2.2.2.4 Expansion des ondes sphériques

Le développement précédent n'est qu'un cas particulier du développement à base d'états propres de moment exprimés en coordonnées cartésiennes (x, y, z) . Il est également possible

effectuer cette expansion en coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) en utilisant des harmonies sphériques. Dans ce cas, nous divisons le Laplacien en parties radiales et angulaires $\Delta = \Delta_r + \Delta_\Omega$, avec $\Delta_r = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right)$ et $\Delta_\Omega = \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d}{d\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d^2}{d\phi^2}$. Nous exprimons les valeurs propres de

le Laplacien utilisant l'amplitude $p = \sqrt{l(l+1)}$ et deux nombres entiers l et m [$-l \leq m \leq l$]. Le champ scalaire $\psi(r, \theta, \phi)$ peut alors être décomposé en modes propres, $\psi_{lm}(r, \theta, \phi)$, du Laplacien $(\Delta + p^2) \psi_{lm}(r, \theta, \phi) = 0$, (2,93)

qui sont donnés par

$$\psi_{lm}(r, \theta, \phi) = U_{lm}(r) Y_{lm}(\theta, \phi).$$

Puisque les harmonies sphériques sont des solutions de (B.8), (2.93) conduit à une équation différentielle ordinaire pour la partie radiale $U_{lm}(r)$, à savoir

$$r^2 \frac{d^2 U_{lm}}{dr^2} + 2r \frac{dU_{lm}}{dr} + (p^2 r^2 - l(l+1)) U_{lm} = 0, \quad (2,94)$$

dont la solution est une fonction de Bessel sphérique $u_p(r) \propto j_l(pr)$, (Annexe B). Les relations de normalisation des harmonies sphériques (B.15) ainsi que celles des fonctions de Bessel sphériques (B.51) montrent que choisir

les modes du champ scalaire sont normalisés, c'est à dire

$$\int d^3x \psi_{lm}^* \psi_{lm} = 1, \quad (2,95)$$

Notez également qu'avec ces conventions, nous avons la relation de complétude

$$\sum_{lm} \psi_{lm} \psi_{lm}^* = \delta^3(x - x'), \quad (2,96)$$

L'opérateur de champ scalaire s'exprime désormais comme

$$\phi(x, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(a_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right), \quad (2,97)$$

où les opérateurs $a_{\mathbf{p}}$ dépendent explicitement du temps. En insérant la relation (2.97) dans l'équation de Klein-Gordon (2.60), on obtient

$$(\Box + m^2) \phi(x, t) = 0, \quad (2,98)$$

où $\Box = \partial_\mu \partial^\mu = \partial_t^2 - \nabla^2$ pour chaque mode indépendant. La relation (2.98) montre que les opérateurs de création et d'annihilation, qui pourraient a priori dépendre des trois nombres p , t et m , ont une dépendance temporelle qui n'est fonction que de la grandeur p du nombre p , t et m .

élan. Les solutions de l'équation (2.98) sont des exponentielles complexes, de sorte que le champ total prend la forme

roo

r

et l'élan conjugué

$$X \quad . \quad (2.100)$$

Il ne reste plus qu'à utiliser les relations de commutation (2.84) à temps égal et à imposer la même normalisation que précédemment, à savoir $\langle V_p = (2\pi)^{-1} i^{-2}$, pour obtenir les relations de commutation pour les opérateurs de création et d'annihilation

$$J \quad P) \text{ je} \quad (2.101)$$

Le lien entre les représentations cartésiennes et sphériques est obtenu en développant l'onde plane dans la base des ondes sphériques (B.21). En identifiant les coefficients du terme $e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}$ dans les deux développements (2.86) et (2.99), on obtient

$$\hat{a}_{p\ell m} = i^\ell p \int d\theta_p \sin \theta_p d\varphi_p Y_{\ell m}^*(\theta_p, \varphi_p) \hat{a}_p, \quad (2.102)$$

où (θ_p, φ_p) représentent les angles du vecteur $\mathbf{p}$. L'équation (2.102) donne la relation que nous recherchions entre les opérateurs de création et d'annihilation dans les deux représentations, et donc entre les espaces de Fock respectifs.

2.2.3 Le champ scalaire complexe

La généralisation au cas d'un champ scalaire complexe, $\phi > 6 C$, est automatique dès lors qu'on décompose ce champ en ses parties réelle et imaginaire, c'est à dire comme

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{i\alpha} \phi_1 - i e^{i\beta} \phi_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 + i \phi_2)$$

et nous supposons que les parties réelle et imaginaire sont indépendantes. Dans un wav parfaitement équivalent, et c'est le point de vue que nous adopterons, on peut aussi considérer ϕ_1 et ϕ_2 comme deux corps indépendants. Le Lagrangien obtenu dans les deux cas devrait être réel, de sorte que pour un champ massif libre

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_1)^2 - \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_2)^2 - \frac{1}{2} m^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2) \quad (2.103)$$

Notons l'absence du facteur dans le terme de masse, par rapport au Lagrangien (2.61). Ceci est dû au fait que les deux degrés de liberté du champ étant

indépendants, la variation par rapport à ϕ ou ϕ^* ne donne pas le facteur 2 du champ scalaire réel.

Les deux impulsions conjuguées sont

$$\frac{\delta C}{\delta \phi} = -\frac{1}{2} \frac{\delta C}{\delta \phi} = d^2 \text{ et } \frac{\delta C}{\delta \phi^*} = -\frac{1}{2} \frac{\delta C}{\delta \phi^*} = d^2,$$

qui sont en effet des conjugués complexes les uns des autres et sont donc indépendants. La théorie décrivant un champ scalaire complexe est simplement celle de deux champs scalaires réels de même masse, liés l'un à l'autre par le fait qu'ils sont les parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe.

Le tenseur énergie-impulsion est obtenu en additionnant (2.31) sur les degrés de liberté indépendants

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^* \quad (2.104)$$

which gives

On retrouve le même résultat que celui obtenu en utilisant la définition issue de la variation par rapport à la métrique.

Les relations de commutation à temps égal entre les opérateurs de champ et leur moment conjugué sont maintenant

$$[\phi(x), \pi(y)] = i\delta^3(x-y) \quad (2.105)$$

Le développement de modes est de la forme

$$\phi(x, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_k}} \left(\hat{a}_k e^{ik \cdot x} + \hat{b}_k^\dagger e^{-ik \cdot x} \right), \quad (2.106)$$

où nous avons introduit deux ensembles d'opérateurs différents, $\hat{a}_k$ et $\hat{b}_k$, puisque le domaine est complexe. Leurs relations de commutation sont maintenant

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = \delta^3(k-k'), \quad [\hat{b}_k, \hat{b}_{k'}^\dagger] = \delta^3(k-k'), \quad (2.107)$$

tous les autres commutateurs disparaissent.

Avec l'ordre normal des opérateurs discuté dans le cas d'un corps, l'hamiltonien real scalar prend une forme équivalente à (2.89), c'est-à-dire qui montre qu'un champ scalaire complexe peut être interprété comme une collection de deux sortes de parties différentes, mais avec la même masse, correspondant aux deux ensembles d'opérateurs $\hat{a}_k$ et $\hat{b}_k$. L'espace de Fock est alors le produit tensoriel des deux espaces de Fock générés par ces opérateurs, avec une statistique mutuelle, qui est le vide $|0\rangle$, annihilé par $\hat{a}_k$ et $\hat{b}_k$.

$$\hat{H}_c = \int d^3k \omega_k \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k \right) \equiv \int d^3k \omega_k \left[\hat{N}_k^{(a)} + \hat{N}_k^{(b)} \right], \quad (2.108)$$

2.2.3.1 Champ Maxwell ou Proca

Le Lagrangien de a. Le champ vectoriel complexe massif est obtenu en générant le lagrangien de Proca (2.71) comme

$$\mathcal{L}_{p.o.c.} = + M^2 A^* A, \quad (2.109)$$

où comporte désormais quatre composants complexes. Quant au champ scalaire, la masse terni n'a plus le facteur $|$ caractéristique. du champ réel. Ces types de champs peuvent décrire des particules vectorielles chargées, telles que les bosons $W^{\pm}$ médiateurs de l'interaction faible.

L'expansion en opérateurs de création et d'annihilation est analogue à (2.106), à la différence qu'en raison de l'invariance de jauge pour le cas de Maxwell avec masse disparue, ou de la contrainte de jauge pour le cas massif de Proca [voir la discussion ci-dessous (2.71)], le nombre de degrés de liberté n'est pas égal au nombre de composantes du champ (soit quatre), mais trois pour le champ massif et deux dans le cas contraire. Ce point conduit à des subtilités dans la quantification qui sont discutées dans les réf. [7-9] vers lequel nous dirigeons le lecteur.

2.2.3.2 Symétries internes

Le Lagrangien (2.103) ne représente pas seulement deux champs scalaires indépendants de même masse. En effet, ces deux corps sont les composantes d'un nombre complexe et le Lagrangien est donc invariant sous le déphasage

$$\langle / \rangle \rightarrow \langle / \rangle' = e^{i\alpha} \langle / \rangle \text{ et } \langle / \rangle^* \rightarrow \langle / \rangle'^* = e^{-i\alpha} \langle / \rangle^*, \quad (2.110)$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ est une constante arbitraire. Exprimé en termes de parties réelle et imaginaire de $\langle / \rangle$, le déphasage (2.110) correspond à une rotation interne globale. C'est cette invariance qui impose aux états « a » et « b » d'avoir la même masse.

D'après le théorème de Noether, l'existence d'une telle invariance devrait se traduire par l'existence d'une quantité conservée. Pour le déterminer, faisons travailler ns dans la limite $\alpha \ll 1$, de telle sorte que l'on puisse développer l'exponentielle dans (2.110), conduisant à la transformation infinitésimale $\langle / \rangle' = (1 + i\alpha) \langle / \rangle$. Cette transformation étant indépendante des coordonnées spatiales $\mathbf{x}$, nous avons $\partial_\mu \langle / \rangle' = \partial_\mu \langle / \rangle$ dans (2.29), et le courant

est conservé puisque dans ce cas, on a $\partial_\mu \langle / \rangle' = i\alpha \partial_\mu \langle / \rangle$ et $\partial_\mu \langle / \rangle'^* = -i\alpha \partial_\mu \langle / \rangle^*$ (on a supprimé le facteur de normalisation α non pertinent dans cette définition).

La « charge » conservée est obtenue par intégration directe, c'est-à-dire

$$d^3\mathbf{x} (7T\langle / \rangle - 7r^*\langle / \rangle^*). \quad (2.112)$$

Après quantification, cette charge conduit à l'opérateur

$$(2.113)$$

which is indeed time independent since its équation of motion, using the form (2.108) of the Hamiltonian, is

$$f = -M = \ll \gg$$

L'équation (2.113) peut être facilement interprétée en disant que les particules associées aux opérateurs a et b sont des particules de charges opposées ; en réalité, ce sont des antiparticules les unes des autres.

Le champ scalaire complexe n'est qu'un exemple de symétrie interne, en l'occurrence d'une invariance sous transformations d'un groupe $U(1)$. La charge associée est, en général, appelée *hypercharge*, et ne correspond à la charge électrique que dans le cas où le groupe $D(1)$ est celui de l'électromagnétisme. Les différentes particules existantes dont nous ferons l'inventaire dans la section 2.3, indiquent l'existence de plus de symétries, basées sur des groupes de symétrie plus grands.

2.2.3.3 Fermions et relations d'anticommutation

Il est possible d'étendre le champ de Dirac (2.63) de la même manière que dans l'expansion - (2,106), avec une différence importante cependant : les opérateurs de champ, et donc ceux associés à l'annihilation et à la création de particules, doivent respecter relations de mutation anticom au lieu de relations de commutation du type (2.83) ou (2.84). Le problème de cohérence lié à ce point est rendu explicite dans les réfs. [7,8], et dépasse le cadre de cette présentation. Il suffira de savoir que pour les fermions il faut remplacer les crochets de Poisson par des relations d'anticommutation

$$= ij >_a(x,t) ij > l(x',t) + \wedge(\mathfrak{a} \backslash t) \wedge_a(E, \wedge) = < W^{(3)}(x - a:'), (2,114)$$

et

$$(2.115)$$

où nous avons utilisé le fait que, d'après le lagrangien (2.63), l'impulsion conjuguale du spineur est donnée par

$$\overline{d^0} \quad (2.116)$$

Notez que ces anticommutateurs, de la même manière que les commutateurs des champs bosoniques, sont pris à des temps égaux. A ce stade, il est intéressant de noter que si l'on se place dans le contexte de la théorie des champs à température finie (théorie des champs thermiques, voir og, Ref. [10]), alors ces relations d'anticommutation sont nécessaires pour que les fermions satisfassent aux Principe d'exclusion de Pauli; de plus, ils conduisent à la bonne loi de distribution statistique, c'est-à-dire la loi de Fermi-Dirac (tout comme les relations de commutation pour les bosons conduisent à la distribution de Bose-Einstein).

2.3 Classification et propriétés des particules élémentaires

Les propriétés générales des particules élémentaires sont rassemblées dans le tableau 2.1 (voir Réf. [11]). Quand on regarde ces propriétés, on retrouve des structures, telles qu'illustrées par exemple sur la Fig. 2.1 montrant le cas particulier des baryons de spin $\frac{1}{2}$ et de parité positive (la parité est définie plus loin, ici ce n'est qu'une illustration).

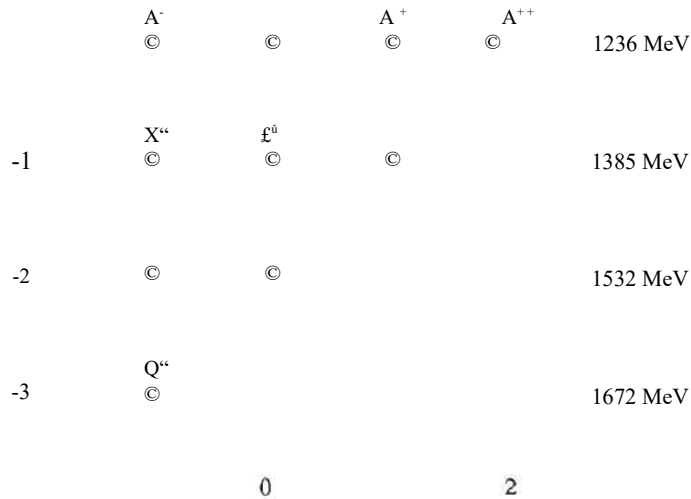


Fig. 2.1 Un exemple de structure observée entre les particules élémentaires : les baryons de spin et de parité positive.

Tableau 2.1 Nomenclature des particules élémentaires. Les familles basées sur les quarks (q) comptent plusieurs centaines de particules identifiées jusqu'à présent, tandis que les leptons et les champs de jauge sont ici présentés de manière exhaustive dans le cadre du mode standard !. Les champs de jauge s'écrivent de la façon suivante : γ est le photon, les Z^0 et les bosons sont les médiateurs de l'interaction faible, et g^a représentent les 8 gluons de l'interaction forte.

Exemples de rotation de noms

(Baryons = qq $\bar{q}$	n +	p ⁺ , n ⁰ , A, A, E, n, E
Hadrons <		
[Mésons = q $\bar{q}$	n	$\pi^+, \pi^-, \eta, \omega, \rho^0, \rho^\pm, \dots$
Lepcons	1	e^-, μ^-, τ^-
Champs de jauge	1	$\gamma, Z^0, W^\pm, g^a$

Ce type de schéma a permis de comprendre l'existence d'une structure très précise, dont l'histoire est évoquée dans la Réf. [12]. Dans ce qui suit, nous indiquerons seulement le résultat de nombreuses années de recherche expérimentale qui ont conduit au modèle dit « standard » de la physique des particules, dont la théorie fait l'objet de la section 2.6. 2.3.0.4 *Échange de bosons*

Les particules connues se présentent sous trois formes. Tout d'abord, on retrouve les bosons de spin unitaire, médiateurs des interactions fondamentales : ce sont les bosons de jauge, à savoir le photon γ , qui médialise l'interaction électromagnétique, les huit gluons g^a , qui médialisent l'interaction nucléaire forte, et les vecteurs $W^\pm$. Ces derniers ont la propriété d'être massifs et sont donc décrits par le Lagrangien de Proca (2.109), du moins tant qu'on ignore leurs interactions. Les vecteurs Z^0 et $W^\pm$ permettent à l'interaction nucléaire faible de se propager, $W^\pm$ sont en outre chargés électriquement.

Selon les idées théoriques actuelles, pour être complété, il faudrait ajouter à ce tableau le graviton, « particule » sans masse (dans le cadre d'une théorie quantique de la gravité équivalente à celle des autres interactions) de spin 2 responsable de l'interaction gravitationnelle. (Chapitre 1). En l'absence de théorie quantique satisfaisante de la gravité, nous ne considérons pas pour l'instant le graviton comme une particule élémentaire appartenant au modèle standard.

2.3.0.5 Leptons

De spin les leptons, parmi lesquels l'électron est le plus connu, sont de charge électrique négative (e^- , μ^- et τ^-) ou nulle (ν_e , et qui sont les neutrinos associés). L'évolution de ces particules est dictée par l'équation de Dirac, couplée ou non à l'électromagnétisme selon les cas. Ils sont également soumis à l'interaction faible et peuvent être regroupés en trois « doublets »

$$\begin{pmatrix} e^- \\ \nu_e \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mu^- \\ \nu_\mu \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} \tau^- \\ \nu_\tau \end{pmatrix}$$

qui ont exactement les mêmes propriétés vis-à-vis de cette interaction faible. En fait, la seule caractéristique qui permet de distinguer ces différents doublets est la masse des particules qui les constituent. De plus, parmi eux, seul le doublet de l'électron est stable, les autres, de masse plus élevée, sont soumis aux interactions faibles et électromagnétiques, et peuvent se désintégrer, par exemple, en électrons et électrons-neutrinos.

Pendant longtemps, on a considéré que les neutrinos avaient une masse évanouissante, mais certaines expériences et mesures récentes (voir Réf. [2] du chapitre 9) ont montré qu'il devait y avoir un mélange entre les différentes espèces de neutrinos, ce qui est possible uniquement pour les particules massives.

2.3.0.6 Hadrons

Une seule catégorie de particules, même si elle est la plus nombreuse, est soumise à l'interaction forte : ce sont les hadrons. Ils peuvent être de spin demi-entier, comme le proton et le neutron, et appartenir alors à la catégorie des baryons. Les mésons, de spin entier ou nul, comptent parmi eux, par exemple, le π^0 et ses partenaires chargés $\pi^\pm$, qui sont décrits par l'équation de Klein-Gordon pour les champs scalaires réels (comme le π^0) ou le complexe (pour le $\pi^\pm$).

La profusion surprenante des hadrons, ainsi que les propriétés de symétrie observées entre les différents éléments des familles partageant certaines propriétés (spin et parité, par exemple, comme dans l'illustration de la Fig. 2.1) ont conduit à comprendre que ces particules, contrairement à ce que l'on pense actuellement des bosons de jauge et des leptons, ne sont pas des particules élémentaires, mais sont constitués de « quarks ». ⁵Ces derniers sont destinés au

⁵Selon la légende, ce mot aurait été proposé par Murray Gell-Mann (Prix Nobel 1969) qui l'aurait interprété dans le livre 'Finnegan's Wake' de James Joyce.

moment vu comme effectivement élémentaire, de spin et de charge électrique $+\frac{1}{3}$ pour les quarks u , c et t , et pour les quarks d , s et b . On peut aussi les regrouper en doublets pour l'interaction faible, de structure similaire à celle des leptons, plus précisément

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$$

Cette description, satisfaisante du point de vue théorique, ne dispose actuellement d'aucune explication généralement acceptée (même si de nombreux modèles existent).

Les noms des quarks eux-mêmes proviennent de cette structure : à l'époque où seule la première famille était accessible expérimentalement, les noms choisis étaient simplement *up* (u) et *down* (d). Ensuite, il a fallu introduire un troisième quark, considéré comme *étrange* (s). La deuxième famille fut alors complétée par le charme (c). Dans la même philosophie, lorsque la présence du cinquième quark commença à apparaître, le nom de beauté (b) fut proposé, bientôt remplacé par *bottom* permettant de reproduire la première famille avec le *top* (t).

Comme pour les leptons, la seule différence entre les familles de quarks vient de leurs masses, ainsi que du fait que seuls les membres de la première famille sont stables. Ceux des deuxième et troisième familles se désintègrent beaucoup plus rapidement que leurs homologues leptoniques puisqu'ils le font par l'interaction forte au lieu de l'interaction faible, cette dernière ayant une amplitude beaucoup plus faible, comme son nom l'indique.

Toutes ces particules ont été produites dans des accélérateurs, mais n'ont jamais été observées seules, ce qui s'explique par la notion de confinement des interactions fortes. C'est ainsi qu'il n'est possible d'observer que des états contenant trois quarks, des états baryoniques de spin demi-entier, et des états composés d'un quark et d'un antiquark, de spin entier : un méson. Ce point n'est pas encore complètement compris théoriquement.

Le tableau 2.1 résume la nomenclature utilisée pour décrire la diversité des particules élémentaires. L'origine de la masse de toutes ces particules, ainsi que les disparités importantes observées entre elles, posent encore de nombreuses questions qui ne sont pas encore toutes résolues.

Comme on peut le constater, les particules connues reflètent, ou semblent refléter, certains éléments de symétrie. Celles-ci sont décrites par la théorie des groupes, à laquelle nous nous tournons maintenant.

2.4 Symétries internes

Contrairement aux leptons, qui apparaissent tous en doublets, les hadrons se présentent sous de nombreuses formes, suggérant qu'ils ne sont pas élémentaires. En réalité, en utilisant un nombre beaucoup plus restreint de particules élémentaires, en l'occurrence des quarks, et en les plaçant de manière pertinente dans des représentations de groupe, il est effectivement possible de les combiner pour que les autres représentations soient perçues comme de nouvelles particules élémentaires. Le rôle de la théorie des groupes est précisément de nous conduire à cette conclusion.

2.4.1 Théorie des groupes

2.4.1.1 Définitions

Un groupe Q est défini comme une collection d'objets (π_i), où l'indice i n'est pas nécessairement discret, satisfaisant aux règles suivantes :

- Il existe une loi de composition, notée $\circ$, qui peut combiner deux éléments quelconques du groupe, la combinaison résultante étant un élément du groupe : si $g \in Q$ et $g' \in Q$, alors $g \circ g' \in Q$. De plus, cette loi est associative, soit $(g \circ g') \circ g'' = g \circ (g' \circ g'')$.
- Il existe un élément neutre, noté 1 , tel que $\forall g \in Q, 1 \circ g = g \circ 1 = g$.
- Chaque élément $g \in Q$ est associé à un élément inverse, noté g^{-1} satisfaisant $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = 1$.

Notons que la loi $\circ$ n'est pas nécessairement commutative : lorsqu'elle l'est, c'est à dire si $\forall g, g' \in Q, g \circ g' = g' \circ g$, le groupe est alors dit *abélien*. Dans le cas contraire, le groupe est généralement dit *non-abélien*.

Le groupe le plus simple auquel on puisse penser, outre le groupe trivial qui ne contient qu'un seul élément, est le groupe discret $\mathbb{Z}_2$ qui contient deux éléments, notés 1 (qui est l'identité) et -1 avec la loi de multiplication ordinaire. Il s'agit d'un groupe abélien pour lequel chaque élément est son propre inverse. Pour les groupes discrets, on peut construire le tableau complet de toutes les opérations possibles.

2.4.1.2 Groupes de mensonge

Un autre exemple bien connu de groupe est celui des translations qui transforme un point de l'espace x en $x + a$. Dans ce cas, n'importe quel élément du groupe peut être directement associé à un vecteur de translation a : la loi de composition est l'addition vectorielle, l'élément inverse de a est simplement $-a$, et l'identité est la translation par le vecteur nul 0 . C'est encore un groupe abélien.

Un tel groupe contient une infinité d'éléments, qui peuvent tous être identifiés par la connaissance de trois nombres réels (les trois coordonnées du vecteur de translation). Plus généralement, s'il est possible de décrire les éléments d'un groupe par un ensemble de nombres variant dans un intervalle continu (mais pas nécessairement infini), il s'agit alors d'un groupe de Lie. Un groupe de Lie est aussi un collecteur.

Le groupe non-abélien le plus connu est probablement celui des rotations en trois dimensions. Chaque rotation est déterminée, par exemple, par les trois angles d'Euler, ou de manière équivalente, par un vecteur unitaire (axe de rotation) et l'angle de rotation autour de cet axe de rotation. La composition de deux rotations est équivalente à une troisième rotation, ce qui en fait un groupe (puisque'une rotation peut toujours être inversée en effectuant la même rotation dans l'autre sens, et donc une rotation d'angle zéro est l'identité), mais l'ordre dans lequel s'effectuent les rotations est crucial et ce groupe n'est pas abélien. Ce groupe, noté $SO(3)$, est identique au groupe formé par les matrices orthogonales 3×3 à déterminant unitaire. On peut le généraliser au groupe $SO(n)$, qui contient les matrices orthogonales $n \times n$ de déterminant unitaire.

Chaque groupe est associé à une invariance. Par exemple, dans le cas d'une rotation, la norme d'un vecteur sur lequel la rotation a été effectuée reste inchangée lors de la transformation. Une rotation dans un espace de Minkowski généralisé, c'est-à-dire ayant p dimensions spatiales et g dimensions temporelles, doit garder la forme

invariable.

fourni; il contient non seulement des rotations dans l'espace à p dimensions, mais aussi de pures transformations de Lorentz (quelques « boosts »). Ce groupe, généralisant $SO(n)$ pour des signatures métriques arbitraires, décrit p coordonnées spatiales et g temporelles, et est

noté $SO(p, g)$. Le groupe dit de Lorentz est alors simplement $SO(3, 1)$. Le groupe de traduction peut être associé au groupe de Lorentz pour former le groupe de Poincaré sur lequel repose la relativité restreinte (voir chapitre 1).

2.4.2 Générateurs

2.4.2.1 Transformations infinitésimales

Une transformation infinitésimale, T_ϵ , d'un groupe de Lie est une transformation proche de l'identité et peut donc toujours s'écrire $T_\epsilon \sim 1 + \epsilon A^\alpha$. Ceci définit les générateurs A^α , qui sont des matrices hermitiennes et dépendent de la nature de la transformation effectuée. Nous supposons ici que le groupe de Lie est décrit par p paramètres, soit $a = 1, \dots, p$.

Une transformation finie peut être obtenue à partir d'une transformation infinitésimale par exponentiation. Une telle transformation finie peut toujours s'écrire comme la composition d'un grand nombre, tendant vers l'infini, de transformations infinitésimales. Si ϵ représente les p nombres nécessaires à la transformation finie, alors on peut toujours écrire $\epsilon = a/N$, où $N \gg 1$, et effectuer N transformations conduira bien à la transformation finie. Autrement dit, nous aurons

$$T_a = \lim_{N \rightarrow \infty} (1 + \epsilon A^\alpha)^N = e^{i\epsilon A^\alpha} \quad (2.117)$$

qui est la forme générale d'une transformation finie du groupe.

2.4.2.2 Algèbre de Lie

Pour que $T_a T_b$ soit une transformation de groupe, T_y par exemple, il faut avoir la propriété

$$[A^\alpha, A^\beta] = i f_{\alpha\beta}^\gamma A^\gamma \quad (2.118)$$

Pour les transformations infinitésimales cela donne du second ordre dans le développement des exponentielles

$$e^{i\epsilon A^\alpha} e^{i\epsilon A^\beta} = 1 + i\epsilon (A^\alpha + A^\beta) - \frac{\epsilon^2}{2} (A^\alpha A^\beta + A^\beta A^\alpha) + \frac{\epsilon^2}{2} [A^\alpha, A^\beta] + \dots$$

dont le logarithme, également étendu au second ordre [en utilisant la relation $\ln(1 + \epsilon) = \epsilon - \frac{\epsilon^2}{2} + \dots$], doit être proportionnel à A^α . On retrouve explicitement

$$[A^\alpha, A^\beta] = i f_{\alpha\beta}^\gamma A^\gamma$$

Cette égalité n'est en général satisfaite que si le commutateur du A satisfait

$$[A^\alpha, A^\beta] = i f_{\alpha\beta}^\gamma A^\gamma \quad (2.119)$$

Cette relation définit l'algèbre associée au groupe de Lie, c'est-à-dire l'ensemble des opérateurs de la forme ϵA^α . Les nombres $f_{\alpha\beta}^\gamma$ sont les constantes de structure du groupe, et les A^α forment son algèbre. Notez que puisque les générateurs sont des opérateurs hermitiens, les constantes de structure sont des nombres réels.

2.4.2.3 Représentations

Afin de pouvoir classer les particules en termes de groupes de symétrie, il faut les trier en

fonction des représentations du groupe de l'invariance considérée. Une représentation à n dimensions étant un ensemble $\{T^a\}$ de $n \times n$ matrices satisfaisant les relations de commutation (2.119) de l'algèbre, les champs qui décrivent les particules d'une représentation donnée seront regroupés en multiplets $\{\psi_a\}$, $a = 1, \dots, n$, sur lequel l'action du groupe est

$$\psi_a \rightarrow (T^a)_a{}^b \psi_b, \quad (2.120)$$

Il est habituel de dire que ψ_a se transforme sous la représentation R^a ou plus directement, que ψ_a est 'dans la représentation R^a '. Si deux représentations sont liées entre elles par une transformation de similarité, c'est à dire

$$R^a = U R^a U^{-1}$$

où U est unitaire ($U^\dagger = U^{-1}$), alors on dit qu'ils sont équivalents. Autrement dit, à toutes fins pratiques, il s'agit de la même représentation, de sorte que la transformation de similarité n'apporte aucune information complémentaire. S'il existe un sous-espace invariant dans la représentation, c'est-à-dire si l'action d'un élément quelconque du groupe sur les vecteurs de ce sous-espace conduit à un élément de ce même sous-espace, alors la représentation est dite réductible. Dans le cas contraire, on le dit *irréductible*. Seules les représentations irréductibles sont utilisées pour classer les particules dans les représentations des groupes d'invariance.

De plus, si $\{R^a\}$ forme une représentation, alors $\{R^{a\dagger}\}$, que l'on appelle la 'représentation conjuguée', [on peut facilement être convaincu que ces matrices respectent également la relation de clôture algébrique (2.119) puisque les constantes de structure du groupe sont réelles], si une représentation et son conjugué sont équivalents alors nous avons affaire à une représentation dite réelle. Sinon, on dit que la représentation est complexe. Pour qu'un groupe puisse potentiellement reproduire les symétries internes de la physique des particules, il est souvent nécessaire qu'il dispose de représentations complexes dans lesquelles les fermions peuvent être placés de manière simple.

Les représentations les plus pertinentes pour la physique quantique sont celles qui préservent la norme définie par

$$|\psi|^2 = \psi^\dagger \psi,$$

du multiplet ψ . Pour que la norme soit conservée lors d'une transformation arbitraire R^a on voit qu'il faut avoir

$$(R^a)^\dagger = (R^a)^{-1}$$

pour toutes les transformations R^a . Il faudrait donc exiger que $(R^a)^\dagger R^a = 1$, c'est à dire qu'il s'agisse d'une transformation unitaire. Une représentation satisfaisant cette condition est une représentation unitaire.

Enfin, la représentation adjointe d'un groupe de Lie est formée à l'aide de ses constantes de structure. C'est une représentation de même dimension que l'ordre du groupe, dans laquelle les éléments matriciels de sont

$$(T^a)^b{}_c = -i f^a{}_{bc}. \quad (2.121)$$

2.4.2.4 Classification du bronzage des voitures

Outre les symétries spatio-temporelles (groupe de Poincaré), les groupes d'invariance utiles du point de vue de la classification des particules sont les compacts, c'est à dire dont les paramètres varient sur un intervalle fini, comme s'il s'agissait de rotations généralisées dans

un espace interne (et dans de nombreux cas, c'est en fait précisément l'invariance requise). De plus, nous souhaitons classer les particules selon des invariances « fondamentales », c'est à dire sans sous-structure (nous verrons plus tard qu'une seule constante de couplage entre en jeu dans ces groupes, ce qui les rend encore plus intéressants). C'est pourquoi on s'intéresse aux groupes simples : si H est un sous-groupe de Q et si $\forall g \in G$ et $\forall A \in$ l'élément $g \circ h \circ g^{-1}$ est encore dans H , alors H est un sous-groupe invariant de Q . Q est simple s'il n'y a pas de sous-groupe invariant dans G , et semi-simple s'il ne contient aucun sous-groupe invariant abélien. On peut montrer qu'un groupe compact et semi-simple est donc soit forcé d'être simple, soit est le produit direct de deux ou plusieurs groupes simples. Selon cette philosophie, l'étude des groupes de Lie simples suffit donc à classer tous les groupes compacts semi-simples. Notons aussi que les groupes de structure $5 \times$ avec un groupe semi-simple et n un entier arbitraire, appelés groupes réductibles, ont des représentations qui peuvent toutes être décomposées en produit de représentations irréductibles ; cette propriété les rend particulièrement intéressantes pour la classification des particules élémentaires.

Puisque les groupes de Lie simples sont également soumis à la contrainte (2.119), ils peuvent être classés en fonction de leurs constantes de structure. Cette classification a été réalisée par E. Cartan au début du XXe siècle. Il a prouvé que les groupes de Lie simples pouvaient être classés en 4 grandes catégories, à savoir $SO(2n)$, $S(2n-1)$, $SU(n+1)$ et $Sp(2n)$, auxquelles il faut ajouter le so- appelés groupes exceptionnels, qui ne peuvent être classés dans aucune de ces catégories, appelés G_2 , F_4 , E_6 , E_7 et E_8 . Pour les quatre séquences infinies, n est le rang du groupe, c'est à dire le nombre maximal de générateurs pouvant être diagonalisés simultanément. Pour les groupes exceptionnels, le rang est donné par l'indice dans la notation. Pour chaque groupe, l'ordre, c'est à dire le nombre de générateurs, est indiqué dans le tableau 2.2.

Tableau 2.2 Ordre (nombre de générateurs) ou dimension des groupes de Lie simples de rang n selon la classification de Cartan (l'indice des groupes exceptionnels est le rang).

Groupe	^gen erators	
$SU(n+1)$	$(n+1)$	$n(n+2)$
$SO(2n)$	$(2n)$	$n(2n+1)$
$Sp(2n)$	$(2n)$	$n(2n+1)$
$SO(2n)$	$(2n)$	$n(2n-1)$
G_2		14
F_4		52
E_6		78
E_7		133
E_8		248

Les groupes des quatre séquences infinies peuvent être compris à partir de leur représentation fondamentale, c'est-à-dire celle de plus petite dimension (à partir de laquelle, par produit direct, peuvent être construites toutes les autres représentations). L'ensemble de toutes les matrices unitaires complexes de dimension $n \times n$ forme le groupe $U(n)$ (« U » pour « unitaire »), le sous-groupe restreint aux matrices déterminantes unitaires est $SU(n)$ (« S » pour « spécial »). C'est l'ensemble des transformations qui laissent invariant le produit scalaire de deux vecteurs d'un espace complexe de dimension n . Les transformations de ce groupe laissent invariante, entre autres, la norme des vecteurs complexes et peuvent être utilisées en mécanique quantique pour assurer la conservation des probabilités.

La séquence $SO(n)$ est construite à partir des matrices qui laissent invariant le produit scalaire de deux vecteurs réels. Ce sont des matrices orthogonales (d'où le 'O') à déterminant unitaire (spécial) de dimension $n \times n$. Enfin, le groupe $Sp(2n)$ regroupe toutes les matrices M de dimension $2n \times 2n$ qui laissent invariante la matrice antisymétrique

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ces matrices satisfont donc $M^T S M = S$, où M^T est la matrice transposée de M . Ainsi, la forme antisymétrique et quadratique $y^L S x$ pour deux vecteurs réels de dimension $2n$ est conservée. Les matrices M ainsi définies sont appelées matrices symplectiques, d'où le nom du groupe.

Les seules transformations qui permettent de conserver les probabilités en mécanique quantique sont celles qui sont unitaires. Peut-on donc en déduire que seuls les groupes de type $SU(n)$ peuvent jouer un rôle en physique, et que donc toutes les théories devraient être basées sur un tel groupe ? Malheureusement, la réponse à cette question est négative : certaines représentations des groupes classés par Cartan sont unitaires, tout en respectant les règles de leur classification. On ne peut donc exclure un groupe comme invariance interne possible que si l'on peut montrer qu'il n'a pas de représentation unitaire. C'est par exemple le cas de $SO(11)$, qui est donc exclu en tant que candidat d'un grand groupe d'unification. C'est pourquoi il est indispensable d'étudier en détail les représentations des groupes de Lie possibles.

2.5 Rupture de symétrie

Toutes les symétries existant dans la nature ne sont pas manifestes, et certaines sous-jacentes ne sont pas immédiatement visibles à basse énergie. C'est par exemple le cas des doublets du type (e^-, ν_e) . Si ces particules appartiennent réellement à la même représentation du groupe de jauge de l'interaction faible, pourquoi n'ont-elles pas également les mêmes caractéristiques (masse, charge électrique, par exemple) ? La réponse à cette question repose sur le mécanisme qui permet de briser les symétries, et notamment celles jaugées.

2.5.1 Groupe de jauge

Nous sommes généralement confrontés à des invariances de « jauge », c'est-à-dire des invariances locales. Cela conduit à l'existence d'un boson de jauge, à travers lequel certaines interactions s'effectuent : *la présence d'une symétrie jaugée (locale) en physique des particules, comme en gravité, implique l'existence d'une interaction.*

2.5.1.1 Symétries locales

L'illustration la plus simple d'une symétrie locale est donnée par l'électromagnétisme. Son action est invariante sous la transformation du groupe $U(1)$, ce qui conduit à la prédiction de l'existence du photon, soit le terme (1.94) du chapitre 1 dans l'action totale.

Considérons un champ scalaire complexe, $\psi(x^\mu)$ GC, invariant par les transformations de phase $\psi \rightarrow e^{ic\alpha} \psi$, où c est une constante réelle. Si un seul champ est présent, peut être mis égal à l'unité, mais s'il y a plusieurs champs, le rapport des facteurs c donne le rapport des « charges » des différents champs sous la transformation $U(1)$. Si le Lagrangien de ce corps est de la forme (2.103), il reste inchangé sous la transformation tant que a est une constante. Cependant, si $a = cv(x^\mu)$, le terme cinétique n'est pas invariant et se transforme comme

$$\begin{aligned} & \sim \frac{1}{2} (D_\mu \psi)^\dagger D^\mu \psi \rightarrow \frac{1}{2} (D_\mu \psi)^\dagger e^{ic\alpha} e^{-ic\alpha} D^\mu \psi \\ & = \frac{1}{2} (D_\mu \psi)^\dagger D^\mu \psi + \frac{1}{2} (D_\mu \psi)^\dagger (-ic\partial_\mu \alpha) \psi + \frac{1}{2} (D_\mu \psi)^\dagger \psi (ic\partial_\mu \alpha) \end{aligned} \quad (2.122)$$

où le courant conservé $j^\mu = i(\psi^\dagger \partial^\mu \psi - \partial^\mu \psi^\dagger \psi)$ est donné par (2.111). On peut noter ici que ce terme, proportionnel au courant conservé, conduit, après intégration par parties, à un terme superficiel dans l'action et n'a donc aucun effet physique. Malgré cela, l'action n'est toujours pas invariante puisque le dernier terme reste.

2.5.1.2 Boson de jauge

La forme (2.122) suggère le remplacement de la dérivée partielle par une dérivée covariante de jauge en introduisant un nouveau champ de vecteurs C^μ . Si l'on définit

$$D^\mu = (\partial^\mu - igcC^\mu) \quad (2.123)$$

avec g une constante de couplage arbitraire, on trouve que ce terme se transforme comme

$$D^\mu \psi \rightarrow (D^\mu \psi)' = \left[\partial^\mu + igc_\psi \left(C'^\mu + \frac{1}{g} \partial^\mu \alpha \right) \right] \psi.$$

On peut donc simplement imposer de transformer comme

$$C^\mu \rightarrow C'^\mu = C^\mu - \frac{1}{g} \partial^\mu \alpha, \quad (2.124)$$

in order for the action to be again invariant, whatever the value of c . Since the

l'action (1.94) avec la métrique de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ est également invariante sous la transformation (2.124), on peut donc considérer l'action plus générale suivante

$$S_s = \int d^4x \left[(D_\mu \psi)^\dagger D^\mu \psi - V(|\psi|) - \frac{1}{4} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} \right] \quad (2.125)$$

où $\rightarrow d_\mu C^\mu$ et nous avons généralisé le potentiel du champ scalaire pour que ce soit une fonction arbitraire a priori de la norme du champ $|\phi|^2 = \phi^\dagger \phi$. L'action (2.125) est à la base de l'*électrodynamique scalaire*, un exemple de théorie de jauge.

Notons que (2.125) n'a pas de terme de masse pour le champ vectoriel G^μ . Cela vient du fait qu'un tel terme, décrit par le Lagrangien de Proca (2.71), n'est pas invariant sous la transformation (2.124).

L'action (2.125) peut être généralisée au cas où le groupe de jauge n'est pas abélien, c'est ce qui est fait dans le cadre du modèle standard de la section 2.6. Notons déjà ici que les bosons de jauge introduits dans le cadre des théories non-abéliennes ne peuvent pas non plus être massifs, pour la même raison qu'un terme de masse à la Proca n'est pas invariant de jauge.

2.5.1.3 Fermions

De manière similaire, l'action des fermions (2.67) est rendue invariante sous la transformation locale $\psi \rightarrow V \psi$ en remplaçant la dérivée partielle par la jauge dérivée covariante

$$D_\mu = (\partial_\mu + ig A_\mu \gamma_5). \quad (2.126)$$

On voit aussi qu'un terme de couplage supplémentaire avec le champ scalaire peut être introduit. Enfin, l'action pour les fermions, peut s'écrire sous une forme générale comme avec f une constante arbitraire, ce qui, en plus de (2.125), permet de décrire une théorie contenant un fermion et un champ scalaire complexe couplé via un vecteur intermédiaire. On voit aussi que le fermion peut avoir un terme purement massif en plus de son couplage avec le champ scalaire, tout en respectant l'invariance.

$$S_f = - \int d^4x \left[\frac{1}{2} \bar{\psi} i \gamma_\mu \overleftrightarrow{D}^\mu \psi + \bar{\psi} (m_f + f |\phi|) \psi \right], \quad (2.127)$$

2.5.2 Mécanisme de Higgs

Le mécanisme de Higgs permet de construire une théorie invariante sous les transformations d'un groupe donné, alors que cette invariance n'est pas manifeste. En d'autres termes, cela permet d'imposer une invariance avec certaines propriétés à des théories qui ne semblent pas l'avoir, comme c'est par exemple le cas pour les théories ayant des bosons de jauge massifs.

2.5.2.1 Potentiel de Higgs

Nous considérons un champ scalaire complexe (ϕ) et un champ de jauge A^μ dont la dynamique est décrite par l'action (2.125). Pour des raisons techniques que nous n'aborderons pas ici (de renormalisation, voir par exemple Réf. [7]), le potentiel $V(|\phi|)$ ne peut pas introduire de puissances de $|\phi|$ supérieures à 4. On choisit généralement un terme quadratique, c'est à dire qu'on postule une masse pour le champ scalaire, et un terme quartique, dans $|\phi|^4$. Dans le cas du mécanisme de Higgs, le potentiel choisi est donné par

$$V_{\text{Higgs}}(|\phi|) = \frac{1}{2} \mu^2 |\phi|^2 + \frac{\lambda}{4} |\phi|^4, \quad (2.128)$$

représenté sur la figure 2.2. Le paramètre μ , ayant la dimension d'une masse, est appelé « valeur attendue du vide » (VEV).

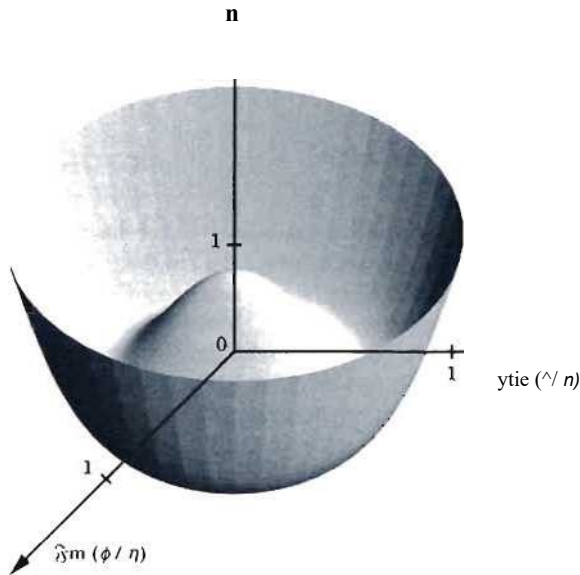


Fig. 2.2 The Higgs potential as a function of the components (real and imaginary parts) of the Higgs field. The circle $|\langle \phi \rangle|^2 = \eta^2$ indicates the set of possible minima.

Pour que la théorie ait un sens, il faut d'abord définir le vide. Il peut être obtenu, au niveau classique, en exigeant que l'énergie, c'est-à-dire l'hamiltonien, soit un minimum. Une simple généralisation de (2.88) donne dans ce cas

$$H(x, t) = p + (V\langle \phi \rangle)^2 + 2VZ(0) \quad (2.129)$$

qui est la somme de deux termes définis positifs et du potentiel. En conséquence, l'énergie minimale est atteinte lorsque le champ est invariant par rapport à la transformation de l'espace et du temps, de sorte que $\langle j \rangle = V\phi = 0$. De plus, le potentiel doit également être minimisé, ce qui conduit à

$$\begin{aligned} \hat{\phi} = 0 \\ d\phi < p \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad 0^* \left(|\langle \phi \rangle|^2 - T; \eta^2 \right) = 0. \quad (2.130)$$

Comme illustré sur la figure 2.2, l'une des solutions, ici $\langle j \rangle = 0$, représente un maximum local du potentiel, c'est donc un état instable de la théorie. La deuxième solution, $|0\rangle \rightarrow r\phi$, par contre, est le minimum absolu du potentiel. C'est la valeur que prendra donc naturellement le champ et qui décrit l'état de vide de la théorie (d'où le nom du paramètre r).

2.5.2.2 Boson de pierre d'or

L'expansion du champ 0 autour de son VEV est

$$\begin{aligned} 0 = r, + \hat{\phi} = h(x, t) \\ \cdot \sqrt{2} \end{aligned} \quad (2.131)$$

où h et B sont deux corps réels. Notant $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \Delta y$, le potentiel de h et B peut s'écrire comme suit :

$$V(M) = \quad (2.132)$$

et est indépendant de B . Ceci peut facilement être compris en examinant le potentiel : les fluctuations h et B autour de la valeur attendue du champ correspondent à des fluctuations soit selon la direction radiale (h), modifiant ainsi l'énergie de la configuration, soit le long du cercle des minima (0), qui par définition ne coûtent aucune énergie. Le champ h est appelé champ de Higgs, tandis que B est le boson de Goldstone.

2.5.2.3 Masses des bosons et des fermions

Le degré de liberté correspondant au boson de Goldstone n'est pas physique. En fait il est toujours possible de choisir une jauge dans laquelle il est supprimé, puisque le seul endroit où il entre est dans le terme cinématique du champ ϕ , qui peut être développé comme

$$(D_\mu \phi)^* D^\mu \phi = \frac{1}{2} (\partial h)^2 + \left(\eta + \frac{75}{\sqrt{2}} \pi \right)^2 \quad \blacksquare \quad (2J33)$$

En choisissant la jauge dans laquelle $\eta = (t^3 - t^8)/\sqrt{277} \text{pc}^2$, le champ B complètement disparaît.

Après avoir développé la partie cinématique (2.133) du champ scalaire ϕ , on peut voir apparaître un terme similaire à celui de Proca (2.70) pour le champ vectoriel C_μ . Cela implique que le champ a gagné en masse au cours de ce processus. Après identification, on trouve $M_C = x/\sqrt{g}c^2$. L'apparition d'un champ vectoriel massif peut s'expliquer par la perte du boson de la pierre d'Or. Le degré de liberté correspondant ne peut pas avoir complètement disparu, mais il a en fait été complètement absorbé (« mangé », comme on l'écrit parfois) par le champ de jauge. Un champ vectoriel sans masse ne possède en effet que deux degrés de liberté, correspondant dans la théorie classique aux deux modes de polarisation transverse, soit circulaire, soit linéaire. D'un autre côté, un champ vectoriel massif évolue de telle sorte que son moment cinétique a une projection nulle, et a donc trois modes possibles.

Le couplage du scalaire ϕ au fermion dans (2.127) entraîne une modification de la masse du fermion, qui est augmentée (ou diminuée, selon le signe de la constante de couplage f), de $\Delta m = f\phi$. Ainsi, si le fermion était par symétrie initialement sans masse, comme c'est le cas dans le modèle standard électrofaible et fort, il acquerra donc une masse, de la même manière que le champ de jauge. C'est pourquoi des fermions de masses extrêmement différentes peuvent être placés dans un même multiplet. Nous verrons plus loin, dans le cadre du modèle standard des interactions électrofaibles et fortes, comment ce processus est appliqué dans un cas précis, et vérifié expérimentalement.

2.5.3 Cas non abélien

Le mécanisme de Higgs peut facilement être généralisé à un groupe arbitraire G , qui pourrait être non-abélien, mais que nous supposons simple. On considère maintenant un champ dans une représentation

de dimension n , soit un vecteur colonne $\langle p$ composé de n champs scalaires réels $\langle \rangle_a$, avec $o. = 1, \dots, n$. Le VEV est désormais un vecteur

$$r) = \langle O|0|O \rangle = \quad ; \quad (2.134)$$

Machine virtuelle/

avec $|0\rangle$ l'état de vide des champs scalaires. Les VEV individuels, $r)_a = \langle 0|\langle \rangle_o|0\rangle$, satisfont $Va =$

■ Le potentiel de $\langle \rangle$ est toujours de la forme (2.128), avec M pour qu'une fois de plus nous puissions

$$\left. \frac{\langle W \rangle}{g \langle t \rangle a} \right|_{\hbar=n} = 0,$$

et nous définissons les champs quantiques $\langle f \rangle_a = \langle \rangle_o - r)_a$. Le terme de masse prend alors la forme générale

$$m \ll -s \frac{1}{2} \frac{j^{\wedge} V}{d \langle p_a d \langle p^{\wedge} b \rangle}$$

Si nous effectuons une transformation infinitésimale globale avec le paramètre $\langle ac \ 1$, le potentiel se transforme comme $V(\langle \rangle) \rightarrow V(\langle \rangle) + \langle 5V(\langle \rangle)$, avec

$$WW = \frac{dV}{dVh} \quad un$$

où l'on suppose que 0 se transforme sous la représentation donnée avec les matrices U^c .

Pour que le potentiel soit invariant sous la transformation précédente, il faut $\langle 5V(\langle \rangle) = 0$, ce qui implique que

$$dVh$$

Différencier par rapport à $\langle \rangle / \langle \rangle$ pour $0 = T$ (pour lequel la première dérivée partielle du potentiel s'annule), conduit à

$$\frac{d^2 V}{d\ddot{y} a d\ddot{y} d} \langle t \rangle = v \quad (n^c v)_a = 0.$$

Il y a maintenant deux manières possibles de faire disparaître ces termes, selon que $(TZ^c q)_a$ disparaît ou non. L'ensemble des générateurs satisfaisant $(TZ^c T)_a = 0$ forme un sous-groupe H de Q sous lequel le vide est encore invariant. Ainsi, le schéma de brisure de symétrie est $Q \rightarrow H$.

L'expansion (2.131) autour du VEV peut être généralisée à

$$/m + /l(x) \backslash$$

$$\langle p = \quad n \quad r/p + \quad 0 \quad (2.135)$$

$$i=p+i$$

$$\backslash 0 /$$

en supposant que seules les valeurs p first de $\langle \phi \rangle$ ne disparaissent pas. Tout comme dans le cas abélien, les $n - (p - 1)$ bosons de Goldstone $\phi_i(x)$ qui apparaissent dans l'expansion (2.135) ne sont pas physiques s'il s'agit d'une invariance locale, et leurs degrés de liberté correspondants produisent des termes de masse pour les bosons de jauge associés.

Nous pouvons désormais changer de jauge en utilisant précisément les champs de Goldstone, de la même manière que cela a été fait dans le cas abélien. Le choix (2.131) devient ici

$$\phi \rightarrow \phi' = \exp$$

de sorte que ϕ devient

$$\phi' = \phi + \frac{g}{m} \sum_{i=1}^{p-1} \phi_i \quad (2.136)$$

qui définit les p champs physiques de Higgs de la théorie.

Sous une transformation générale avec paramètres, les bosons de jauge se transforment comme la généralisation de (2.124) au cas non-abélien, plus précisément

$$C_a \rightarrow C_a' = C_a - g f_{abc} \theta_b C_c \quad (2.137)$$

where g gives the coupling of the group and the f_{abc} its structure constants. We should

Soulignons qu'il n'existe qu'une seule constante de couplage, valable pour tous les champs soumis à l'invariance requise. Cette propriété n'est valable que pour un groupe simple ou un groupe simple élevé à n'importe quelle puissance avec une symétrie transversale, ce qui permet d'identifier les différents groupes.

Dans le cas du mécanisme de Higgs, on utilise cette relation pour les transformations qui ne font jouer que les $n - (p - 1)$ champs de Goldstone ($\phi_i, i = 1, \dots, n - p + 1$), au lieu des paramètres généraux a_a . Au premier ordre dans la relation (2.137) donne

$$C_a' = C_a - g f_{abc} \theta_b C_c + O(\theta^2).$$

be written as

we find the mass terms of the gauge bosons. In Section 2.6.2,

En substituant cette expression, ainsi que (2.136) dans le terme cinétique de ϕ , qui peut, nous verrons une illustration de cette rupture de symétrie dans le contexte du modèle standard, que nous allons maintenant étudier.

2.6 Le modèle standard $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$

Le modèle standard des interactions non gravitationnelles rend compte de l'ensemble des interactions évoquées dans la section 2.3 classées en fonction des représentations des groupes.

$SU(3)_c$ pour les interactions fortes, et $SU(2)_L \times U(1)_Y$ pour les interactions électrofaibles. Cette dernière symétrie est brisée par le mécanisme de Higgs décrit dans la section 2.5.2 le long du processus de rupture de symétrie suivant

$$SU(2)_L \times U(1)_Y \xrightarrow{\text{déc.}} U(1)_{\text{élect.}},$$

laissant le photon sans masse, comme observé.

2.6.1 L'interaction forte (QCD)

La description de l'interaction forte est basée sur une invariance sous les transformations du groupe $SU(3)$. Ce groupe étant composé de 8 générateurs, sa représentation conjointe, dans laquelle sont placés les bosons de jauge G^* , est de dimension 8 : $a = 1, \dots, 8$. Les leptons ne sont pas soumis à ces interactions, et apparaissent donc comme des singulets de $SU(3)$, qui ne se couplent pas au boson de jauge. Les quarks existent dans trois états possibles, et sont ainsi placés dans une représentation tridimensionnelle, notée 3. Les quarks sont donc représentés en vecteurs colonnes avec ces trois éléments,

$$Q \equiv \begin{pmatrix} u_r \\ u_g \\ u_b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} d_r \\ d_g \\ d_b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} s_1 \\ s_g \\ s_b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_r \\ c_g \\ c_b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} t_r \\ t_g \\ t_b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_r \\ b_g \\ b_b \end{pmatrix}$$

L'index est appelé *couleur*,⁴ ce qui n'a rien à voir avec une apparence colorée réelle. Cette terminologie vient plutôt d'une analogie : en raison des propriétés fondamentales de l'interaction forte, un quark ne peut jamais être observé seul mais uniquement par paires quark-antiquarks, ou par ensembles de trois quarks. Dans ces dernières combinaisons, la couleur totale s'annule, de la même manière qu'il est possible de combiner les trois couleurs fondamentales pour donner le blanc, ce qui peut être vu comme l'absence de toute couleur. C'est pourquoi ce groupe $SU(3)_c$ est appelé *groupe de couleurs*.

La dérivée covariante de chaque quark Q , par rapport à l'interaction forte est donnée par

$$= -ig_s G_a^{\mu\nu} \lambda_a Q, \quad (2.139)$$

où les λ^a sont 8 matrices formant l'algèbre de $SU(3)$. Nous prenons souvent les matrices de Gell-Mann (voir, par exemple, Réf. [7,13] pour plus de détails) qui satisfont les relations de commutation appropriées de $SU(3)$, c'est-à-dire (2.119) avec les constantes de structure de $SU(3)$, noté f^{abc} . La constante de couplage g_s du groupe mesure l'intensité de l'interaction. Expérimentalement, il a été mesuré que cette constante de couplage avait une valeur numérique plus élevée que celles des autres interactions, d'où le nom d'interaction forte. Par analogie avec les états de couleur, cette interaction est également appelée *chromodynamique quantique* « QCD ».

Le lagrangien de QCD prend la forme

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = -\sum_{\text{quarks}} \bar{Q} \gamma^\mu D_\mu Q - \frac{1}{4} G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^a, \quad (2.140)$$

où $a = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ et $G_{a', iU} = d_p \cdot G_{ii}^a - \frac{1}{2} \epsilon^{abc} G_b^p G_{\ell i}^c$.

^d L'indice i prend la valeur r, g et b représentent les couleurs « fondamentales » rouge, vert et bleu.

2.6.2 Interaction électrofaible

L'interaction électrofaible combine les propriétés de l'interaction weak, issues de l'invariance sous transformations du groupe $SU(2)_L$, et de l'électromagnétisme, basée sur $U(1)_{em}$, réunies comme une interaction unique. Toutes les particules sont combinées en singulets ou doublets de $SU(2)_L$.

2.6.2.1 Quarks

Les quarks de chaque génération sont supposés équivalents, de sorte que les doublets sont

(2.141)

où chaque fermion apparaît comme un état propre de chiralité avec la définition

(2.142)

où la matrice γ^5 est définie comme

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$$

On peut vérifier explicitement que $(\gamma^5)^2 = 1$, de sorte que les opérateurs $P_{RL} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5)$ sont des projecteurs orthogonaux les uns aux autres, c'est à dire qu'ils satisfont $P_{RL}P_{RL} = P_{RL}$ et $P_{RL}P_{LR} = 0$. Une autre propriété utile concerne les relations d'anticommution : γ^5 anticommute avec tout γ^μ , ou

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0, \quad (2.143)$$

relation that will be very useful in the following sections.

Finally, the quarks with right chirality are defined as singlets of $SU(2)_L$:

$$u_R, d_R, s_R, c_R, b_R, t_R$$

2.6.2.2 Chiralité

Les projecteurs $P_{R,L}$ sur l'état de chiralité définie³ entrent en jeu dès que l'on s'intéresse aux propriétés du spinor par rapport aux transformations de Lorentz. Au sens de la représentation dite chirale (2.65), la les projecteurs prennent la forme explicite suivante

$$P_{R,L} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5) \quad (2.144)$$

Sous cette forme, les propriétés de projection de ces opérateurs deviennent transparentes.

Notons au passage que du fait que γ^5 et γ^μ anticommute (2.143), les spineurs conjoints sont définis à l'aide de projecteurs opposés

³L'opérateur γ^5 est appelé chiralité car il indique que ses états propres se transforment sous une transformation de parité [6,9].

$$t\Gamma_L = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{smallmatrix} \right) = \text{et} = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 7 \end{smallmatrix} \right) = \quad (2.145)$$

Ainsi, ils satisfont

$$V' \Gamma^M V' = \quad + V' \Gamma^M V' \quad (2.146)$$

et

$$= \wedge, V' \Gamma + \text{et} \quad V' \Gamma_L = 0, \quad (2.147)$$

ce qui confirme qu'un spineur n'existant que dans un seul état de chiralité, ne peut avoir aucun terme de masse au Lagrangien.

Des projecteurs (2.144), on peut déduire que les états propres de la chiralité sont des quadri-spineurs

$$\psi_L = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \psi_R = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix}$$

où ξ et χ sont ^{deux} bi-spineurs représentant respectivement les composantes gauche et droite du spineur total. L'équation de Dirac (2.62) peut alors s'écrire sous la forme de deux équations couplées, les équations de Weyl, pour les bi-spineurs

$$(\not{\partial} + \not{\sigma} \cdot \mathbf{V}) \xi = -im\xi, \quad (2.148)$$

$$(\not{\partial} - \not{\sigma} \cdot \mathbf{V}) \chi = -im\chi, \quad (2.149)$$

où la masse m doit désormais être comprise comme un terme de couplage entre les deux composants. Pour un spineur sans masse, les deux équations découplées et chaque bi-spineur, ξ et χ , appelés spineurs de Weyl, évoluent indépendamment. Nous verrons plus loin que ces sortes de spineurs ont un rôle particulièrement important à jouer dans le formalisme de la supersymétrie.

2.6.2.3 Leptons

On a longtemps pensé que les neutrinos étaient représentés par certains tenseurs de Weyl. Expérimentalement, ils ne sont observés que dans l'état gauche χ_L , ce qui conduit à la conclusion qu'ils devraient être sans masse. Puisqu'ils n'ont que deux degrés de liberté, pour les mettre dans des doublets semblables comme dans (2.141), il n'est possible de les apparier qu'avec la composante gauche du lepton correspondant, laissant la composante droite dans un singulet de $SU(2)_L$, donc l'indice 'L' du groupe. La structure est donc celle qui regroupe dans un schéma similaire, l'électron, le muon et le tau avec leurs neutrinos associés.

$$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}, \quad e_R, \quad \begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix}, \quad \mu_R, \quad \begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L \end{pmatrix}, \quad \tau_R$$

Les dérivés covariants sont définis comme

$$(\not{\partial}_L) = \not{\partial} \sim \quad (2.151)$$

T_i ($i = 1, 2, 3$) sont les matrices de Pauli (2.66), génératrices du groupe $SU(2)$ puisqu'elles satisfont l'algèbre

$$[cP, c\sigma^j] = 2ie^j_{\quad k} f^{jk}. \quad (2.152)$$

Semblable à l'interaction forte, les bosons vecteurs sont dans la représentation adjointe de $SU(2)$. La constante de couplage du groupe est ici appelée g . Les coefficients $e^j_{\quad k}$ prend des valeurs numériques $+1$ (resp. -1) si (i, j, k) est une permutation paire (resp. impaire) de $(1, 2, 3)$, et 0 sinon (ie si deux indices sont identiques). Les constantes de structure du groupe $SU(2)$ sont données par le tenseur de Levi-Civita de rang 3⁶, et ce groupe est localement

⁶Le tenseur de Levi-Civita en n dimensions est le tenseur de rang n complètement antisymétrique avec composantes $\epsilon_{i_1 \dots i_n} = +1$

équivalent à celui des rotations.

De plus, une charge relative aux transformations de phase est associée à chaque particule. Cette 'hypercharge', pour la distinguer de la charge électrique Q , est notée Y et on a $Y_a = -\frac{2}{3}$ pour les leptons droits, $Y_u = -\frac{1}{6}$ pour les leptons gauches, $Y(q_L) = \frac{1}{6}$ pour les doublets de quarks (2.141), de chiralité gauche, et pour la chiralité droite, $Y(d_R) = -\frac{1}{3}$ et $Y(u_R) = \frac{2}{3}$.

La structure en doublet de (2.141) et (2.150) rappelle celle de spin $\frac{1}{2}$ avec ses composantes $|i\rangle$ et $|f\rangle$. C'est pourquoi la classification en doublet de $SU(2)_L$ est aussi appelée isospin faible, notée T pour éviter toute confusion avec le spin S . Les valeurs T^3 sont respectivement données à la composante supérieure et inférieure du doublet. En utilisant cette analogie et en gardant à l'esprit que les charges électriques des quarks sont $Q_{u,c,t} = +\frac{2}{3}$ et $Q_{d,s,b} = -\frac{1}{3}$ ceux des leptons massifs $Q_{e,\mu,\tau} = -1$ et que les neutrinos n'ont pas de charge électrique, on obtient la relation Gell-Mann-Nishijima

$$Q = T^3 + Y. \quad (2.153)$$

Notez que pour que cette relation soit valable pour toutes les particules, nous devons définir $T = 0$ pour les singulets. On peut alors ajouter un terme dérivé covariant $U(1)_Y$ pour chaque corps,

$$D_\mu = (\partial_\mu + j e_{gi} Y C_\mu + i g_Y Y B_\mu),$$

où g_Y est la constante de couplage associée au groupe $U(1)_Y$.

2.6.3 Un modèle complet

En rassemblant tous les éléments de base précédents, un lagrangien complet peut être écrit pour décrire les trois interactions non gravitationnelles et toutes leurs invariances.

2.6-3.1 Termes cinétiques

Les termes cinétiques du modèle standard pour les interactions électrofaibles et fortes sont donc donnés par

$$\mathcal{L}_{k,n} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} - \frac{1}{4} (G_{\mu\nu}^A)^2 - \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi^\dagger - i g_Y Y B_\mu \phi) (\partial^\mu \phi - i g_Y Y B^\mu \phi) - \bar{\psi} (i \not{D} - m) \psi \quad (2.154)$$

où l'action de la dérivée covariante dépend de la particule sur laquelle elle agit. Par exemple, pour le doublet de leptons de la première famille, en utilisant les hypercharges obtenues précédemment, cela donne, puisque les leptons ne sont pas soumis à l'interaction forte.

$$ie\gamma^\mu (\hat{y}_j H - 2iq\psi)C, \quad (2.155)$$

2.6.3.2 Les bosons et photons $W^\pm$ et Z^0 ; Angle faible

L'équation (2.155) peut être explicitement développée en composantes gauche et droite comme

$$(2.156)$$

où l'angle faible θ_w est défini par les relations

$$\begin{aligned} \sin\theta_w &= \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \\ \cos\theta_w &= \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \end{aligned} \quad \tan\theta_w = \frac{g'}{g} \quad (2.157)$$

Quant aux champs de vecteurs, ils sont définis par

$$(2.158)$$

et

étant le champ électro-magnétique.

Le Lagrangien (2.156) peut être compris de la manière suivante. Tout d'abord, on remarque que le terme cinétique de l'électron conduit à un couplage de jauge de type U(1) avec le photon, puisqu'il peut s'écrire sous la forme

$$= i\bar{e}\gamma^\mu (d_\mu - ieqA^\mu) e,$$

avec

$$q = q_L \sin\theta_w$$

la constante de couplage électromagnétique et Q l'opérateur de charge électrique, de valeur $Q_L = -1$ pour l'électron. Ce couplage est le même pour les degrés de liberté gauche et droit de l'électron. En plus des termes de couplage, un boson neutre intermédiaire bas est apparu, couplant les composants droit et gauche de l'électron d'une manière différente, et ajoutant

également un terme d'auto-couplage pour le neutrino (gaucher). Enfin, les bosons intermédiaires chargés rendent possibles les interactions entre neutrinos et électrons (les charges du $W^\pm$ viennent du fait que chaque terme du Lagrangien final doit conserver la charge électrique, ce qui entre un neutrino neutre et un électron n'est possible qu'avec la valeur indiquée). panneaux indiquant les charges).

Pour un doublet de quarks, on peut faire la même expansion, qui nous donne les charges électriques des quarks, mais conduit à 36 termes d'interaction différents pour chaque génération de quarks une fois le triplet de couleur explicité.

2.6.3.3 Rupture de symétrie

Le Lagrangien (2.154) compte presque tous les termes possibles qui satisfont à l'invariance du modèle standard et mettant en jeu les particules connues expérimentalement. En raison de ses invariances, et en particulier du faible isospin, il n'est pas possible d'écrire des termes de masse pour les leptons. Quant aux quarks, tous les éléments d'un même doublet de $SU(2)_L$ devraient avoir la même masse, comme par exemple les quarks u et d , ce qui est en contradiction avec les mesures. Ainsi, le modèle ne peut être rendu compatible avec les expériences que si la symétrie $SU(2)_L$ est rompue.

Pour cela, nous introduisons un doublet de corps complexe

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

dont la dynamique est régie par le potentiel (2.128)

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4} (|\phi|^2 - v)^2 = \frac{\lambda}{4} (\phi_1^2 + \phi_2^2 - v)^2 \quad \blacksquare$$

Le minimum de ce potentiel est $|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 = v^2$. En supposant que le champ de Higgs n'est pas soumis à l'interaction forte, le terme cinétique devient

$$= -\frac{1}{2} \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi \quad , \quad (2.160)$$

qui peut être étendu comme

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & i\bar{\psi} \not{\partial} \psi + \frac{1}{2} (\partial_\mu W^\mu - \frac{1}{2} g W^\mu W_\mu + (52B.V + \\ & a^2 c_j - (\frac{1}{2} g^2 B_{3M} - a^2 d C^2 \\ & + (a^2 B_{in} + 9 \frac{1}{2} X y C^2))^2 + \frac{1}{2} (g Y C^2)^2 + 10 \frac{1}{2} \\ & + \frac{1}{2} g_i (0 \hat{I} 0 2 + 0 i 0_2) [W^M (52 - \frac{1}{2} 3M + \hat{O} i K / > C^2 ;) - (32,83 \hat{A} - g_i Y C^2)] \\ & + 2 \frac{1}{2} (|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2) W / - W / - T \end{aligned} \quad (2.161)$$

Dans (2.160), nous avons introduit l'hypercharge $U(1)_{Y\#}$ du doublet de Higgs ; nous déterminons sa valeur ci-dessous.

Les courants sont définis par et

$$= 2 (l f) d^2 - 0 2 < W l) ,$$

avec $J^+ = (J^0, \vec{J}) \sim je$

Nous travaillons maintenant autour du minimum du potentiel et effectuons une transformation de jauge pour supprimer l'un des trois degrés de liberté redondants. Dans la jauge unitaire, pour laquelle $0_i = 0$, et $\phi = V + h/\sqrt{2}$, ie

$$0 = 0 + 50, \text{ avec } 0 = \text{et } <50 = \sim, \quad (2.162)$$

il ne nous reste que le champ de Higgs, h , qui est réel. On obtient alors

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu h)^2 - \frac{1}{2} m_h^2 h^2 + \dots + \frac{1}{4} g^2 W_\mu^+ W_\mu^- + \dots \quad (2.163)$$

où l'on peut reconnaître le boson vecteur intermédiaire Z^0 à condition de fixer l'hypercharge du doublet scalaire de Higgs à $Y = -1$. C'est la seule valeur qui préservera l'invariance électromagnétique après la rupture de symétrie, assurant le photon défini par la relation (2.159) reste sans masse.

2.6.3.4 Masses des bosons intermédiaires

L'équation (2.163) contient des termes d'interaction entre le boson de Higgs, h , et les bosons intermédiaires, Z^0 et $W^\pm$. Le terme de masse de ce dernier peut être extrait. En prenant $h = 0$ dans (2.163), on obtient

$$\mathcal{L}_{\text{mass}} = -\frac{1}{2} g^2 v^2 W_\mu^+ W_\mu^- - \frac{1}{2} (g^2 v^2 + \frac{1}{2} g'^2 v^2) Z_\mu^0 Z_\mu^0 \quad (2.164)$$

afin que nous puissions faire l'identification

$$\frac{1}{2} g^2 v^2 = M_W^2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} (g^2 v^2 + \frac{1}{2} g'^2 v^2) = M_Z^2 \quad (2.165)$$

Cette dernière relation permet de déduire la valeur de l'angle faible des masses des bosons intermédiaires. Cela a été fait suite à leur découverte au CERN en 1982. Leurs masses réelles sont [11]

$M_W = 80,419 \pm 0,056 \text{ GeV}$ et $M_Z = 91,1882 \pm 0,0022 \text{ GeV}$, ce qui donne le faible angle de mélange, à savoir $\sin^2 \theta_W \sim 0,22$, soit environ $\theta_W \sim 28^\circ$. A noter qu'aucun terme du type ϕ^4 n'apparaît dans le Lagrangien (2.164). Le photon est sans masse, en accord avec l'électromagnétisme de Maxwell.

2.6.3.5 Masses des fermions

Les partiels de chiralité droite et gauche appartiennent à des représentations différentes de $SU_L(2)$, il n'est donc pas possible de construire des termes de masse de manière simple tout comme pour les champs de Higgs, il faudrait imposer que tous les fermions soient sans masse avant la symétrie rupture. De plus, puisque le neutrino droit devrait être absent de cette théorie, il faut postuler que le neutrino est sans masse, même après rupture de symétrie.

Les termes de couplage les plus généraux entre les fermions et le champ de Higgs qui satisfont les invariances requises sont donnés par⁷

$$-\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} \sim -E \sum_{\text{leptons}} \bar{\psi}_L^i \psi_R^j + \text{h.c.}, \quad (2.166)^{\text{généralisations}}$$

with

où la matrice o^2 est définie par (2.66), avec hypercharge $= -Y^A = -1$, et où la somme s'étend sur les trois générations différentes, de sorte que les champs e_R , et d_R représentent respectivement $(e, \mu, \tau)_R$, $(u, c, t)_R$ et $(d, s, b)_R$. Dans (2.166), les nombres Y_{lepton}^i et Y_{quark}^i , appelés coefficients de Yukawa, non seulement représentent le couplage des quarks et des leptons avec les champs de Higgs, mais, une fois la symétrie brisée, donnent aussi les valeurs des masses des différents fermions. On voit que l'interaction d'une particule donnée avec le champ de Higgs est d'autant plus importante qu'elle est massive.

2.6.3-6 Symétrie électromagnétique

En travaillant dans la jauge unitaire définie par (2.162), nous voyons que la configuration du vide est identiquement annihilée par l'opérateur de charge électrique Q donné par la relation Gell-Mann-Nishijima (2.153). En effet, avec

et $Y^A = 1$, nous avons

$$Q \phi_0 = 0$$

L'annihilation de l'état de vide par le générateur d'électromagnétisme implique que cet état satisfait

$$i\alpha(x^\mu)Q \phi_0 = 0 \quad (2.167)$$

et donc il est invariant sous une transformation $U(1)_{\text{em}}$. Ainsi, la rupture de symétrie n'est pas totale et l'invariance électromagnétique est récupérée, comme requis pour que la théorie soit compatible avec les expériences.

Notons que même si ici la relation (2.167) a été explicitement obtenue dans une jauge unitaire, de l'invariance de la jauge initiale de la théorie on peut conclure, indépendamment

⁷On peut explicitement constater qu'avec les hypercharges données précédemment pour toutes les particules, ces termes sont les seuls possibles qui soient invariants sous la transformation de $U(1)_Y$.

de la jauge, que ce résultat s'appliquera pour tout choix de jauge, c'est à dire cela pour tout choix de configuration du doublet de Higgs, du moment qu'il est au minimum du potentiel.

2.7 Invariances discrètes

En plus des symétries continues, généralement mesurées, il existe des symétries discrètes telles que la parité, la conjugaison de charges et l'invariance par inversion du temps. La première semble être violée au maximum par les interactions faibles, et la dernière faiblement, par exemple dans le système $K^0 - \bar{K}^0$. Dans ce qui suit, nous nous limiterons à l'étude du champ scalaire, tous les résultats étant généralisables aux secteurs fermionique et vectoriel [8].

Pour un corps classique, une opération de symétrie peut être obtenue dans la wav suivante. Pour une transformation donnée $x \mapsto (x, a)$, où a représente un ensemble de paramètres définissant la transformation, le champ $\phi(x)$ se transforme comme

$$\langle j | \phi(x) = A(a) \phi(x) \quad (2.168)$$

où A est une matrice si le champ scalaire ϕ a plusieurs composantes.

Un état $|0\rangle$ dans l'espace de Fock, correspondant à l'opérateur de champ ϕ , transforme linéairement $|0\rangle = U(c) |0\rangle$ où $\hat{P} = U^{-1}$ assurant que $\langle 0|0\rangle = \langle 0 | 0 \rangle$. Nous exigeons que les éléments matriciels de l'opérateur de champ satisfont la relation (2.168),

$$\langle 0 | \phi(x) | 0 \rangle = A(a) \langle 0 | \phi(x) | 0 \rangle$$

entre deux états arbitraires $|0\rangle$ et $|0\rangle$ et les états transformés $|0\rangle$ et $|0\rangle$, qui conduit à

$$\hat{U}^\dagger(a) \hat{\phi}(x) \hat{U}(a) = A(a) \phi(x),$$

c'est à dire à

$$\hat{U}^{-1}(c) \phi(x) \hat{U}(c) = A(c) \phi(x),$$

où la variable muette x' a été remplacée par x et exprimée en utilisant la loi de transformation inverse.

Nous pouvons maintenant voir comment ces transformations générales peuvent être appliquées à différents cas particuliers, utiles en physique des particules.

2.7.1 Parité

Supposons que l'on effectue une transformation par réflexion sur les coordonnées spatiales

$$\begin{aligned} x &\rightarrow -x, \\ t &\rightarrow t. \end{aligned} \quad (2.169)$$

Si la physique reste inchangée sous cette transformation (comme c'est le cas par exemple pour l'équation de Klein-Gordon qui est du second ordre dans les dérivées spatiales), alors un champ classique ne peut être modifié que d'un facteur de phase

$$= s_p \psi(x)$$

avec $|s_p|^2 = 1$. Pour l'opérateur de terrain, cela se traduit par

$$P^{-1} \psi(x, t) P = s_p \psi(-x, t), \quad (2.170)$$

où P est un opérateur unitaire représentant la parité.

Si $\psi \in G$, alors la variation peut s'effectuer via une phase, soit $s_p = e^{i\alpha}$, en G . Cependant, pour un corps réel ($\in \mathbb{R}$), l'opérateur correspondant doit être hermitien, c'est-à-dire

$$\hat{\phi}^\dagger = \hat{\phi}, \text{ and hence}$$

$$P^\dagger \psi(x, t) P = P^{-1} \psi(x, t) P =$$

d'où on déduit que $s_p^* = s_p$. Ceci, ainsi que la relation $|s_p|^2 = 1$, implique que $s_p = \pm 1$. Dans ce cas particulier, la particule associée au champ sera dite scalaire si $s_p = +1$ et pseudo-scalaire pour $s_p = -1$, c'est à dire lorsqu'elle a une parité intrinsèque négative.

L'action de l'opérateur de parité sur l'espace de Hilbert peut être obtenue en développant le corps dans la base (2.106) (on considère désormais un corps complexe) et en réécrivant l'équation. Nous trouvons

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_k}} \left[\hat{a}_k \hat{b}_k^\dagger e^{i(k \cdot x - \omega_k t)} + \hat{b}_k^\dagger \hat{a}_k e^{-i(k \cdot x - \omega_k t)} \right] \\ &= s_p \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_k}} \left[\hat{a}_k e^{-i(k \cdot x + \omega_k t)} + \hat{b}_k^\dagger e^{i(k \cdot x - \omega_k t)} \right] \end{aligned} \quad (2.171)$$

where the sign of x in the plane-wave exponentials of the right-hand side have been inverted, conformément à (2.170). Puisque cette dernière opération est équivalente, dans les exponentielles, à celle qui change le signe de x , elle donne les lois de transformation des opérateurs de création et d'annihilation

$$(2.172)$$

Thus, the parity operator reverses the sign of the momenta, which had to be expected since they are 3-vectors.

For the case of a free complex scalar field, i.e. massive but with no interaction with any other field, the Hamiltonian, given by the relation (2.108), transforms under parity⁷ as

$$\hat{P} \hat{H} \hat{P}^{-1} = |s_p|^2 \int d^3 k \omega_k \left[\hat{N}_{-k}^{(a)} + \hat{N}_{-k}^{(b)} \right] = \hat{H}, \quad (2.173)$$

since the integral is performed on all values of the vector k and $|s_p|^2 = 1$ whichever is the parity of the states we consider. Similarly, the field momentum, equal to

$$\int d^3 k k \left[\hat{N}_k^{(a)} + \hat{N}_k^{(b)} \right] \quad (2.174)$$

transforms as

$$\hat{P} \hat{p} \hat{P}^{-1} = -\hat{p},$$

ce qui correspond à la loi de transformation d'un vecteur. À ce stade, il est intéressant de noter d'après (2.173) que l'opérateur de parité commute avec l'hamiltonien, et donc

la parité d'un état physique est une constante de mouvement pour le champ scalaire complexe libre. Certaines interactions peuvent modifier cette conclusion : c'est le cas des interactions faibles. Une parité peut aussi être attribuée au vide, et on choisit $P|0\rangle = |0\rangle$ (le vide doit rester identique à lui-même si les coordonnées sont inversées). Notons qu'on peut construire explicitement un opérateur P satisfaisant (2.172) pour lequel cette relation est vérifiée, mais il est aussi possible de donner une parité intrinsèque négative au vide ; cela ne fait que compliquer un peu les choses et inverser simplement toutes les parités des champs. En d'autres termes, ce n'est qu'une question de convention.

2.7.2 Conjugaison de charges

Une autre transformation discrète aussi simple que la parité peut également être effectuée. Il s'agit de la conjugaison de charges C , qui consiste à remplacer chaque particule dans un état physique donné par son antiparticule. En termes d'opérateurs, cela revient à transformer ψ en $\psi^\dagger$ et vice versa. On peut donc écrire

$$C\psi = \eta_C \psi^\dagger \text{ et } C\psi^\dagger = \eta_C^* \psi, \quad (2.175)$$

la deuxième relation de (2.175), étant simplement le conjugué hermitien de la première. Tout comme pour la parité, dans (2.175), la valeur propre de C est un module unitaire puisque transformer deux fois de suite toutes les particules et leurs antiparticules équivaut finalement à aucune transformation. Cela équivaut à dire que $C^2 = 1$. De plus, notons que C devrait être unitaire, de sorte qu'en fin de compte, nous avons $C^{-1} = C$.

En termes d'opérateurs d'annihilation, on trouve

$$C a_k / C^\dagger = s_k b_k \text{ et } C b_k^\dagger / C^\dagger = s_k^* a_k^\dagger, \quad (2.176)$$

et les relations hermitiennes conjuguées pour les opérateurs de création. En supposant, comme précédemment, que le vide est un état propre de la conjugaison de charges, de valeur propre $+1$, soit $C|0\rangle = |0\rangle$, on peut alors déterminer la charge C de tout état physique créé avec un nombre déterminé de particules. Là encore, nous constatons que pour un champ scalaire libre, la conjugaison de charges est une constante de mouvement, laissant l'hamiltonien (ainsi que l'impulsion) inchangé. Cependant, la charge conservée Q de (2.113) change de signe, comme on pouvait s'y attendre,

$$CQC^{-1} = -Q,$$

de sorte qu'un état propre de la charge conservée Q ne peut pas être simultanément un état propre de la conjugaison de charges. La conservation temporelle de cette dernière n'est donc utile que pour les états physiques présentant une charge globale nulle.

La plupart des interactions satisfont $C = 0$, et celles qui violent la parité conser

Les interactions faibles, comme les interactions faibles, laissent le plus souvent la combinaison CP invariante. Dans la section dédiée à la baryogenèse au chapitre 9, nous aborderons les cas où même cette contrainte n'est pas valide. Cependant, dans toutes les théories de champs analogues à celle présentée ici, une symétrie discrète est satisfaite, il s'agit de la combinaison CPT , où la dernière symétrie, l'invariance par retournement temporel, nécessite quelques détails techniques qui sont donnés dans ce qui suit.

2.7.3 Inversion du temps et théorème CPT

La dernière invariance discrète, valable par exemple pour un champ scalaire libre ; est-ce lié au renversement du temps T :

$$(2.177)$$

Contrairement aux deux symétries précédentes, qui sont alors des opérateurs unitaires, cette symétrie ne peut être implémentée dans l'espace des états de Fock que sous la forme d'un opérateur antiunitaire ? Un opérateur T est antiunitaire s'il est antilinéaire, c'est à dire tel que

$$(2.178)$$

et s'il satisfait $TT^\dagger = T^\dagger T = 1$.

Grâce à ce dernier opérateur, on peut démontrer [14] le théorème très général suivant. Si une théorie quantique locale des champs peut être représentée par un lagrangien hermitien $C(x^\alpha)$ qui est invariant sous les transformations de Lorentz appropriées (c'est-à-dire sans les inversions d'espace et de temps) et si ses opérateurs de champ satisfont au théorème des statistiques de spin⁹, alors nous avons

$$\left(\hat{C} \hat{P} \hat{T} \right) \hat{L}(x^\alpha) \left(\hat{C} \hat{P} \hat{T} \right)^{-1} = \hat{L}(-x^\alpha). \quad (2.179)$$

Grâce à cette relation (2.179), l'action intégrale $S = \int d^4x \mathcal{L}$ est invariant sous la transformation CPT . Ainsi, les équations du mouvement, obtenues en faisant varier l'action, et les relations de commutation canoniques, restent également inchangées sous cette transformation. On peut aussi en déduire que l'hamiltonien de la théorie donnée doit commuter avec CPT et donc toute théorie réaliste, c'est à dire satisfaisant l'hypothèse de ce théorème, possède cette invariance. Ce résultat est souvent écrit sous la forme symbolique ' $CPT = 1$ '.

Une conséquence non triviale de ce théorème est la suivante : pour toute théorie le satisfaisant, c'est-à-dire pour toute théorie réaliste, les particules et antiparticules devraient avoir exactement les mêmes masses et les mêmes durées de vie. Cette conséquence se vérifie avec une très grande précision puisque, par exemple, pour le Système K_S^0/K_L^0 , on trouve $|m_S - m_L|/m < 10^{-18}$. Pour la plupart des autres particules, on retrouve des valeurs typiques de l'ordre de $|m_S - m_L|/m < 10^{-5}$, et des contraintes sur les différences de durées de vie de l'ordre de $|\tau_S - \tau_L|/\tau < 10^{-3}$.

⁹ Cela se produit pour des raisons techniques liées au fait que l'opérateur d'inversion de temps doit également inverser les rôles des configurations initiale et finale [8].

¹⁰ Le théorème de la statistique de spin, lui aussi très général en théorie des champs, précise que les particules associées à des champs de spin entier (par exemple les bosons, les scalaires et les vecteurs) ont une statistique décrite par la fonction de distribution de Bose-Einstein, alors que celles correspondant aux champs demi-entiers (fermions, spinor de Dirac par exemple), sont décrites par les statistiques de Fermi-Dirac. Ce théorème repose uniquement sur la microcausalité. Il est discuté en détail dans la réf. [15].

Le modèle standard de physique des particules présenté dans ce chapitre n'a jusqu'à présent jamais présenté de défauts du point de vue de la physique expérimentale. Cependant

personne ne pense sincèrement qu'il décrit de manière définitive toutes les interactions entre les particules élémentaires. Il y a à cela de nombreuses raisons, autant expérimentales que théoriques.

D'un point de vue expérimental, la découverte récente de l'existence d'une masse pour les neutrinos et la discussion concernant la chiralité (Section 2.6.2) indiquent qu'ils ne peuvent exister uniquement dans la chiralité gauche telle qu'attribuée par le modèle standard. Il existe donc un neutrino droit, qui possède des propriétés différentes de celui de gauche puisqu'il aurait autrement déjà été détecté expérimentalement. Il faut donc qu'ils aient une masse très importante pour expliquer qu'aucun accélérateur ne l'ait déjà produit.

Au niveau expérimental, il reste encore une inconnue. Depuis la découverte du quark 'top', toutes les particules du modèle standard ont été identifiées sauf une, qui est peut-être la plus importante puisque repose sur elle le principe de rupture de symétrie, à savoir le boson de Higgs. Tant qu'il n'aura pas été réalisé directement dans un accélérateur, il restera hypothétique et le modèle n'aura pas été entièrement vérifié.

D'un point de vue théorique, la situation est encore pire. Premièrement, ce modèle, bien qu'unifiant dans un cadre quantique les trois interactions non gravitationnelles (électromagnétisme, faible et forte), ne fait aucune mention de la dernière interaction, la gravité, malgré le fait que l'un de ses piliers, le système de Higgs mécanisme, serait à l'origine de la masse des particules élémentaires. En fait, ces masses sont aussi les charges gravitationnelles de ces particules. De plus, le modèle standard repose sur trois groupes de symétrie différents, avec trois constantes de couplage n'ayant aucun lien entre elles, ce qui n'est justifié par aucun principe fondamental. Enfin, et c'est peut-être le plus grave, il y a 19 paramètres libres dans la théorie, qui ne peuvent être que mesurés. Cette prolifération des paramètres est souvent évoquée ! comme le signe qu'il ne s'agit pas d'une théorie fondamentale mais bien d'une théorie efficace à basse énergie. Nous verrons plus tard que dans de nombreuses extensions, le nombre de paramètres libres est sérieusement réduit, et qu'il est en principe possible de calculer les 19 coefficients arbitraires qui apparaissent dans le lagrangien général en termes d'un ensemble de paramètres beaucoup plus restreint.

Les références

- [1] LD LANDAU et E. LIFSHITZ, *Mechanics*, Pergamon Press, 1976.
- [2] N. DERUELLE et JP UZAN, *Mécanique et gravitation newtoniennes*, Vuibert, 2006.
- [3] C. COHEN-TANNOUDJI, B. Dju et F. LALOË, *Mécanique quantique*, John Wiley, 1992.
- [4] PR HOLLAND, *La théorie quantique du mouvement*, Cambridge University Press, 1993.
- [5] J. SCHWINGER, *Mécanique quantique*, Springer, 2001.
- [6] F. HALZEN et AD MARTIN, *Quarks & leptons*, John Wiley and Sons, 1984.
- [7] MA PESKIN et DV SCHROEDER, *Une introduction à la théorie quantique des champs*, Addison-Wesley, 1995.
- [8] W. GREINER et J. REINHARDT, *Quantification FieJd*, Springer-Verlag, 1996. [9] LH RYDER, *Théorie quantique des champs*, Cambridge University Press, 1987.
- [10] JI Kapusta, *Théorie du champ fini de la température*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, 1994
- [11] W.-M. YAO et *al.*, « La revue de la physique des particules », *Journal of Physics*, G 33, 1, 2006 ; voir aussi le site <http://pdg.lbl.gov/> qui donne les mêmes informations. Mis à jour presque tous les deux ans pour prendre en compte les nouvelles expériences et leurs résultats.
- [12] E. SEGRÉ, *Des rayons X aux quarks : les physiciens modernes et leurs découvertes*, L'homme libre , 1980.
- [13] H. GEORGI, *Algèbres de Lie en physique des particules*, Westview Press, 1999.
- [14] W. PAULI, dans *Niels Bohr et le développement de la physique*, Pergamon Press, 1955 ; G. LÜDERS, *Ann. Phys. (NY)* 2, 1, 1957.
- [15] B. Dru et *al.*, *Physique statistique*, Hermann, 1996.

Partie II

Le modèle cosmologique standard moderne

L'Univers homogène

La première solution cosmologique de l'équation d'Einstein a été donnée par Einstein lui-même en 1917. Au prix de l'introduction d'une constante cosmologique, il a pu construire un espace fermé et statique. Les solutions cosmologiques générales ont été découvertes indépendamment par Alexandre Friedmann et Georges Lemaître en 1922 et 1927.

Ce chapitre détaille la dérivation de ces solutions à partir des équations d'Einstein et étudie leur cinématique et leur dynamique avant de définir les différentes quantifications observationnelles qui seront utilisées dans ce livre. Il se termine par quelques considérations sur des espaces-temps moins symétriques. Pour des développements complémentaires, voir Réf. [1-7].

3.1 La solution cosmologique de Friedmann-Lemaître

3.1.1 Construire un modèle d'univers

Dans le cadre de la relativité générale, on peut tenter de répondre à la question de savoir quelle solution de l'équation d'Einstein décrit l'Univers que nous observons, ou plus modestement, quelle solution est un modèle idéalisé (mais bon) de notre Univers. Pour mener à bien ce programme, nous avons besoin de suffisamment d'apports d'observations astrophysiques et cosmologiques.

Ce programme est en effet difficile à mettre en œuvre et sa solution dépendra notamment de la quantité de données disponibles. Mais, comme nous l'avons noté dans l'introduction, même avec des données idéales, les réponses que l'on peut apporter à ce problème sont limitées. Ces limitations s'expliquent principalement par le fait que nous observons seulement une partie finie d'un Univers (c'est un objet unique et nous ne pouvons pas discuter de sa nature probable en le comparant à des objets similaires) à partir d'une position spatio-temporelle donnée (et nous sommes incapables de choisir ce point).).

Les données astrophysiques sont principalement localisées sur notre cône de lumière passé et autour de notre ligne du monde passée pour les données géophysiques. Ils sont ainsi localisés sur (juste une partie) d'une face hypersmique en 3 dimensions. D'une part, il se peut que différents espaces-temps soient compatibles avec les mêmes données et, d'autre part, l'interprétation de ces données n'est pas indépendante de la structure espace-temps.

Ainsi, nous devons faire la distinction entre l' *Univers observable* (pour lequel, par - définition, nous disposons de données) et l' *Univers*, qui comprend des régions que nous ne pouvons pas directement influencer ou expérimenter. La déduction des propriétés géométriques de l'Univers à partir de l'Univers observable ne peut se faire sans hypothèses et sans préjugés philosophiques.

Le modèle cosmologique standard, dans sa forme la plus simple, repose sur quatre hypothèses centrales .

H1 *La gravitation est bien décrite par la relativité générale.* En effet, comme nous l'avons vu au chapitre 1, la relativité générale est bien appliquée aux petites échelles (par exemple, celles du système solaire).

mais nous ne pouvons pas exclure que ce ne soit pas le cas à grande échelle ou dans les premiers temps (voir, par exemple, le chapitre 12 pour des exemples de théories qui, dynamiquement, deviennent de plus en plus similaires à la relativité générale au cours de l'évolution de l'Univers). En particulier, le principe d'équivalence d'Einstein implique que les lois de la physique peuvent être extrapolées à tout moment (voir chapitre 1). Nous continuerons ainsi à appliquer, le plus longtemps possible, les lois classiques de la physique, notamment pour les interactions non gravitationnelles.

H2 *Hypothèse sur la nature de la matière.* Nous n'examinons pas l'espace-temps lui-même ni sa distribution de matière. Nous observons plutôt des objets particuliers (*par exemple* des galaxies,...) censés être représentatifs de la teneur totale en matière. L'influence des variations des propriétés des objets individuels sur l'inférence du contenu en matière de l'Univers doit être quantifiée. À grande échelle, nous supposons que la matière est décrite par un mélange d'un fluide sans pression et d'un rayonnement, tenant également compte d'une constante cosmologique. En particulier, nous supposons qu'il n'y a aucune matière en dehors du mode standard ! de la physique des particules décrite au chapitre 2. Il sera démontré que l'hypothèse du fluide parfait dérive de l'hypothèse H3.

H3 *Principes d'homogénéité.* Les hypothèses précédentes ne suffisent pas à résoudre les équations d'Einstein. Nous devons supposer certaines symétries pour l'espace-temps. Cette hypothèse et leurs conséquences sont discutées dans la section 3.1.2.

H4 *Structure globale.* Les hypothèses H1-H3 permettent, comme nous le verrons, de résoudre l'équation d'Einstein et de déterminer la structure locale du modèle de l'Univers. Cependant, il peut exister différentes variétés avec une géométrie locale identique et une topologie globale différente, qui correspondent au choix de différentes conditions aux limites. Pour un espace-temps globalement hyperbolique, le choix de la topologie se réduit au choix de la topologie des sections spatiales.

Comme nous le verrons, ces hypothèses nous permettent de construire des modèles d'univers très réussis, mais il y a des raisons de remettre en question chacune de ces quatre hypothèses. Ce sujet sera principalement abordé au chapitre 12.

3.1.2 Principes cosmologiques et coperniciens

Les galaxies semblent se propager de manière isotrope autour de nous, tout comme le rayonnement cosmique des micro-ondes. Cela indique que l'espace-temps décrivant l'Univers observable devrait avoir une symétrie sphérique autour de nous. Il y a deux explications possibles : soit notre GaJaxy se situe à un endroit particulier de l'Univers donc elle n'est pas homogène et doit avoir un centre. Ou bien l'espace-temps est homogène ; chaque point est alors similaire et l'Univers est isotrope autour de chaque point (voir Fig. 3.1).

Pour construire des modèles cosmologiques, on peut distinguer deux principes d'uniformité. Le *principe cosmologique* suppose que l'Univers est spatialement isotrope et homogène. Cela implique notamment que tout observateur voit un Univers isotrope autour de lui. On peut le distinguer du *principe copernicien* qui stipule simplement que nous ne nous trouvons pas dans un endroit particulier (le centre) de l'Univers. Ce principe, ainsi que l'hypothèse de l'isotropie, implique en réalité le principe cosmologique.

Le principe cosmologique fait des prédictions précises sur toutes les régions inobservables au-delà de l'Univers observable. Il détermine intégralement la structure entière de l'Univers, même pour les régions qui ne peuvent pas être observées. De ce point de vue, cette hypothèse, qui ne peut être testée, est très forte. Le principe copernicien a

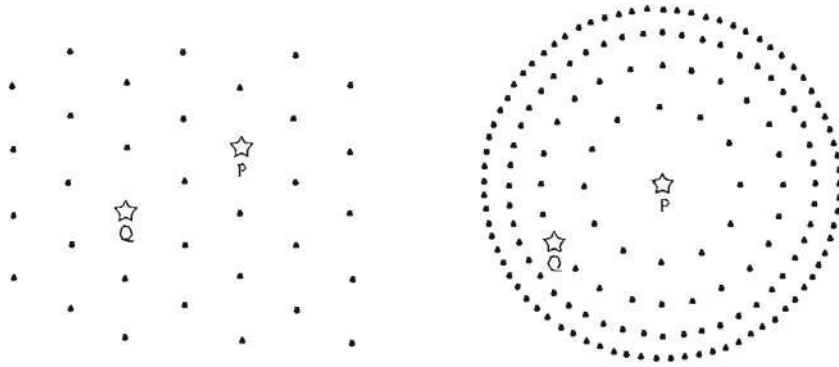


Fig. 3.1 A point distribution, statistically isotropic around every point (left) and around a unique point (P) (right). In the second version, P and Q are not équivalent. The cosmological principle excludes such kinds of solutions, which would assume that we lie in a spécial place in the Universe. From Ref. [1] of the introduction.

des conséquences plus modestes et conduit aux mêmes conclusions mais uniquement pour l' - Univers observable où l'isotropie a été vérifiée. Elle ne fait aucune prédiction sur la structure de l'Univers pour des régions non observées (en particulier, l'espace pourrait être homogène et non isotropie à des échelles plus grandes que l'Univers observable). Certains espaces cosmologiques qui ne satisfont pas à ce principe cosmologique sont décrits dans la section 3.6.

D'un point de vue pragmatique, ces principes d'uniformité doivent être considérés dans un sens statistique, c'est à dire pour un Univers lissé sur des distances supérieures à ses plus grandes structures. Ils impliquent donc implicitement une *échelle de lissage* et une procédure de lissage sur lesquelles nous reviendrons. Elles conduisent aux solutions de Friedmann-Lemaître qui sont à la base de la cosmologie moderne. Récemment, un test du principe copernicien a été proposé [8].

3.1.3 Principe cosmologique et métrique

L'homogénéité et l'isotropie sont deux notions distinctes qu'il conviendrait de définir plus précisément.

L'*homogénéité* de l'espace fait qu'à chaque instant, chaque point de l'espace est semblable à n'importe quel autre. Plus précisément, un espace-temps est (spatialement) homogène s'il existe une famille à un paramètre d'hypersurfaces de type espace, $\mathcal{S}_t$, feuilletant l'espace-temps tel que pour tout t et pour toute paire de points (P, Q) de il existe une isométrie de la métrique espace-temps prenant P dans Q (voir Fig. 3.2).

L'*isotropie* signifie qu'en tout point l'Univers peut être considéré comme isotropie. Plus précisément, un espace-temps est (spatialement) isotropie en chaque point s'il existe une congruence de lignes d'univers de type temps avec le vecteur tangent u_P (appelé *observateurs d'isotropie*) tel qu'en tout point P et pour toute paire de vecteurs tangents spatiaux unitaires u et v en P (voir Chapitre 1), il existe une isométrie de la métrique qui laisse P et $u^\perp$ en P fixes et qui fait pivoter les vecteurs e^* en $e^\wedge$. Ainsi, il est impossible de construire un vecteur tangent préféré perpendiculaire à tzP

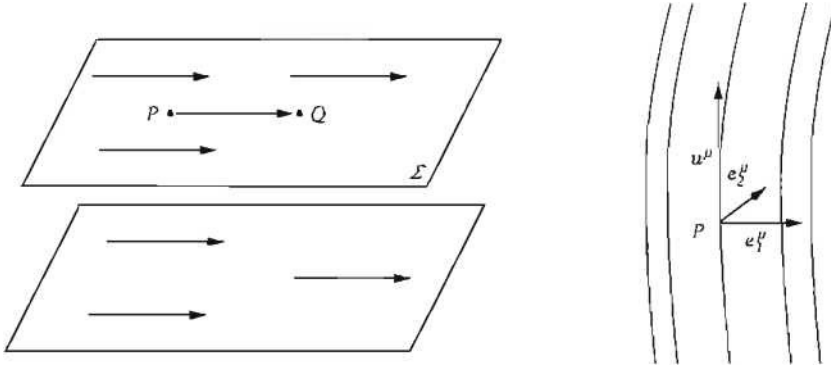


Fig. 3.2 (à gauche) : Un espace-temps homogène peut être feuilleté par une famille d'espaces homogènes ; (à droite) : pour un espace isotropie, il existe une isométrie qui fait pivoter toute unité spatiale tangente vector e^μ à n'importe quelle autre tandis que le vector u^μ reste invariant. De la Réf. (9).

Nous reconnaissons que pour un espace-temps homogène et isotropie, les surfaces d'homogénéité doivent être orthogonales à la tangente *en haut* de la ligne d'univers des observateurs isotropes, que l'on appelle ainsi *observateurs fondamentaux*. (*Preuve*. Si ce n'était pas le cas ; alors, en supposant que l'espace homogène et la congruence des observateurs d'isotropie soient uniques, l'échec du sous-espace tangent perpendiculaire à u^μ à coïncider avec nous permettrait de construire un espace géométriquement privilégié. direction (ce qui est en contradiction avec l'isotropie).

La métrique. induit une métrique spatiale γ_{ij} sur l'hypersurface Σ_t . Comme nous venons de le voir, il doit exister une isométrie de Σ_t amenant n'importe quel point de Σ_t dans un autre point de Σ_t et il doit être impossible de construire un vecteur préféré à partir de γ_{ij} . Comme on peut le montrer, cela implique que le tenseur de Riemann construit à partir de γ_{ij} pour les espaces tridimensionnels doit être de la forme $R_{ijkl} = K(\gamma_{ij}\gamma_{kl} - \gamma_{il}\gamma_{jk})$ [2,9,10]

où K a, du fait de son homogénéité, la même valeur en tout point de Σ_t et ne peut être qu'une fonction de t . Un espace satisfaisant cette propriété est appelé un espace *maximalement symétrique*.

espace métrique (comme nous le verrons, il a le nombre maximum de vecteurs Killing permis par sa dimension) et est un espace de courbure constante. Deux espaces de courbure constante de même dimension, signature et même valeur de K sont isométriques. Il suffit donc d'énumérer les espaces tridimensionnels correspondant à toutes les valeurs de K .

Nous classons ces espaces selon le signe de K . Si K est positif, Σ_t est une sphère tridimensionnelle de rayon $\sqrt{3/K}$, d'équation de plongement $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = R^2$ (i) dans un espace euclidien à quatre dimensions. En coordonnées sphériques,

Nous classons ces espaces selon le signe de K . Si K est positif, Σ_t est une sphère tridimensionnelle de rayon $\sqrt{3/K}$, d'équation de plongement $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = R^2$ (i) dans un espace euclidien à quatre dimensions. En coordonnées sphériques,

$$x = R \cos \chi, y = R \sin \chi \cos \theta, z = R \sin \chi \sin \theta \cos \phi, w = R \sin \chi \sin \theta \sin \phi, \text{ la métrique}$$

8 Comme le montre la réf. [6], cette conclusion peut être tirée (à partir de l'argument d'isotropie. Considérons comme les composants d'une application linéaire, L , de l'espace vectoriel des 2 formes en lui-même. Puisque L est symétrique,

9 il peut être diagonalisé. Si ses valeurs propres n'étaient pas égales, alors on pourrait construire une forme 2 préférée puis une direction préférée. Ainsi, l'isotropie implique que L est proportionnel à l'identité et donc par symétrie.

euclidienne $ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ induit la métrique tridimensionnelle sur (Σ_t) : $R^2(t) [d\varphi^2 + \sin^2 \varphi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\psi^2)]$.

Si $K = 0$, E_t est un espace euclidien tridimensionnel dont la métrique

$$d\Sigma^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2).$$

Si K est négatif, E_t est un hyperboloïde tridimensionnel, avec l'équation d'intégration $-w^2 + z^2 - I - y^2 - I - z^2 = -R^2(t)$. En coordonnées sphériques,

$i = r \cosh \chi$, $r = R \sinh \chi \cos \theta$, $z = R \sinh \chi \sin \theta \cos \varphi$, $w = R \sinh \chi \sin \theta \sin \varphi$, la métrique Minkowski $ds^2 = -dw^2 - I - dx^2 - I - dy^2 - dz^2$ induit la métrique tridimensionnelle sur

$$d\Sigma^2 = R^2(t) [d\chi^2 + \sinh^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)].$$

Bien que la relativité restreinte ne puisse autoriser qu'un seul espace sans courbure, la relativité générale offre trois possibilités même sous la forte contrainte d'homogénéité et d'isotropie.

3.1.3.1 Métrique à quatre dimensions

Les lignes d'univers des observateurs fondamentaux sont orthogonales aux hypersurfaces E_t . Le système de coordonnées peut être transporté d'une hypersurface à une autre grâce à cette congruence de lignes d'univers.

La forme générale de la métrique espace-temps est imposée par ces considérations de symétrie

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) [d\chi^2 + \sinh^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)],$$

où, pour chaque valeur de Z , γ^2 est la métrique d'une sphère tridimensionnelle, d'un espace euclidien ou d'un hyperboloïde. Il s'ensuit que l'élément linéaire de l'espace cosmologique prend la forme

$$ds^2 = -(u^a dx^a)^2 - \gamma_{ij}(Z) dz^i dz^j.$$

En définissant $dT = dt/a$, la coordonnée t est le temps propre mesuré par les observateurs (c'est-à-dire en se déplaçant avec et nous obtenons la forme générale de la métrique espace-temps comme

$$ds^2 = -dT^2 - a^2(t) \gamma_{ij}(x^k) dx^i dx^j \quad (3.1)$$

t étant le temps cosmique, $a(t)$ le facteur d'échelle et γ_{ij} la métrique des hypersurfaces à temps constant, S_t , en coordonnées comobiles. Les indices latins vont de 1 à 3. Le temps conforme τ , défini par

² Cela implique que $\gamma_{ij}(x^k, z) = a^2 \gamma_{ij}(r^k)$, donc ce à quoi la métrique spatiale satisfait

et $K(t) = 3/Cn^2(t)$.

$$dt = a(t) dr, \quad (3-2)$$

peut également être introduit pour refondre la métrique (3.1) sous la forme

$$ds^2 = a^2(j) (-dr^2 + r^2 dr^2 dz^2). \quad (3.3)$$

La métrique spatiale, en coordonnées sphériques comobiles, prend la forme générale

$$da^2 = V_{ij} dx^i dx^j = dy^2 + (x) dQ^2, \quad (3.4)$$

où y est une coordonnée de rayon et $dQ^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ est l'angle solide infinitésimal, θ va de 0 à 2π et ϕ de $-\pi$ à π . La quantité V va de 0 à r lorsque $K > 0$, et de 0 à $+\infty$ sinon. La fonction V dépend de la courbure K (qui est maintenant un nombre de Pitre) comme

$$M(x) = \int_0^x \frac{1}{K(x)} dx \quad \begin{matrix} K > 0 \\ K = 0 \\ K < 0 \end{matrix} \quad (3.5)$$

Il relie la surface $S(y)$ d'une sphère comobile à son rayon y par $S(y) = 4\pi r^2(y)$ qui se réduit à l'expression euclidienne pour des distances petites par rapport à la courbure (c'est-à-dire pour $x \ll 1/K$). En utilisant la coordonnée radiale $r =$ (3.1) on peut aussi prendre la formule

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) Q^2 \quad (3.6)$$

Cette métrique, ou les formes équivalentes (3.1) ou (3.3), est appelée métrique de Friedmann-Lemaître.

Cette construction montre comment le principe cosmologique, et donc les hypothèses de symétrie qui en découlent, nous ont permis de réduire les dix fonctions arbitraires de la métrique espace-temps à une seule fonction d'une variable, $a(t)$, et d'un nombre pur, K .

3.1.3.2 Quantifications géométriques

L'expression des symboles de Christoffel peut être obtenue en utilisant les définitions du chapitre 1 et la métrique (3.1). Leurs seuls composants qui ne disparaissent pas sont

$$\Gamma^0_{ij} = \frac{1}{a} \dot{a} \delta_{ij}, \quad \Gamma^i_{0j} = \dot{a} \delta^i_j, \quad \Gamma^i_{jk} = -\frac{1}{a} \dot{a} \delta^i_j \delta^i_k \quad (3.7)$$

où les $\dot{a}$ sont les symboles Christoffel de la métrique spatiale y_{ij} . La quantité $H = \dot{a}/a$ est le paramètre de Hubble, et un point représente la dérivée par rapport au temps cosmique t .

La forme explicite de $R^{\mu\nu}$ n'est pas nécessaire pour calculer la composante du tenseur de Ricci car la métrique spatiale y_{ij} satisfait $R_{y_i y_j} = -y_{ij} H^2$, de sorte que

6 K Il s'ensuit que les seules composantes non nulles du tenseur de Ricci sont¹⁰

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}, \quad R_{ij} = \frac{2H^2}{c^2} a^2 \delta_{ij} - 2\frac{\dot{a}}{a} \delta_{ij} \quad (3.8)$$

d'où on déduit l'expression de la courbure scalaire

$$R = 6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2H^2\right), \quad (3.9)$$

et pour les composantes non nulles du tenseur d'Einstein

$$G_{00} = 3\frac{\ddot{a}}{a} - 2H^2, \quad G_{ij} = -\left(\frac{2H^2}{c^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)a^2 \delta_{ij}. \quad (3.10)$$

3.1.3.3 Tuer des vecteurs

Comme expliqué au chapitre R à chaque symétrie d'un espace-temps est associé un champ de vecteurs Killing, 4» satisfaisant (1,58). Nous avons vu que pour un espace-temps de dimension n , le nombre maximal de vecteurs Killing indépendants, et donc des symétries, est $n(n-1)/2$. Pour l'espace-temps de Friedmann-Lemaître, les sections spatiales sont symétriques au maximum de sorte que l'on s'attend à obtenir 6 vecteurs Killing. Ils peuvent être explicitement déterminés en considérant les coordonnées de Weinberg

$$\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial x^i} \cos \theta = -\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial x^i} \sin \theta \cos \phi, \quad \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial x^i} \sin \theta \cos \phi = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial x^i} \sin \theta \sin \phi$$

en termes desquels la métrique spatiale, et son inverse, prennent la forme

$$g_{ij} = \frac{1}{a^2} \delta_{ij}, \quad g^{ij} = a^2 \delta^{ij} = -KM, \quad (3.11)$$

avec $r^2 = 6_{mn} x^m x^n$.

L'équation de Killing, $\nabla_{(i} \xi_{j)} = 0$, donne pour la composante $\hat{u}$, $\xi^0 = 0$, donc cela est fonction des coordonnées spatiales uniquement, $\xi^i = F(x^k)$. Alors, les composantes $0i$ et ij prennent la forme $G = g^{kz} D_k \xi^z$ et $\nabla_{(i} \xi_{j)} = 0$, où est la dérivée covariante associée à $\gamma^{\hat{}}$. Ils peuvent être combinés pour obtenir

$$D D_3 F + H c^2 F = 0.$$

Seul $H a^2$ peut éventuellement dépendre du temps dans cette équation. Si tel est le cas, $H a^2$ n'est pas un nombre pur, alors cela implique que $F = 0$. Nous avons donc six solutions aux équations de Killing :

10A titre d'exemple, considérons que le calcul de It peut être décomposé comme $\mathbf{FL}^{\hat{}} = \text{dofF} - \text{dyPj} \cdot \mathbf{a} +$ où tous les termes n'impliquant aucun $\mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 0$ composant. ont été rassemblés pour identifier le tenseur de Ricci de la métrique spatiale du Che. On utilise alors $\text{thai } \mathbf{R}^{\hat{}} \mathbf{j} - 2\mathbf{Ky}_{,y} = 2(f \cdot \mathbf{a}'^2) \mathbf{g}_{,j}$.

- trois vecteurs Killing associés aux traductions spatiales

$$P^* : \quad q^{\circ} = 0, \quad r = 1, \dots, 3, \quad (3.12)$$

- trois vecteurs Killing associés aux rotations spatiales

$$\nabla_{\mathbf{p}_{rs}} (\mathbf{A} \mathbf{e}_{rs}) = 0, \quad P_{[r}^{\mathbf{f}} \mathbf{e}_{s]} = Z \mathbf{f} \otimes \mathbf{e}_{rs} - \delta^{est} x^r \mathbf{e}_s, \quad r, s = 1, \dots, 3. \quad (3.13)$$

Lorsque Ha^2 ne dépend pas du temps, $Ha^2 = K$, comme nous le verrons d'après les équations de Friedmann. Cela se produit pour les espaces Minkowski, de Sitter et anti-de Sitter. Il s'ensuit qu'il existe *quatre* solutions supplémentaires associées à la traduction temporelle et aux boosts de Lorentz. Ils sont respectivement donnés par

$$T^{\mu} : \quad T^0 = \sqrt{1 - Kr^2}, \quad T^k = -H x^k \sqrt{1 - Kr^2} \quad (3.14)$$

and

$$L_{[r]}^{\mu} : \quad L_{[r]}^0 = x^r, \quad L_{[r]}^k = H \begin{cases} \left[\frac{1}{2} \delta^{kr} (r^2 - \eta^2) - x^k x^r \right] & \text{for } K = 0, \\ (K \delta^{kr} - x^k x^r) & \text{for } K = \pm 1, \end{cases} \quad (3.15)$$

en termes de temps conforme p .

Du fait de l'expansion de l'Univers, ces quatre vecteurs ne sont plus des vecteurs Killing de l'espace-temps de Friedmann-Lemaître. Ils satisfont maintenant l'équation $\nabla_{\mathbf{A}} \mathbf{L}^{\mathbf{A}} = (\gamma_a \mathbf{L}^a) \mathbf{ffu}''/2$ et sont appelés *vecteurs conforma*/ *KiJ/jng*. Les symétries impliquant le temps (c'est-à-dire la translation temporelle et les accélérations de Lorentz) sont perdues du fait que les espaces-temps cosmologiques ne sont pas statiques mais ils sont toujours conformes à un espace-temps statique, une propriété liée à l'existence de ces quatre vecteurs Killing conformes.

3.1.4 Cinématique

Sans connaître la loi d'évolution du facteur d'échelle $a(t)$, quelques conséquences générales peuvent être obtenues simplement à partir de la forme de la métrique de Friedmann-Lemaître.

3.1.4.1 Observateurs fondamentaux

Notons tout d'abord que dans la métrique (3.1), les coordonnées x^r sont mobiles. La ligne d'univers d'un observateur fondamental de trajectoire orthogonale aux hypersurfaces $S/$ est donnée par $x^0 = t$ et $x^i = \text{constant}$ (on peut vérifier qu'il s'agit bien d'une géodésie de type timelike). En conséquence, cet observateur a un mouvement à quatre vitesses

$$u^{\mu} = \delta_0^{\mu} \quad (3.16)$$

Comme vu précédemment, cette métrique peut être ré-exprimée sous la forme $ds^2 = -(u^\mu dx^\mu)^2 + q^{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$

$$^2 + q^{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (3.17)$$

est le tenseur du projecteur introduit dans la section 1.2,5. Le

L'expansion de l'Univers permet ainsi à un observateur en mouvement de décomposer naturellement tout vecteur $P^{\wedge}$ en une composante temporelle et spatiale comme

$$= + (31g)$$

En particulier, tous les outils présentés dans les sections 1.2.5 et 1.3.2 du premier chapitre peuvent être utilisés.

3.1.4.2 Hubble Mw

Considérons maintenant deux comobiles liées de trajectoires données par $x = x_{-i}$ et $x = x_{-2}$. Dans l'espace physique, leur séparation est donnée par

$$r_{12} = -x_{-2}.$$

Il s'ensuit que

$$r_{12} = Hr_{12}. \quad (3.19)$$

Plus les observateurs sont éloignés les uns des autres, plus leur vitesse relative est grande. C'est ce qu'on appelle communément la loi de Hubble. Notez que H dépend a priori du temps et ne peut être approché comme une constante que pour des objets dont la distance est petite par rapport au rayon de Hubble. Notons que cette loi est un cas particulier de la loi de Hubble généralisée (1.119) avec $\mathcal{E} = 3H$ et $07_p = 0$, imposée par l'homogénéité et l'isotropie.

3.1.4.3 Vitesse de récession et vitesse appropriée

Puisque la distance physique r est liée à la distance de déplacement x avec la relation $r = a(t)x$, on en déduit que

$$n = Hr_{12}(t) = v_{rec} T_{12} p_{12}. \quad (3.20)$$

La vitesse de récession, v_{rec} , est une quantité dépendant du temps et représente la composante de la vitesse liée au flux de Hubble. Quant à v_{proper} , c'est la vitesse propre de l'objet par rapport au référentiel cosmologique privilégié par l'expansion.

3.1.4.4 Propriétés de la lumière

Dans la limite de l'optique géométrique, il a été montré que la trajectoire d'un rayon lumineux, $z''(A)$, est donnée par une géodésie nulle de vecteur d'onde $= dx^a/dX$ satisfaisant

$$= 0 \text{ et } k^{\wedge}_p k P = 0. \quad (3.21)$$

En utilisant la décomposition générale (3.18), on obtient

$$+ p^{\wedge} \Delta X,$$

où E — représente l'énergie d'un photon mesurée par le comobile observateur et son élan ($p^M n_M = \hat{u}$). Il s'ensuit que

$$-E^2 + a^2 \dot{p}^i p_i = 0,$$

ce qui est simplement la généralisation de la relation bien connue entre l'énergie d'un objet, sa quantité de mouvement et sa masse. De plus, la projection le long de l'équation géodésique donne

$$E\dot{E} + E^i p^i \dot{p}_i = E\dot{E} + \dots = 0,$$

de sorte que $E/E = -H$ et donc $E = k/a$, k étant a. constante. L'énergie, et donc la fréquence $M \propto E$, de tout photon varie comme l'inverse du facteur d'échelle. Sa longueur d'onde varie selon le facteur d'échelle. Dans un espace en expansion, les longueurs d'onde sont ainsi décalées vers le rouge de manière achromatique.

The redshift defined by the general equation (1.122) is therefore given by

$$1 + z = \frac{(u^\mu k_\mu)_{\text{emission}}}{(u^\mu k_\mu)_{\text{observation}}} = \frac{a(t_{\text{observation}})}{a(t_{\text{emission}})}. \quad (3.22)$$

Le redshift peut être mesuré à partir de la comparaison d'un spectre observé avec un spectre de laboratoire, à partir duquel on peut déduire l'ampleur de l'expansion de l'Univers depuis son émission. Nous soulignons ici que la plupart des observations donnent une position angulaire sur la sphère céleste et un redshift. La distance radiale ne peut pas être mesurée directement mais est obtenue à partir du redshift et nécessite la connaissance de la loi d'expansion de l'Univers, c'est-à-dire $a(t)$.

3.1.4.5 Comportement d'une particule test massive

Considérons maintenant la trajectoire d'une particule test massive à 4 vitesses. Elle satisfait

$$v^\alpha v_\alpha = 1. \quad (3.23)$$

peut être divisé comme $1 = u^\mu u_\mu + p^\mu p_\mu$, où u^μ est la 4-vitesse des observateurs fondamentaux et p^μ satisfait $u^\mu p_\mu = 0$. Cela découle de $u^\mu u_\mu = v^\alpha v_\alpha = 1$ que $p^\mu p_\mu = 1 - u^\mu u_\mu = 0$. L'équation géodésique pour v^μ conduit alors à $u^\alpha \dot{a} = (0 = H p^\mu p_\mu)$ de sorte que $\dot{a} + 1/(1 + c^2) = 0$ d'où on obtient que $1 + c^2 \propto a^{-2}$.

Nous concluons que p^μ ex a^{-2} de sorte que $a \rightarrow 1$ et $r \rightarrow \infty$ —> La vitesse propre de toute particule massive de test est amortie comme a^{-2} et sa ligne d'univers tend à s'ajuster au flux de Hubble, c'est-à-dire à les lignes du monde des observateurs fondamentaux.

3.1.5 Dynamique spatio-temporelle

Jusqu'à présent, nous avons décrit les implications de la géométrie de Robertson-Walker. Pour étudier la dynamique de ces espaces-temps, il faut obtenir les équations de mouvement dérivées de l'équation d'Einstein. Lorsque ces équations sont remplies, nous appelons ces solutions espaces-temps de Friedmann-Lemaître.

3.1.5.1 Tenseur énergie-impulsion

Le tenseur énergie-impulsion est un tenseur symétrique de rang 2. Les formes possibles que peut prendre ce tenseur sont réduites par les symétries espace-temps. En effet, la forme la plus générale compatible avec les symétries est

"Je" $g_{\mu\nu}$

B représente la seule composante spatiale (pour les observateurs fondamentaux) ; elle est donc identifiée ! avec la pression que l'on voit ainsi se réduire à un nombre unique pour un espace homogène et isotrope. $A = T^{\mu\nu}u_{\mu}u_{\nu} = p$ est la densité d'énergie mesurée par les observateurs fondamentaux. En conclusion, la forme la plus générale du tenseur énergie-impulsion est celle d'un fluide parfait.

$$T_{\mu\nu} = pu^{\mu}u^{\nu} - P g_{\mu\nu} \quad (3.24)$$

La densité d'énergie, p , et la pression, P , ne dépendent que du temps. Cette forme est entièrement fixée par le principe cosmologique et ne constitue pas un choix indépendant. Ainsi, la seule liberté qui reste est le choix de l'équation d'état, c'est-à-dire la relation entre la pression et la densité d'énergie.

3.1.5.2 Friedmann et les équations de conservation

En utilisant les expressions du tenseur d'Einstein et la forme (3.24) du tenseur énergie-impulsion, on peut facilement déduire que les deux équations d'Einstein se réduisent à deux équations indépendantes

$$H^2 = \frac{\kappa}{3}\rho - \frac{K}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (3.25)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa}{6}(\rho + 3P) + \frac{\Lambda}{3}, \quad (3.26)$$

rappelant [voir (1.130)] que $K = 8\pi G_N$.

Quant à l'équation de conservation de la matière ($\nabla_{\mu}T^{\mu\nu} = 0$), elle se réduit à une seule équation

$$p + 3P(\dot{p} + pH) = 0. \quad (3.27)$$

On peut se convaincre que les trois équations (3.25), (3.26) et (3.27) ne sont pas indépendantes [en effet, en différenciant (3.25) par rapport au temps et en exprimant $\dot{a}/a$ en utilisant (3.26) et (3.25) pour éliminer $\ddot{a}$, on trouve (3.27)]. C'est une conséquence des identités Bianchi.

3.1.5.3 Approche covariante

Dans l'approche covariante, un espace de Robertson-Walker est défini par les conditions $\dot{g}_{\mu\nu} = 0$ pour toute fonction scalaire f , ce qui implique que $\dot{U}^{\mu} = 0$, et $\nabla_{\mu}T^{\mu\nu} = 0$, donc $\dot{\rho} + 3H\rho = 0$. L'espace étant isotrope, on peut poser $S = a$, et donc $H = \dot{S}/S$ et l'équation de Raychaudhuri (1.73) donne

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{1}{2}(\rho + 3P) + \frac{\Lambda}{3},$$

et l'équation de Friedmann généralisée (1.78) donne ⁴

$$(\dot{a})^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{2}{c^2} \frac{1}{a^2} = \frac{2}{c^2} \left(\frac{c^2}{2} \rho + \frac{\Lambda}{2} - \frac{1}{a^2} \right) \quad (3.26)$$

On retrouve les équations de Friedmann, mais le régime de validité des équations de Raychaudhuri et de Friedmann généralisées est plus large puisqu'elles s'appliquent ainsi aux Univers non isotropes, comme les Univers de Bianchi (see ci-dessous).

3.1-5.4 Equations en temps conforme

Il sera parfois pratique de travailler dans des délais conformes. En nous rappelant que $dt = a dq$, nous trouvons que la dérivée de toute quantité X par rapport à q , $X|$ est liée à celle par rapport à t par $X' = aX|$. Il sera utile de rappeler que

$$X' = aX|, \quad X'' - HX' = cPX|.$$

La constante de Hubble mobile — a'/a a été introduite, qui satisfait notamment

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{a'}{a} \right) = - \frac{a''}{a^2} = - \frac{1}{a^2} \frac{d^2 a}{dt^2} = - \frac{1}{a^2} \frac{d}{dt} (a^2 H) = -2H \frac{a'}{a} - H^2.$$

On en déduit que les équations de Friedmann et de conservation [(3.25) à (3.27)] prennent la forme

$$\mathcal{H}^2 = \frac{\kappa}{3} \rho a^2 - K + \frac{\Lambda}{3} a^2, \quad (3.28)$$

$$\mathcal{H}' = -\frac{\kappa}{6} a^2 (\rho + 3P) + \frac{\Lambda}{3} a^2, \quad (3.29)$$

$$\rho' + 3\mathcal{H}(\rho + P) = 0. \quad (3.30)$$

Notez également que si le facteur d'échelle est une loi de puissance dans le temps cosmique, alors

$$a(t) \propto t^q \Leftrightarrow \hat{a}(q) \propto q, \quad (3.31)$$

tant que $q \neq -1$.

3-1-5-5 Équation d'état

On a donc deux équations indépendantes pour trois inconnues (le facteur d'échelle, la densité d'énergie et la pression). Nous avons donc besoin de quelques informations supplémentaires pour résoudre ce système. Pour cela, le moyen le plus pratique est de donner une équation d'état pour la matière sous la forme

$$P = w\rho. \quad (3.32)$$

Par exemple, la matière sans pression sera décrite par $w = 0$ alors que pour le rayonnement, nous aurons $w = 1/3$. Pour la constante cosmologique, Λ , qui correspond à une constante

"Noce" qui ici *Réfère* à la courbure gaussienne des hypersurfaces à métrique Ceci explique pourquoi

R

— $6K/c^2$.

energy density, (3.27) implies $P = -p$ and thus $w = -1$. The resolution of (3.27) implies that for any constant w ,

$$\rho \propto a^{-3(1+w)} \quad (3.33)$$

Comparing this general result with equations (3.25) and (3.26), we notice that the curvature term can be assimilated with a fluid with equation of state $w = -1/3$.

By differentiating w with respect to time and expressing p' with the conservation equation (3.30) we get

$$(3.34)$$

where c_s is the speed of sound, defined by

$$c_s^2 = \frac{p'}{\rho} \quad (3.35)$$

For a barotropic fluid $w = cf$, so that w is a constant.

3.1.5.6 Reduced form

It is useful to rewrite the Friedmann equations in a dimensionless form in terms of reduced quantities. For that, we introduce the energy density parameters

$$(3.36)$$

respectively, for the matter, the cosmological constant and the curvature. The matter term can be decomposed as a sum of components with different equations of state as Ω_i with

$$\Omega_i = \frac{\rho_i}{3H^2} \quad (3.37)$$

and we will denote by $\Omega_{i,0}$ its value today. The first Friedmann equation (3.25) then takes the form of a constraint

$$\sum_x \Omega_x + \Omega_\Lambda + \Omega_K = 1. \quad (3.38)$$

En utilisant les solutions de l'équation de conservation, il s'ensuit que

$$\Omega_i \propto a^{-3(1+w_i)}$$

pour une équation constante d'état w_i de sorte que $E(a) = H/H_0$ peut être exprimé

⁵ For a general $\Omega_{i,0}$

comme

équation d'état dépendant du temps, on peut vérifier que $Q_x [-^3 f\hat{a}o\ 0 + ^w *)^{\hat{d}\ln a}] \bullet$.

On retrouve cela pour $O_o = 1$ (soit $K = \hat{u}$), $= oo$. Un espace euclidien n'a pas
échelle de courbure caractéristique.

3.2 Dynamique des espaces-temps de Friedmann-Lemaître

3.2.1 Quelques solutions

En utilisant l'équation de Friedmann (3.25), la loi d'évolution du facteur d'échelle peut être déterminée en fonction du temps pour certains cas simples.

3.2.1.1 $K = 0$ et $w = -1$

Comme vu précédemment, si $w = -1$, l'équation de conservation implique que $\rho \propto a^{-3(1+w)}$. It follows that $\rho \propto a^{-(1+3w)/2}$ (3.25) implique H^2

En intégrant cette relation, on obtient,

$$a(t) \propto e^{\frac{2}{3(1+w)}t}. \quad (3.40)$$

A partir de cette expression, le temps conforme peut être calculé en intégrant $dp = dt/a(t)$, donnant $p \propto t^{\frac{1+3w}{3}}$ si $w \neq -1/3$. On en déduit que

$$(3.41)$$

et $a(t) \propto \exp(\dots)$ sinon.

3.2.1.2 $K = 0$ et $w = -1/3$

Si la densité de matière est dominée par une constante cosmologique, on a $H^2 \propto \rho \propto a^0$, de sorte que $\dot{a} \propto a$. En intégrant cette relation, on obtient

$$a(t) \propto e^{Ht}. \quad (3.42)$$

Cet espace a une expansion accélérée et est appelé espace de Sitter. En termes de temps conforme, le facteur d'échelle est de la forme

$$(3.43)$$

Cet espace peut également être écrit de telle manière qu'il comporte des sections spatiales sphériques (voir chapitre 8).

$$(3.44)$$

3.2.1.3 $K = \pm 1$ et $w = -1/3$

Il est plus pratique de travailler en temps conforme pour obtenir $a(t)$ sous la forme paramétrique $(a(p))$. En utilisant $p = p_0 (a/a_0)^{-3(1+w)}$ et (3.25), on obtient

$$-(1+3w) \quad -UN;$$

en unités telles que $|A| = 1$. Cette équation peut être intégrée pour donner

$$\frac{un \setminus \_\_\_ / UQ \setminus}{do / \setminus 1 - Ho | J} \quad f(\sinh ar) \ddot{Y}^{\wedge a} \text{ si } K = -1, \quad (3.45)$$

$$[\wedge (\sin otr) \ddot{Y}^{\wedge a} \text{ si } R = +1,$$

avec $2\omega = 1 + 3w$. Cette solution est valable pour toute constante $w = -1/3$. Le cas $zu = -1/3$ correspond à un Univers sans matière puisque la matière peut alors être absorbée dans le terme de courbure.

3.2.1.4 $K = 0, w = 0$ et $A/\dot{u}$

Citons la solution pour un modèle spatialement euclidien dominé par un fluide sans pression et une constante cosmologique [11]

$$\alpha(t) = G t^{-1} \sinh^{2/3}(\Lambda r) \quad (3.46)$$

où $wea = H_Q \setminus UAO$ - Cette solution est pertinente pour décrire l'évolution tardive d'un modèle Λ CDM plat.

3.2.1.5 *Autres solutions*

Nous présentons sur la figure 3.3 le profil de l'évolution du facteur d'échelle dans un grand nombre de situations, correspondant à différents types de matière, courbure et valeur de la constante cosmologique.

On peut remarquer la présence de périodes d'évolution plus lente (une phase « hésitante ») de durée variable selon les valeurs de la constante cosmologique (voir par exemple les cas F, L ou K). Durant ces phases, l'Univers se rapproche d'un Univers statique d'Einstein (soit à $= 0$) pour lequel

$$\dot{U}^2 = 1/A_E K, p = 2A_E.$$

Il s'agit donc d'un Univers sphérique pour lequel l'attraction gravitationnelle est juste compensée par l'effet répulsif de la constante cosmologique. Le comportement de ces solutions dépend principalement des valeurs relatives de la constante cosmologique et de A_E .

Une autre solution intéressante est celle obtenue pour un Univers vide avec des sections spatiales hyperboliques ($K = -1$). Cet espace, appelé espace de Milne, a la métrique suivante

$$ds^2 = -dt^2 + t^2 (d\chi^2 + \sinh^2 \chi dU^2) \quad (3.47)$$

On peut montrer que cette métrique correspond à une métrique de Minkowski par un changement approprié de coordonnées ($T = t \cosh \chi, \theta = t \sinh \chi$ conduit à la métrique de Minkowski en coordonnées sphériques), mais cet espace ne couvre qu'un quart de la métrique de Minkowski. espace-temps.

3-2-2 Evolution dynamique

Afin d'étudier la dynamique générale des solutions des équations de Friedmann, il est intéressant de réécrire le Système (3.25) et (3.26) sous la forme d'un Système dynamique pour les quantités U , et $\dot{U}$ (voir Refs. [12-14]).

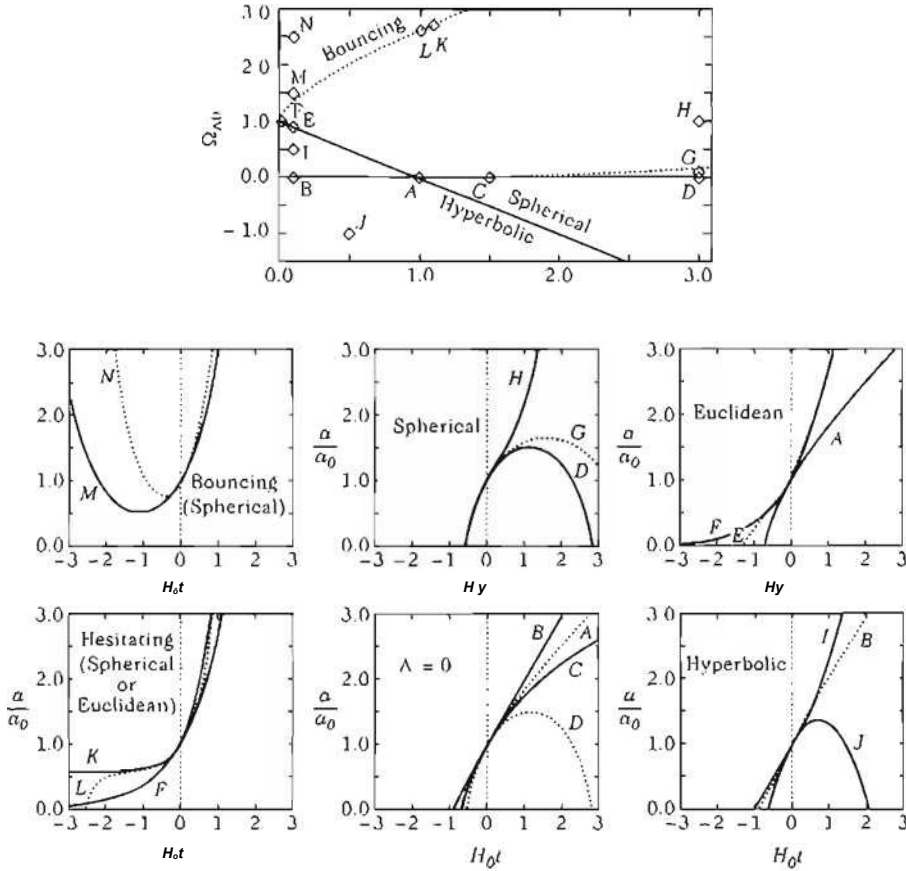


Fig. 3.3 Depending on the values of the cosmological parameters (upper panel), the scale factor can have very different évolutions.

3.2.2.1 Système dynamique

Utiliser $H = \dot{a}/a$ et H^2 avec (3.26) et H^2 avec (3.25) conduit à

$$\ddot{a} = -(\dot{a}^2 + \dot{a}) \quad \blacksquare \quad (3.48)$$

q est le paramètre de décélération défini par

$$2q = (3\gamma - 2)(1 - Q) - 3\gamma \ddot{a} / \dot{a}^3, \quad (3.49)$$

avec $\gamma = w + 1$.

Le système d'équations de Friedmann peut ainsi être réécrit en utilisant la nouvelle variable de temps $p = \ln(a/a_0)$. La dérivée, X' , par rapport à p de toute quantité X est alors donnée par $X' = X/H$.

L'équation d'évolution du paramètre Hubble (3.48) devient alors

(3,50)

Si nous différencions Q , O_A et par rapport à p et utilisons (3.50) pour exprimer H' , remarquant que $a' = a$ et que (3.30) peut être utilisé pour obtenir $p' = -3yp_y$ puis obtenir le Système

$$Q' = (2qH - 2 - 3q)Q, \quad (3.51)$$

$$O'A = {}_2(1 + q)fl_A \quad (3.52)$$

$$= 2gO^{\wedge}. \quad (3.53)$$

Il est inutile de conserver toutes ces équations puisque (i) H n'entre pas dans (3.51)-(3.53) et (ii) fl peut être déduit algébriquement à l'aide de (3.38).

La dynamique des espaces-temps Friedmann n-Le maître peut ainsi être étudiée en considérant le système dynamique

$$= 2(1 + ?)ft_A \kappa = \quad (3-54)$$

où q est fonction de fl_A et donné par (3.49).

Ce système associe un vecteur tangent unique à chaque point afin qu'une seule courbe intégrale passe par chaque point de l'espace des phases où le vecteur tangent est défini. Si deux trajectoires se croisaient, le vecteur tangent en ce point ne serait pas unique. Les points où le vecteur tangent n'est pas défini sont appelés *points fixes*.

3.2.2.2 Détermination des points fixes

Les points fixes sont définis par les conditions $fl_A = 0$ et $\dot{fl}_A = 0$ et sont donc des solutions de

$$(1+q)Q_A = 0; qD_K = 0. \quad (3,55)$$

Ils représentent les positions d'équilibre (stables ou non). Cette équation a trois solutions

$$(\wedge, fl_A) \in \{(0,0), (0,1), (1,0)\}, \quad (3,56)$$

et chacune de ces solutions représente un Univers avec des caractéristiques différentes.

- $(fl_A, fl_A) = (0,0)$: *l'espace d'Einstein-de Sitter* (EdS). Il s'agit d'un espace-temps sans courbure (sections spatiales euclidiennes) et sans constante cosmologique.
- $(fl_A, Q_A) = (0,1)$: *l'espace de Sitter* (dS). C'est un espace sans matière mais avec une constante cosmologique et les sections spatiales ont une courbure positive. Cet Univers est dans l'éternité expansion exponentielle.
- $(fl_A, Q_A) = (1,0)$: *l'espace de Milne* (M). C'est un espace vide sans cosmologique) constant mais avec des sections spatiales hyperboliques ($K < 0$).

3.2.2.3 Stabilité des points fixes

Pour déterminer si ces points fixes sont des attracteurs (A), des points selles (S) ou des répulsifs (R), il faut étudier l'évolution d'une petite perturbation autour de chaque position d'équilibre. Pour cela nous fixons

$$\mathbf{f}(\mathbf{K}) = \mathbf{P}\mathbf{K} \quad (3.57)$$

$$\mathbf{Q}\mathbf{A} = \mathbf{H}\mathbf{A} \ll \mathbf{H}\mathbf{U}\mathbf{M}, \quad (3.58)$$

avec $(\mathbf{T}\mathbf{I}\mathbf{A}, \mathbf{f}\mathbf{l}/<)$ les coordonnées de a. point fixe et $(\mathbf{L}\mathbf{J}\mathbf{A}^{>^<})$ une petite déviation.

Réécriture du système (3.54) sous la forme

$$\mathbf{f}(\mathbf{f}\mathbf{l}/\mathbf{A}) \left| \begin{array}{l} \mathbf{F}\mathbf{K}(\mathbf{f}\mathbf{l}/\mathbf{A}, \mathbf{f}\mathbf{l}\mathbf{A}) \\ \mathbf{F}\mathbf{A}(\mathbf{J}\mathbf{1}\mathbf{A}, \mathbf{1}\mathbf{1}) \end{array} \right| \quad (3.59)$$

où $\mathbf{F}\mathbf{K}$ et $\mathbf{F}\mathbf{A}$ sont deux fonctions déterminées par le système (3.54) qui disparaissent au point fixe, il peut être étendu à un ordre linéaire comme

$$\left(\mathbf{O}\mathbf{A}, \mathbf{4}\mathbf{2}\mathbf{K} \right) \left| \begin{array}{l} \mathbf{d}\mathbf{F}_{\mathbf{K}} \quad \mathbf{d}\mathbf{F}\mathbf{K} \\ \mathbf{d}\mathbf{F}_{\mathbf{K}} \quad \mathbf{d}\mathbf{F}\mathbf{K} \\ \mathbf{d}\mathbf{F}_{\mathbf{K}} \quad \mathbf{d}\mathbf{F}\mathbf{K} \end{array} \right| \quad (3.60)$$

La stabilité d'un point fixe dépend du signe des deux valeurs propres $(\mathbf{A}\mathbf{I}_{12})$ de la matrice $\mathbf{P}^{\mathbf{A}} \mathbf{n}_{\mathbf{K}} \mathbf{y} \mathbf{H}$ les deux valeurs propres sont positives (resp., négatives), le point fixe est instable (resp., stable). Si les deux valeurs propres ont des signes différents, c'est un point selle. Le vecteur propre $\mathbf{u}\mathbf{y}_{\mathbf{2}}$ donne alors les directions stable et instable.

$$\mathbf{A} = (\mathbf{v}_3^0, \mathbf{y})$$

with eigenvalues 37 — 2 and 37. EdS is thus an attractor for $7 \in]-00, 0[$, a saddle point for $7 \in]0, 2/3[$ and a repeller for $7 \in]2/3, +\infty[$. The associated eigendirections are

EdS : nous avons

$$\mathbf{w}(3 \mathbf{7} - 2) = (1, 0).$$

- dS : nous avons

$$\mathbf{P}_{\mathbf{d}\mathbf{S}} =$$

avec valeurs propres -2 et -37. Si $7 \in]0, 0[$ alors dS est un point selle et pour $7 \in]0, +\infty[$, c'est un attracteur. Les deux directions propres sont données par

$$= (0, 1), \quad \text{vous } (\mathbf{1}, -1).$$

- M: we have

Hvty

avec valeurs propres 2 et 2 — 37. Si 7 6] — oo,2/3[alors M est un répulsif et si 7 6)2/3, +OO[, c'est un point selle. Les deux vecteurs propres associés sont

$$^w(2-3 \, \gamma) = (1,0)> \qquad ^\wedge(2) = (1,-1)-$$

Ces résultats sont résumés dans le tableau 3-1 et dans les figures. 3.4 à 3.6.

Tableau 3.1 Stabilité des points fixes en fonction de la valeur de l'équation d'état, $y = w+1$, (A : attracteur, R : répulsif, et S : point triste).

γ	$] -\infty, 0[$	0	$]0, 2/3[$	$2/3$	$]2/3, +\infty[$
EdS	UN	N / A	S	N / A	R.
DS	S	UN	UN	UN	UN
M	S	R.	R.	R.	S

n / A

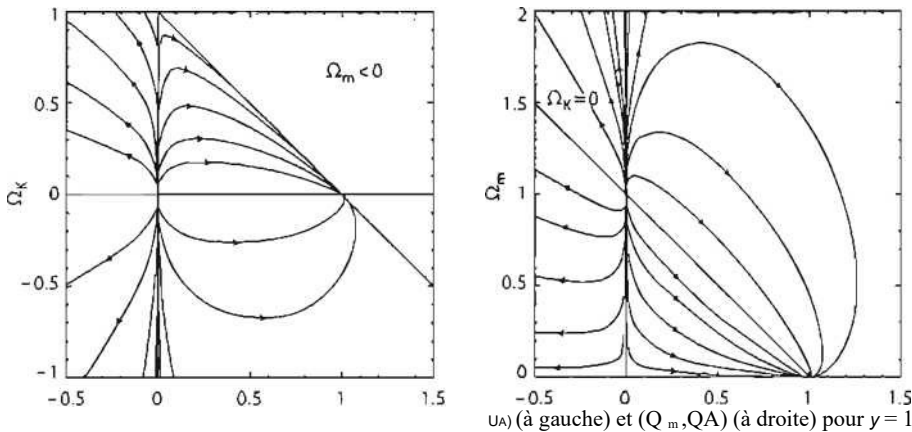


Fig. 3.4 Dynamical évolution in the plane (Ω_k, Ω_m) ($\Omega_m > 0$).
From Ref. [14].

3.2.3 Expansion et contraction

Lorsque la densité énergétique totale disparaît, le taux d'expansion de l'Univers peut changer de signe. Pour un Univers avec des sections spatiales non planes et avec une matière, un rayonnement et une cosmologie) constantes, il existe quatre possibilités (voir Fig. 3.3).

- L'expansion dure éternellement à partir du Big Bang. C'est le cas si $K = 0$ ou -1 pour un Univers sans constante cosmologique.
- L'agrandissement est suivi d'une phase de contraction qui conduit à un grand crunch. C'est le cas d'un Univers avec $K = +1$ sans constante cosmologique.
- L'expansion dure éternellement mais est précédée d'une phase de contraction ; il doit donc y avoir eu un *rebond*. Cette situation peut se produire lorsque l'Univers possède des sections spatiales sphériques ($K = +1$).
- L'Univers subit une série de phases de contraction et d'expansion ; c'est un Univers oscillant.

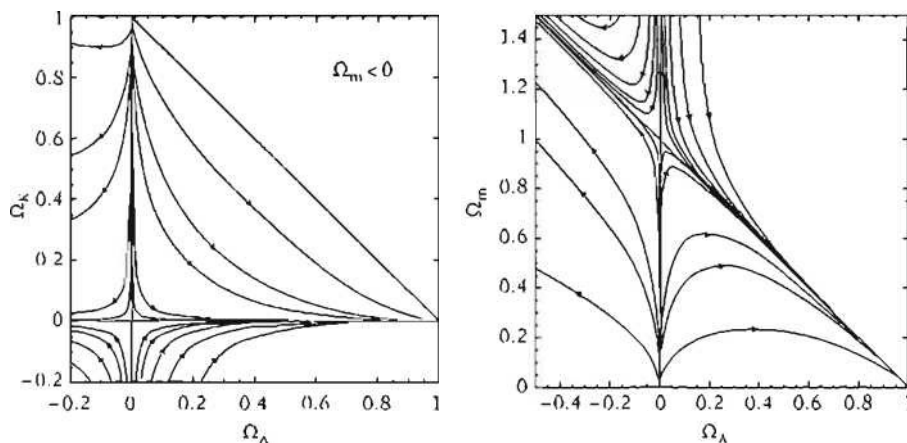


Fig. 3.5 Dynamical evolution in the plane (Q_J, Q_A) (left) and (f_1, f_2) (right) for $\gamma = 1/3$. From Fieff. (14).

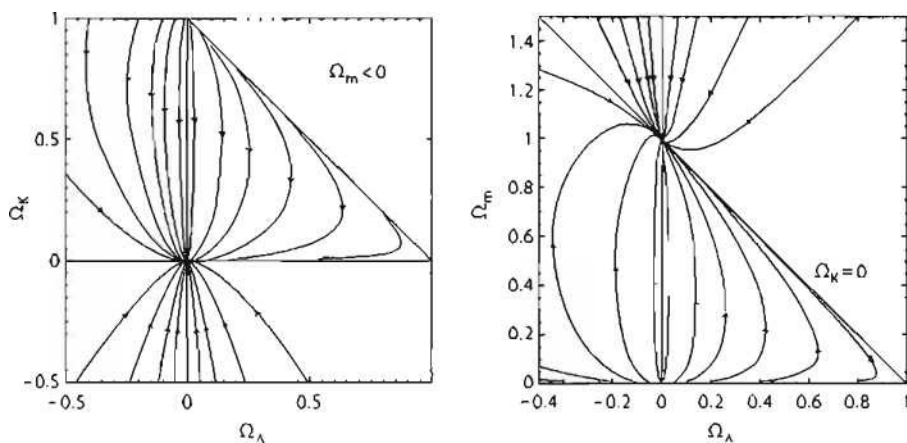


Fig. 3,6 Dynamical evolution in the plane $(Q/(-, fl_{\Lambda}))$ (left) and $(Q_m, \wedge_{\Lambda})$ (right) for $\gamma = -1$. From Ref. (14).

La séparation entre un Univers en expansion infinie et un Univers en grande crise s'obtient lorsque

$$\text{ou} \quad \text{rctan} (E_m J) - TT) , \quad \text{c\ddot{u}s} [a -$$

avec $E_{mo} =$ — 11. La séparation entre un Univers à expansion infinie et un Univers rebondissant est obtenu lorsque

$$\begin{aligned}
 &= 0 > \hat{A}O \text{ Si } 0, \\
 &01 \\
 &0 < < T, \frac{1}{2} \quad \hat{A}O = 1 - 9_m \hat{u} + 7777_s \frac{1}{n} \frac{3}{2(S2_m o)^{1/3}} \\
 &\quad + (1 - f2_m o - > : \\
 &\text{flmO} - \quad , \\
 &\text{ou}
 \end{aligned} \tag{3.62}$$

3.3 Temps et distances

Les échelles de distance et de temps caractéristiques de tout univers de Friedmann-Lemaître sont fixées par la valeur de la constante de Hubble. Nous définissons le temps et la distance de Hubble par

$$t_H = \frac{1}{H} = \frac{c}{\dot{u}} \tag{3.63}$$

La sphère de rayon égal au rayon de Hubble est appelée *sphère de Hubble*. L'ordre de grandeur de ces grandeurs est obtenu en exprimant la valeur actuelle du paramètre Hubble de la manière suivante

$$H_0 = 100 h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}, \tag{3.64}$$

avec h typiquement de l'ordre de 0,7. Nous reviendrons plus loin sur la mesure de l'ensemble des paramètres introduits dans ce chapitre. On obtient que

$$= 9,26 h^{-1} \times 10^{25} \text{ m} \sim 3000 h^{-1} \text{ Mpc}, \quad = 9,78 h^{-1} \times 10^9 \text{ ans.} \tag{3.65}$$

Tous les quantifiants qui seront introduits dans cette section (distance et temps) seront exprimés en termes de $\mathcal{E}(z)$ défini dans (3.39). Comme on peut le voir sur la figure 3.7, cette fonction présente certaines dégénérescences qui changent avec le redshift. En combinant des observations à différents redshifts, on peut lever ces dégénérescences et ainsi les utiliser conjointement pour mieux contraindre les paramètres cosmologiques.

3.3.1 Âge de l'Univers et temps de rétropection

De la définition du paramètre Hubble, il résulte que $\dot{a} = aH$. Ainsi, l'expression (3.39) pour la constante de Hubble donne

$$\dot{a} = H a = \frac{d\hat{u}}{dt} \mathcal{E}(z)$$

L'âge de l'Univers s'obtient donc en intégrant cette égalité entre $a = 0$ et $a = \hat{u}_Q$, ou de manière équivalente entre $z = 0$ et $z = \infty$,

$$\boxed{t_0 = t_{H_0} \int_0^1 \frac{dx}{x E(x)} = t_{H_0} \int_0^\infty \frac{dz}{(1+z) E(z)}} \tag{3.66}$$

Cette fonction est représentée pour divers ensembles de paramètres cosmologiques sur la Fig. 3-8.

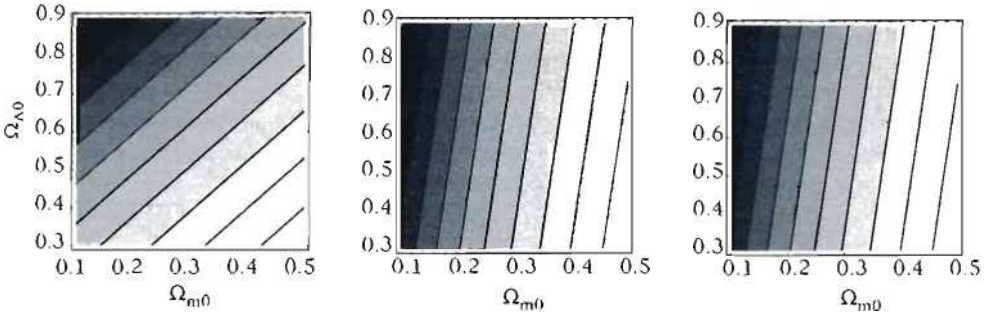


Fig. 3.7 Isocontours de la fonction $f(2)$ en fonction du paramètre cosmologique $\Omega_{\Lambda 0}$ pour un modèle ACDM. Les dégénérescences à $z = 1$ (à gauche), $z = 3$ (au milieu) et $z = 10$ (à droite) ne sont pas les mêmes. Le code de nuance de gris est arbitraire.

L'expression analogue en temps conforme est

$$0x2E(x)' \quad (3.67)$$

De la même manière, l'âge de l'Univers au moment où un photon avec redshift z a été émis est défini par

$$\int_{z_*}^{\infty} (1+z)E \quad (3.68)$$

Le temps de rétrospection est la différence entre l'âge de l'Univers et son âge au moment où le photon a été émis par la source. Les relations précédentes conduisent à

$$At(z) = t_0 - \langle t \rangle = tH_0 \int_0^{z_*} \frac{dz}{(1+z)S(z)}, \quad (3.69)$$

3.3.2 Distance radiale de déplacement

La distance radiale comobile y d'un objet de redshift z observé par un observateur situé à $y = 0$, est obtenue en intégrant le long d'une géodésie radiale nul 1. La forme de la métrique (3.4) donne $dy = dt/a$, de sorte que

$$\langle dy \rangle = \frac{ch}{z^2 H(z)} \frac{dz}{W}$$

Il s'ensuit que

$$a(x(-z^*)) = -DH_0 \int_0^{z_*} \frac{dz}{\ddot{E}(z)} \quad (3.70)$$

La dépendance à l'égard de a_0 reflète simplement le choix arbitraire du système d'unités du pneu. Cette fonction est représentée pour différents ensembles de paramètres cosmologiques sur la figure 3.9.

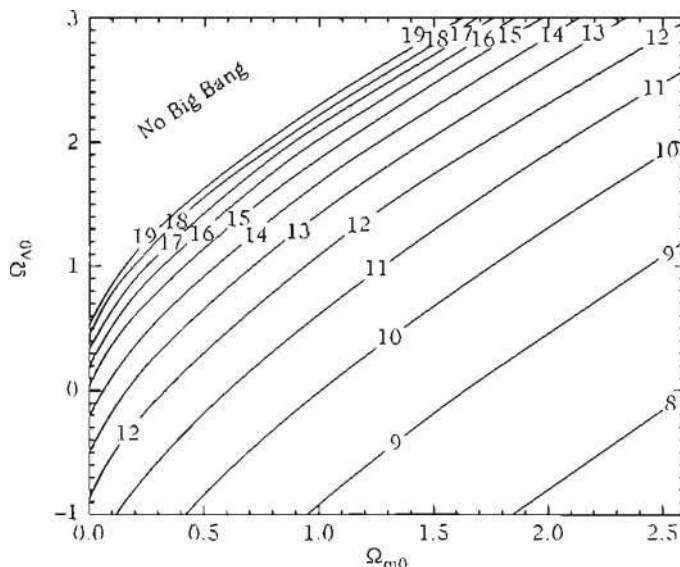


Fig. 3.8 Isocontours of the function ta as a function of the cosmological parameters. Each curve indicates the value of ta in units of 10^9 years. The grey zone represents the zone of parameters for which there is no Big Bang.

Pour un univers plat sans constante cosmologique, nous pourrions, par exemple,

$$a_0 \chi(z) = 2D_{H_0} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}} \right). \quad (3.71)$$

Pour un Univers avec une courbure non nulle, nous pouvons donner l'expression de la distance radiale en unités du rayon de courbure

$$\ddot{Y}(2) = UT_{nrd} \quad (3.72)$$

3.3.3 Distances angulaires

3.3.3.1 Ter divin angulaire covenant

Le diamètre angulaire comoving concerne la taille transversale comobile d'un objet et l'angle solide sous lequel il est observé. Il est défini par la relation

$$\llcorner =$$

entre l'angle solide et la surface apparente d'un objet. En rappelant qu'une sphère comovante centrée à $y = 0$ et de rayon comobile y a une surface comobile $4\pi y^2$, on en déduit que

$$= f_{\chi} [y^*] \blacksquare \quad (3.73)$$

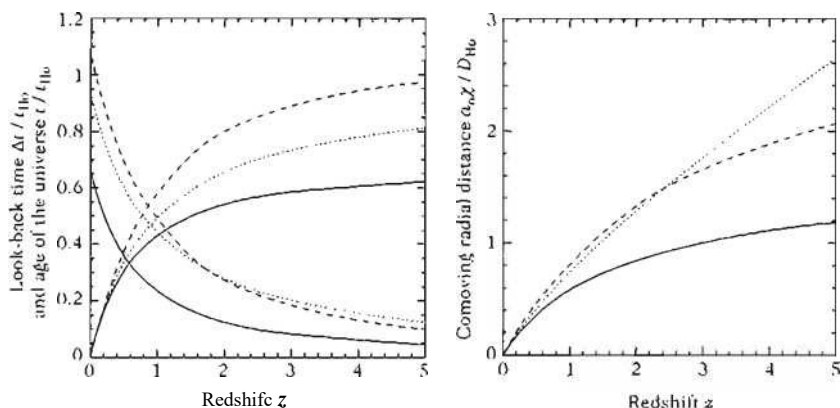


Fig. 3.9 (left): Age and look-back time in units of the Hubble time, $\Delta t(t(z)/z_{H_0})$ and $t(z)/z_{H_0}$, as a function of z for three cosmological models defined by $(O_m, \dot{U}_{Ao}) = (1, >0)$, $(0.05, 0)$ and $(0.2, 0.8)$, respectively, as plain, dotted and dashed lines. (right): Comoving radial distance in units of the Hubble length, $a_0 z / D_{H_0}$, as a function of z for the same cosmological models.

Notez que cette fonction n'augmente pas nécessairement avec z . En effet, si $K = 4-1$, alors deux objets de même taille comobile, situés en y et $\pi - y$ auront le même diamètre angulaire comobile.

3.3.3.2 Distance angulaire

La distance angulaire est la notion qui généralise la notion de parallaxe. Elle se définit, pour un faisceau géodésie convergeant au point où se trouve l'observateur, comme le rapport entre la taille physique transversale d'un objet et l'angle solide sous lequel il est observé. La zone physique de la source est liée à celle en mouvement par $dS^{\text{phys}} = a^2 dS^{\text{com}}$. Avec cette définition

$$D_A^2 = \frac{dS_{\text{source}}^{\text{phys}}}{d\Omega_{\text{obs}}^2} = a^2 \frac{dS_{\text{source}}^{\text{com}}}{d\Omega_{\text{obs}}^2}.$$

Cette quantité sera également notée r_o . En utilisant la définition du diamètre angulaire comobile, introduite dans la section précédente, on obtient

$$r_o(z) = D_A(z) = a_0 \frac{f_K[\chi(z)]}{1+z} \frac{\hat{U} \cdot \hat{\theta} \wedge \hat{\text{Ang}}(\wedge)}{1+z} \quad (3-74)$$

3.3.3.3 Théorème de réciprocité

De la même manière, on peut définir la distance angulaire à la source. Il est défini à l'aide d'un faisceau géodésie divergent de la source comme le rapport entre la taille physique transversale de l'observateur et l'angle solide sous lequel il serait observé depuis la source,

$$dS_{\text{obs}}^{\text{phys}} = r_s^2 d\Omega^{\text{source}}$$

On peut montrer que si les trajectoires des photons sont des géodésiques nulles et si l'équation de déviation géodésique est valide, alors il existe une relation entre r_h et T_0

$$r^* = r_o(l + z). \quad (3.75)$$

appelé *théorème de réciprocité* (voir Réf. [15] pour une démonstration). Cette relation ne peut pas être directement vérifiée puisque r_s ne peut pas être observé directement.

3.3.4 Distance de luminosité

3-3-4.1 Définition

La distance de luminosité relie la luminosité d'une source, située à une distance radiale comobile y de l'observateur, au flux observé comme

$$F = \frac{L}{4\pi D_L^2} \quad (3.76)$$

Pour relier la luminosité de la source et la luminosité observée, notez que la luminosité de la source est donnée par l'énergie émise par unité de temps d'émission. $L_{\text{source}} = AE_{\text{em}}/At_{\text{em}}$. Du fait de l'expansion de l'Univers, $AE_{\text{obs}} = AE_{\text{em}} a/a_0$ et $Az_0 b_s = Abm \ll a/a_0$ (car $A77_{\text{obs}} = A77_{\text{e}, n}$ pour deux géodésiques nulles) de sorte que $L_{\text{obs}} = T_{\text{source}}(1+z)^{-2}$. Le flux reçu par l'observateur à $\lambda = 0$ est donné par

$$F_{\text{obs}} = L_{\text{source}} / (4\pi D_L^2)$$

en identifiant ceci avec la définition (3.76), il s'ensuit que

$$D_L(z) = L_{\text{source}} / (4\pi F_{\text{obs}}) \quad (3.77)$$

La luminosité de la source est en effet inconnue. Cependant, en comparant certaines sources à une source référencé pour laquelle le redshift z^* et la distance sont connus, on obtient que

$$D_L(z) = L_{\text{source}} / (4\pi F_{\text{obs}})$$

En extrayant une famille d'objets astrophysiques, appelés *bonbons standards*, ayant la même luminosité, le rapport de leurs flux peut être utilisé pour mesurer la distance de luminosité.

Pour finir, notons que la dérivation (3.77) permet d'extraire le taux de Hubble en fonction du redshift comme

$$\left(\frac{D_L}{1+z} \right)^2 \left[\frac{d}{dz} \left(\frac{D_L}{1+z} \right) \right]^{-1/2}$$

$$1 +$$

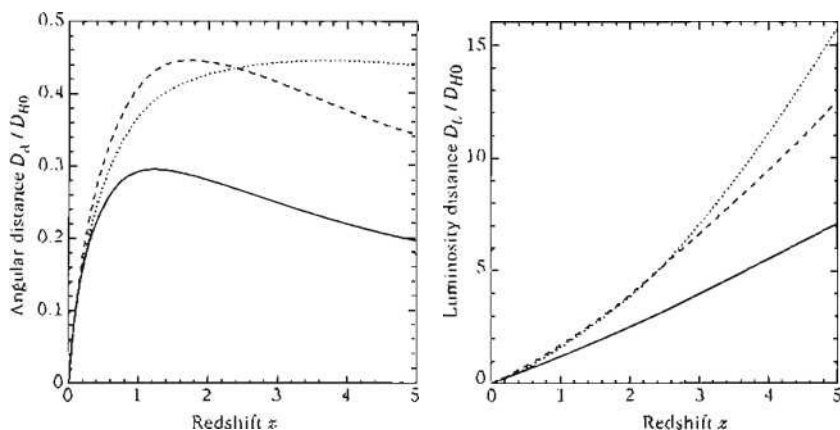


Fig. 3.10 (left): The angular distance $D_A(z)/D_{H_0}$ as a function of the redshift z for three cosmological models, defined by $(\Omega_m, \Omega_\Lambda) = (1, 0)$, $(0.05, 0)$ and $(0.2, 0.8)$, respectively, as plain, dotted and dashed lines. (right): The luminosity distance $D_L(z)/D_{H_0}$ as a function of the redshift z for the three same cosmological models.

3.3.4.2 Relation de dualité des distances

Si le nombre de photons est conservé, ce qui est généralement le cas si les équations de Maxwell sont valides, et si l'absorption du milieu dans lequel ils se propagent est faible, alors (pour une preuve, voir Réf. [15])

$$DL = r_s(1+z),$$

de sorte que (3.75) implique une relation de dualité entre les distances angulaire et de

$$\text{luminosité } n_L = (1+z)^2 n_A. \quad (3.78)$$

Contrairement à (3.75), cette relation peut être testée expérimentalement [16].

3.3.4.3 Module de distance

La distance de luminosité est généralement exprimée en termes de module de *distance* $m - M$, défini de telle sorte qu'il disparaît si la source est située conventionnellement 10^6 à 10 pc,

$$m - M = -2.5 \log [0(z)/d(\text{lû pc})]. \quad (3.79)$$

En utilisant (3.76) et en remarquant qu'à 10 pc, la distance de luminosité est également de 10 pc, on obtient $m - M = 5 \log [7^2 L(10^6 \text{ pc})/10 \text{ pc}]$. En utilisant l'expression $10 \text{ pc} = PH_0/3 \times 10^8 h$, on peut en déduire que

$$m - M = 25 + 5 \log \left[3000 \frac{D_L}{D_{H_0}} \right] - 5 \log h. \quad (3.80)$$

m est la magnitude apparente et la magnitude absolue M est définie par comparaison à la luminosité solaire

$$M = -2,5 \log(-^{\wedge}) + 4,76 \tag{3,81}$$

où $L_Q \sim 3,8 \times 10^{26}$ W est la luminosité du Soleil et $M_G = 4,76$ sa magnitude. Avec une telle définition, plus un objet est brillant, plus sa magnitude est faible.

3.3.4.4 *Magnitudes*

Les luminosités considérées précédemment étaient les luminosités intégrées sur l'ensemble du spectre électromagnétique, définissant la *grandeur bolométrique*. Il est difficile de mesurer ces grandeurs bolométriques et, en général, certains filtres sont utilisés, sélectionnant une bande de fréquence spécifique. La grandeur M_x dans la bande X est alors définie par

$$M_x = -2,5 \log \mid -rM + \tag{3-82}$$

Un exemple de différentes bandes de fréquences utilisées en astronomie est donné dans le tableau ci-dessous.

centrale	de bande	(um) MQ		
longueur d'onde (nm)				
	<i>U</i> (ultraviolet)	365	66	5.61
	<i>B</i> (bleu)	445	94	5.48
	<i>V</i> (visible)	551	88	4,64
	<i>R.</i> (rouge)	658	138	4.42
	<i>J</i> (mfra-rouge)	806	149	4.08
	<i>J.</i>	1200	213	3,64
	<i>K</i>	2190	390	3.28
	Bolométrique		oh	4,76

Le flux détecté dans la bande de fréquence a été émis dans la bande de fréquence $(1 + z)$ Ai/y. Le flux reçu par unité de fréquence est donc

$$\phi_X(\nu) = (1 + z) \frac{L_\nu[\nu(1 + z)]}{4\pi D_L^2}, \tag{3.83}$$

where L_ν is the source luminosity per frequency band. It follows that

$$\phi_X(\nu) = \frac{(1 + z)}{4\pi D_L^2} \int_{\Delta\nu_X} L_\nu[\nu(1 + z)] d\nu. \tag{3.84}$$

La correction induite par la déformation du spectre n'apparaît pas lorsque la source est à lû pc de sorte que les modules de distance dans la bande X définie par $m_x - M_x = -2.51 \log[d > A7^{\wedge}x(I\hat{U}pc)]$, sont donnés par

$$m_X - M_X = 5 \log \left(\frac{D_L}{10 \text{ pc}} \right) + K. \tag{3-85}$$

La correction JC représente la distorsion du spectre due à l'expansion cosmologique

$$j_{e<} = -2,5 \log(1+z) - 2,5 \log \quad (3.86)$$

Notons enfin que d'autres effets d'origine astrophysique, comme l'absorption par le milieu interstellaire ou intergalactique, peuvent affecter la magnitude apparente. Nous les discuterons dans le prochain chapitre.

3.3.5 Nombre et volume

Les propriétés géométriques de l'espace-temps jouent également un rôle dans la détermination de la distribution d'une famille d'objets (par exemple les galaxies) dans une bande de redshift donnée. Considérons une telle famille avec une densité numérique propre $n(z)$ et un rayon r^* propre.

Premièrement, nous pouvons déterminer la probabilité pour une ligne de visée de croiser une telle galaxie avec un redshift compris entre z et $z + dz$. Cette probabilité est proportionnelle à la surface de la galaxie, à la densité et à la distance de la lumière propagée dans cet intervalle de redshift,

$$(3.87)$$

La probabilité de croiser un objet avec un redshift inférieur à z , appelée *profondeur optique*, est alors donnée par

$$\frac{dz}{\quad} \quad (3.88)$$

En particulier, pour les galaxies diluées par l'expansion cosmique, $n(z) = n_g(1+z)^{-3}$, dans un Univers avec $Q = 1$ et $\Omega = 0$ on trouve

$$r(z) = \frac{7}{10} r^* L_{H_0} n_0 (1+z)^{-3/2} \quad (3.89)$$

Si $n_0 \sim 0,02/r^3 \text{ Mpc}^{-3}$ et $r^* \sim 10 h^{-1} \text{ kpc}$, $r \sim 4\%$ à $z = 1$ et 100% à $z \sim 20$.

Le volume propre contenu dans un angle solide $d\Omega$ et entre les redshifts z et $z + dz$ est le produit de l'aire $D^2 d\Omega$ et de la longueur $\int_H dz/(1+z)^2 F(z)$, donc que

$$\frac{dV}{dQ^2 dz} = \frac{J K_X(z)}{(1+z)^3 E(z)} \quad (3.90)$$

Le nombre de galaxies dans un angle solide $d\Omega$ et dans une bande de redshift dz est alors

$$dQ^2 dz = (1+z)^3 f(z) \quad (3.91)$$

Le décompte des galaxies est parmi les plus anciens tests cosmologiques (voir Réf. [1]).

3.4 Comportement aux petits redshifts

3.4.1 Paramètre de décélération

Nous pouvons étendre le facteur d'échelle autour de sa valeur aujourd'hui comme

$$a(t) = a_0 [1 + \frac{1}{2} q_0 \frac{\Delta t^2}{a_0^2}] \sim a_0 \left(1 + \frac{1}{2} q_0 \frac{\Delta t^2}{a_0^2} \right) \quad (3.92)$$

avec $0 < q_0 < \infty$. Le facteur q_0 est le *paramètre de décélération* et est défini par

$$q_0 = -\frac{a \ddot{a}}{\dot{a}^2} \quad (3.93)$$

de sorte que l'Univers accélère si $q_0 < 0$ et décélère sinon. En utilisant les équations de Friedmann pour exprimer $\ddot{a}/\dot{a}^2$, on trouve facilement que

$$q_0 = \frac{1}{2} \frac{\Omega_m + 3\Omega_r}{\Omega_m + \Omega_r + 2\Omega_\Lambda}$$

pour un modèle Λ CDM, puisque la contribution des rayonnements est aujourd'hui négligeable. Pour une composition de matière arbitraire, le paramètre de décélération est donné par

$$q_0 = \frac{1}{2} \frac{\Omega_m + 3\Omega_r}{\Omega_m + \Omega_r + 2\Omega_\Lambda} \quad (3.94)$$

Ainsi, pour avoir $q_0 < 0$, il devrait y avoir au moins un fluide cosmique (dominant aujourd'hui) d'équation d'état $w_x < -1/3$. Nous soulignons que l'expansion (3.92) repose uniquement sur l'hypothèse que l'Univers est décrit par un espace-temps de Friedmann-Lemaître. En particulier, il ne fait aucune hypothèse sur le contenu en matière de l'Univers, contrairement à (3.94).

3.4.2 Expression du temps et des distances

3.4.2.1 Petites extensions de redshift

Aux petits redshifts, nous pouvons étendre la fonction $E(z)$ comme

$$E(z) = 1 + \frac{1}{2} \left[\sum_x 3(1 + w_x) \Omega_{x0} + 2\Omega_{K0} \right] z + \mathcal{O}(z^2) = 1 + (q_0 + 1)z + \mathcal{O}(z^2),$$

neglecting the contribution of radiation. Thus, we conclude that the look-back time is

$$\Delta t(z) = t_{H_0} \left[1 - \frac{1}{2}(q_0 + 2)z \right] z + \mathcal{O}(z^3). \quad (3.95)$$

The radial distance takes the form

⁷The choice of q_0 is historical. At the time q_0 was introduced it was thought that the expansion of the Universe was decelerating so that $q_0 > 0$ was expected. Chapter 4 details why we now think that $q_0 < 0$.

$$_{AOX}(z) = DH\ddot{U} \left| \frac{1 - (9\hat{U} + 1)z}{2} \right| z + O(z^3), \quad (3,96)$$

la distance angulaire à venir.

$$= - \left| \frac{1 - 3(90 + 1)z}{2} \right| z + (9(z^3)), \quad (3,97)$$

la distance angulaire,

$$_{PA(*)} = \left| \frac{1 - 2}{2} \right| z + O(z^3), \quad (3,98)$$

et la distance de luminosité,

$$_{T>L(z) = A\hat{r}\hat{0}} \left| \frac{1 - \wedge(Q\hat{u} - 1)z}{2} \right| z + O(z^3). \quad (3,99)$$

Localement ($z \ll 1$) toutes les distances se réduisent à $\hat{A}e^{\hat{U}z}$ et les déviations ne dépendent que de la valeur du paramètre de décélération. Un diagramme distance-redshift sera donc sensible à H_0 dans sa région $z \ll 1$ (pente du diagramme), à q_0 principalement dans sa région intermédiaire ($z \sim 1$) et à l'ensemble des paramètres cosmologiques pour un z *plus grand*. Ceci illustre l'évolution de la dégénérescence de la fonction $B(z)$ représentée sur la Fig. 3.7.

3.4.2.2 *Dérive temporelle du redshift*

Supposons que nous observions la même galaxie à t_0 et $t_0 + \delta t_0$. Il y aura un changement dans son redshift donné par

$$\frac{\delta z}{z} = (1 + \frac{1}{1 + H_0 r}) \delta t_0$$

Or, les géodésiques nulles sont des droites en coordonnées conformes telles que $\delta q = \delta t / (1 - 2q) = \delta t / (1 - 2a^2 / r^2)$ au premier ordre en δt et donc

$$= W_0 [(1 + 0 - \hat{E}(z)], \quad (3.100)$$

où E est défini par (3.39). Cela donne l'évolution temporelle du redshift de tout objet au redshift z en fonction des paramètres cosmologiques.

À faible redshift, il se réduit à $\delta z / \delta t = - \frac{Q_0 H_0 z}{1 + H_0 r} + \hat{U}(z^2)$. en effet, cette dérive est extrêmement faible et de l'ordre de $h^2 / \text{siècle}$. Cependant, ic donne une information directe sur $\hat{E}(z)$ et donc sur les paramètres cosmologiques (voir Réfs. [17,18]). Notons que les redshifts sont affranchis des propriétés évolutives des sources, et qu'une détection directe de leur dérive représenterait une approche nouvelle (et pourtant jamais exploitée) et directe en cosmologie observationnelle pour contraindre l'histoire d'évolution de l'Univers, alternative à celles en fonction de la luminosité ou des distances de diamètre. Cela peut être important dans l'étude du problème de l'énergie noire (voir chapitre 12).

3.5 Horizons

Un horizon est une frontière qui sépare les événements observables des événements non observables. Deux conceptions d'horizon très différentes doivent être distinguées en cosmologie (voir Réf. [10, 191]). Les différentes grandeurs définies dans cette section sont représentées sur les Figs. 3.11 et 3.12.

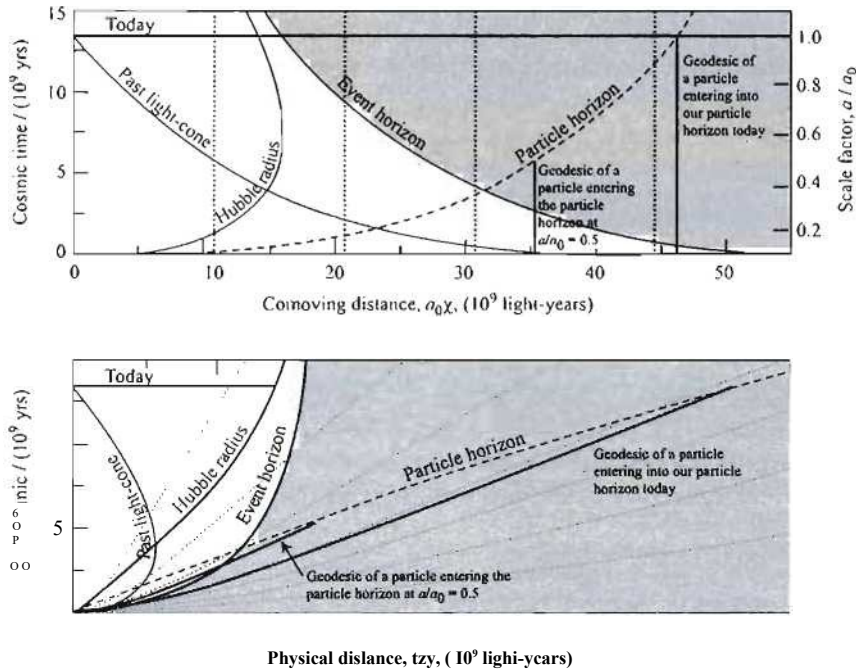


Fig. 3.11 The particle horizon at a given time (3.102) is defined at different moments as the géodésie of the most distant observable comoving particles at this moment (plain vertical fines). This surface can be visualized as the intersection of the particle horizon (3.103) with a constant-time hypersurface. The équation of this surface is given by $y = 0(t)$ in comoving coordinates (top) and by $y = u(t)$ in physical coordinates. This diagram represents a Universe with the following cosmological parameters $(R_{mo} \wedge A_0) = (0.3, 0.7)$ and $h = 0.7$. Rom Ref. [20],

3.5.1 Horizon des événements

Pour un observateur O , l'horizon des événements est l'hypersurface qui divise tous les événements en deux familles : ceux qui ont été, sont ou seront observables par O et ceux qui sont à jamais en dehors du périmètre d'observation de O .

Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un horizon des événements est que l'horizon intégral

$$J. \int^{\infty} \frac{dt}{a(t)}$$

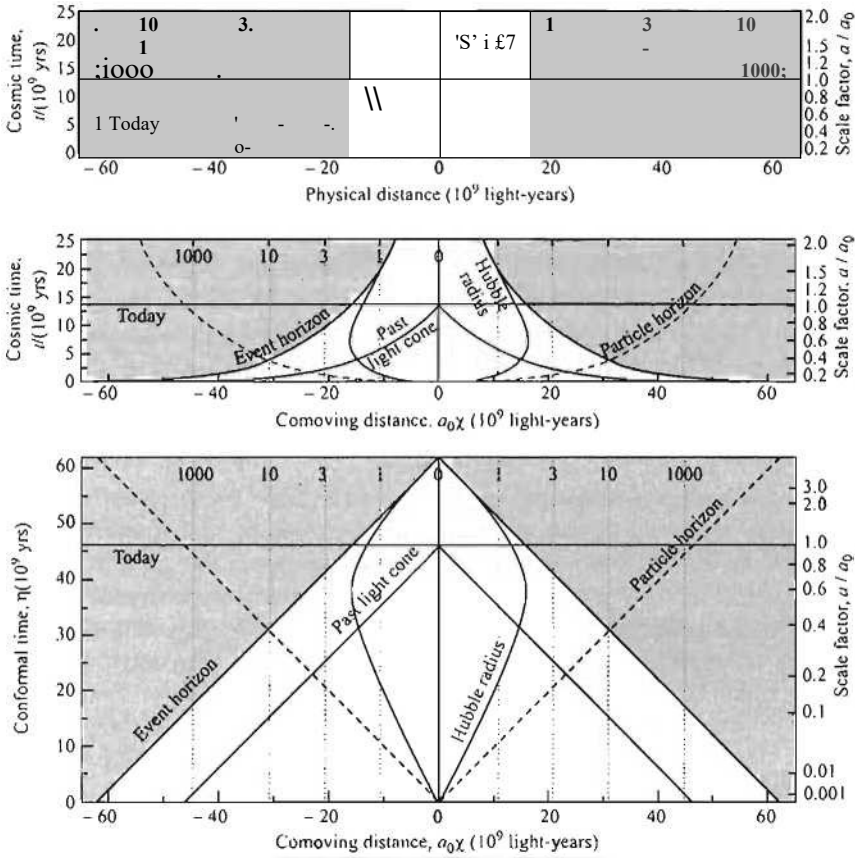


Fig. 3.12 Universe diagrams for a Friedmann-Lemaître space with parameters $\Omega_m = 0.3$, $\Omega_\Lambda = 0.7$ and $h = 0.7$. The first two diagrams represent, respectively, the physical distance, $a(Z)y$, and the comoving distance, in terms of the cosmic time, t (left scale) or in terms of the scale factor, normalized to 1 today (right scale). The last diagram represents the comoving distance in terms of the conformal time, η . The dotted lines represent the worldlines of comoving observers and our worldline is the central vertical line. Above each of these lines is indicated the redshift at which a galaxy on this worldline becomes visible for the central observer. We represent the past light cone for the present central observer and the event horizon corresponding to a similar light cone originated from time-like infinity (plain bold line). We also show the Hubble sphere, defined by (3.63) (plain light line) and the particle horizon, defined by (3.103) (dashed line). From Ref. [20].

est convergente. Si cette intégrale converge, alors à tout moment, il existe une ligne d'univers

$$\text{UNE}, \ll(\dot{a})$$

tel que le photon émis à $\dot{a}$ en %o vers l'origine, atteigne $x = 0$ à $t = +\infty$.

Tout photon émis à t_0 dans $X > y_0$ n'atteint jamais l'origine et tout photon émis à t_Q dans $y < x_0$ atteint l'origine en un temps fini.

L'espace de De Sitter, pour lequel $a = \exp(Ht)$, a un tel horizon des événements, puisque

$$\chi_0 = \int_{t_0}^{\infty} \frac{dt}{\exp Ht} = \frac{e^{-Ht_0}}{H} < \infty$$

As a second example, let us consider Universes with scale-factor evolution of the form $a(t) \sim t^n$. The integral

$\int$

converges if and only if $n > 1$. Recalling that for a flat Universe ($K = 0$) n is related to the parameter w of the equation of state by $3n = 2/(1 + w)$, we find that an event horizon exists if

$$w < -\frac{1}{3} \iff \rho + 3P < 0, \quad (3.101)$$

i.e. if the strong energy condition is violated.

3.5.2 Particle horizon

For an observer O at t_0 , the particle horizon is the surface of the hypersurface $t = t_0$ dividing all particles of the Universe into two non-empty families: the ones that have already been observed by O at the time t_0 and the ones that have not. For each time t_0 , it is thus the intersection between the geodesics of the most distant comoving particles that can be observed, with the hypersurface $t = t_0$. Hence, it is a two-dimensional space-like surface, which reduces to a sphere of centre O for an isotropic and homogeneous Universe.

A necessary and sufficient condition for the existence of a particle horizon is that the following integral be convergent:

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{dt}{a(t)}$$

depending on whether or not $a(t)$ continues for negative values of t .

Indeed, at any time t_0 , any particle such that $y > a(t_0)$ has not yet been observed by an observer O at the origin. The two-dimensional surface

$$\phi(t_0) = \int_{t_0}^{\infty} \frac{dt}{a(t)} \quad (3.102)$$

defines the particle horizon at a given time t_0 and thus divides all particles into two sub-families: the ones that have been observed at t_0 or before to $[y \leq a(t_0)]$ and the ones that have not yet been observed $[y > a(t_0)]$. This surface is called the particle horizon of O at t_0 . It can be seen as the section at $t = t_0$ of the space-time surface j . We thus define the particle horizon as the hypersurface

$$(3.103)$$

The hypersurface (3.103) is the future light cone emitted from the position of the observer at $t = 0$. Since $a(t)$ is a positive function, when $a(t)$ exists, it is an increasing

fonction de t de sorte qu'à mesure que le temps s'écoule, de plus en plus de particules sont visibles depuis O . En temps conforme, l'horizon des particules est un cône et l'horizon du paticule à to est une sphère.

Si $\langle \gamma(t) \rangle$ est fini lorsque t tend vers l'infini, alors l'Univers a un horizon d'événements puisque seules les particules avec $y < \langle \gamma \rangle(\infty)$ seront accessibles à l'observateur O . Ceci est représenté sur la Fig. 3.11. où les lignes verticales représentent les horizons de particules aux temps valions, tandis que la ligne pointillée représente la surface définie par \

A titre d'exemple, considérons des univers avec une évolution de facteur d'échelle de la forme $a(t) = t^{rL}$. L'intégrale

$$\int_0^t j e^{-n a t} dt$$

converge si et seulement si $n < 1$. Puisque pour un Univers fiduciaire ($\langle \gamma \rangle = 0$), $3n = 2/(1 - 4w)$, il s'ensuit qu'il existe un horizon de particules si

$$w > -\frac{1}{3} \Leftrightarrow p + 3P > 0. \quad (3.104)$$

Des conditions (3.101) et (3.104), nous concluons donc qu'un Univers contenant un seul fluide à équation d'état constante peut avoir soit un horizon d'événements, soit un horizon de particules, mais pas les deux à la fois. Les deux types d'horizons s'excluent donc mutuellement dans ce cas particulier.

L'équation (3.102) donne le rayon comobile de l'horizon des particules. Son diamètre physique à un instant tz pour un événement survenu à $U < \tilde{I}2$ est donc

$$D_{p.h.}(t_1, t_2) = 2a(t_2) \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{a(t)}. \quad (3.105)$$

It can be checked that if t_1 and t_2 are two events from an era dominated by a fluid with constant equation of state w , then

$$D_{p.h.}(t_1, t_2) = \frac{6(1+w)}{1+3w} t_2 \left[1 - \left(\frac{t_1}{t_2} \right)^{(1+3w)/(3+3w)} \right]. \quad (3.106)$$

Si $t \ll h$ alors le diamètre de l'horizon est proportionnel au rayon de Hubble (3,63) au temps t ?

$$D_{p.h.}(Ud2) = \frac{PH(\wedge)}{1 - 4 - 3w} \quad (3.107)$$

L'horizon des particules est à l'origine du 'problème d'horizon' du mode Big-Bang standard ! (voir la section 4.5.2 du chapitre 4).

3.5.3 Propriétés globales

Pour étudier les structures globales, et en particulier à l'infini, des espaces-temps cosmologiques, nous utiliserons la représentation introduite par Penrose (voir Réf. [10] pour une étude générale). Elle est basée sur l'idée de construire, pour toute variété $A4$ de métrique une autre variété $A4$ de frontière J et de métrique $g^\wedge = Wg^\wedge$ telle que $A4$ soit conforme à l'intérieur de $A4$, et de telle sorte que « l'infini » de $A4$ soit représentée par l' hypersurface finie ^1J . La dernière propriété implique que VU disparaît sur J . Toutes les propriétés asymptotiques de $A4$ peuvent être étudiées en étudiant 37 (voir Réf. [21]).

3.5.3.1 L'espace-temps de Minkowski comme exemple

La métrique de Minkowski (110) en coordonnées sphériques peut être écrite en termes de coordonnées nulles avancées et retardées, respectivement, définies par $v = t+r$ et $u = t-r$ comme

$ds^2 = -du dv + (v-u)^2 d\Omega^2$, où $v > u$ et v et u vont de $-\infty$ à $+\infty$. Aucun terme de la forme du^2 ou dv^2 n'apparaît car les surfaces de constante v (ou constante u) sont des surfaces nulles. On peut faire varier ces coordonnées dans un intervalle fini en introduisant

$$\tan V = v, \tan U = u,$$

de sorte que $-\pi/2 < U < V < \pi/2$. Ensuite, en introduisant les coordonnées T et R par

$$T = U + V, R = V - U,$$

avec

$$-\pi < T - R < \pi, \quad -\pi < T + R < \pi, \quad R > 0, \quad (3.108)$$

la métrique de Minkowski s'avère conforme à la métrique g donnée par

$$ds^2 = -dT^2 + dR^2 + \sin^2 R d\Omega^2,$$

avec facteur conforme $W = (2 \sin[(R + \pi)/2] \sin[(T - \pi)/2])^{-2}$. L'espace-temps de Minkowski est donc conforme à la région (3.108) du Espace-temps statique d'Einstein (un cylindre $S^1 \times R$ qui représente un espace-temps statique avec des sections spatiales sphériques). La limite de cette région représente donc la structure conforme de l'infini de l'espace-temps de Minkowski.

Cette frontière peut être décomposée en

- deux hypersurfaces nulles tridimensionnelles, J^+ et J^- définies par

$$\mathcal{H}^\pm = \{v = r\} \quad (3.109)$$

ou de manière équivalente par $T = \pm(\pi - R)$ avec $R \in [0, \pi]$. L'image d'une géodésie nulle prend son origine sur J^- et se termine à J^+ , qui représentent la nullité future et passée.

- deux points et i° défini par

$$i^\pm: U=V=\pm\pi \quad (3.110)$$

ou de manière équivalente par $R = 0$ et $T = \pm\pi$. L'image d'une géodésie temporelle commence en i^- et se termine en i^+ . Ils représentent l'infini du temps futur et passé, c'est-à-dire respectivement le point de départ et le point final de toutes les géodésiques temporelles.

- un point i° défini par

$$i^\circ: V = -V = -\pi, \quad (3.111)$$

ou de manière équivalente par $R = \pi$ et $T = 0$. C'est le point de départ et d'arrivée de toutes les géodésiques de type spatial, de sorte qu'il représente l'infini spatial.

Le fait que i^0 soient des points uniques découle du fait que $\sin R = 0$. Ce sont des singularités de coordonnées du même type que celle rencontrée à l'origine des coordonnées polaires. La variété vVf est régulière en ces points. J^- est un futur cône nul de sommet i^- et il se recentre sur un point r^0 spatialement diamétralement opposé à i^- . Le futur cône nul de i^0 est J^+ , qui se recentre en i^+ .

Notons que la frontière est déterminée par l'espace-temps et est unique mais que l'espace-temps d'extension conforme (ici l'espace-temps statique d'Einstein) n'est pas fixé par la métrique d'origine et n'est pas unique puisqu'une autre transformation conforme aurait pu être choisie.

Pour tout espace-temps à symétrie sphérique, la région (3.108) peut être représentée ! dans le plan (T, R) en ignorant les coordonnées angulaires pour que chaque point représente une sphère S^2 . Dans cette représentation, l'espace-temps de Minkowski est un losange carré (voir Fig. 3.13). Les géodésiques nulles sont représentées par des lignes droites à ± 45 degrés allant de J^- à J^+ .

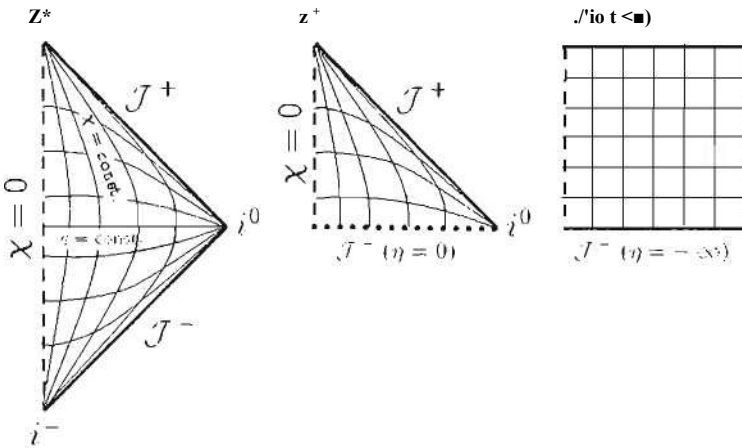


Fig. 3.13 Conformal diagrams of the Minkowski space-time (left) and Friedmann-Lemaître space-times with Euclidean spatial sections with $A = 0$ and $P > 0$ (middle) and de Sitter space (right).

3.5.3.2 Espace-temps de Friedmann-Lemaître avec $K = 0$

Lorsqu'ils sont écrits en termes de temps conforme, les espaces-temps de Friedmann-Lemaître avec des sections spatiales euclidiennes sont conformes à Minkowski. Il s'ensuit qu'ils correspondent à une partie de la région (3.108) représentant l'espace-temps de Minkowski dans l'Univers statique d'Einstein. La région réelle est déterminée par la plage de variation de η . Pour $A = 0$ et $P > 0$, $0 < \eta < \infty$ de sorte qu'il soit conforme à la moitié supérieure du diamant de Minkowski définie par $T > 0$ (voir Fig. 3.13) avec une frontière de singularité, $T = 0$.

3.5.3.3 *espace-temps de de Sitter*

La métrique de l'espace-temps de de Sitter est donnée par (3.44) avec i variant dans K . Elle a des sections spatiales sphériques et est conforme à l'ensemble de l'espace-temps statique d'Einstein. Pour étudier son infini on définit les coordonnées

$$R = x, T = 2 \arctan (e^{Hx}), \quad (3.112)$$

avec $0 < R < \infty$ et $0 < T < \infty$. Il est alors conforme à une région carrée de l'espace statique d'Einstein de facteur de conformité $W = H^{-2} \cosh^2(Hx)$ (voir Fig. 3.13).

Nous voyons que ce diagramme conforme a une infinité de type spatial à la fois pour les géodésiques de type temps et nulles, dans le futur et dans le passé.

3.5.3.4 *Espace-temps de Friedmann-Lemaître avec $K = \pm 1$*

Les espaces-temps de Friedmann-Lemaître à sections spatiales sphériques ($K = +1$) sont conformes à l'espace-temps statique d'Einstein (avec $p \rightarrow T$ et $\chi \rightarrow R$). Ils sont ainsi cartographiés dans la partie de cet espace-temps déterminée par les valeurs autorisées pour p .

Il existe trois possibilités générales. Lorsque $A = 0$, p varie de 0 à ∞ si $P = 0$ et de 0 à $a < \infty$ lorsque $P > 0$. L'espace-temps de Friedmann-Lemaître est donc conforme à une région carrée de l'espace-temps statique d'Einstein tel que les deux $J^\pm$ et ressemblent à des espaces et représentent deux singularités. Lorsque $A \neq 0$, p peut varier de 0 à ∞ pour les Univers hésitants (comme les exemples N et M de la Fig. 3.3) ou de $-a$ à ∞ pour les Univers rebondissants (comme les exemples G et H de la Fig. 3.3). L'espace-temps de Friedmann-Lemaître est donc conforme soit à la moitié, soit à la totalité de l'espace-temps statique d'Einstein. Comme dans le cas de l'espace de Sitter, la région conforme sera un carré de l'espace statique d'Einstein et $J^\pm$ et ressemblera également à un espace mais ne représentera pas nécessairement une singularité.

Dans le cas des espaces-temps de Friedmann-Lemaître à sections spatiales hyperboliques ($K = -1$), la métrique peut être montrée conforme à une partie de la région (3.108) au moyen de la transformation de coordonnées

$$\begin{aligned} T &= \arctan \tanh \left(\frac{\eta + \chi}{2} \right) - \arctan \tanh \left(\frac{\eta - \chi}{2} \right) \\ R &= \arctan \tanh \left(\frac{\eta + \chi}{2} \right) + \arctan \tanh \left(\frac{\eta - \chi}{2} \right) \end{aligned}$$

Encore une fois, la forme exacte de cette région dépend du contenu en matière (équation d'état et A).

On voit dans ces exemples que certaines parties de la frontière correspondent à la singularité du Big-Bang $\hat{u} = 0$. Lorsque $P > 0$ et $A = 0$, la singularité initiale est de type espace, ce qui correspond à l'existence d'un horizon de particules. Lorsque $K = +1$ et $A = 0$, la frontière future est de type spatial, ce qui signifie l'existence d'horizons d'événements pour les observateurs fondamentaux.

Pour les espaces-temps les plus physiquement intéressants, et sont soit de type spatial, soit nuls), ce qui est étroitement lié à l'existence de l'un des deux types d'horizon décrits ci-dessus.

Si J^- est de type espace, les lignes du monde des observateurs fondamentaux ne se rejoignent pas toutes sur J^- au même point. Pour tout observateur et événement particulier sur sa ligne d'univers proche de J^- , le cône de lumière passé de cet événement n'interceptera pas toutes les particules de l'Univers avant d'atteindre J^- et il y aura un horizon de particules. Si J^- est nul, on s'attend à ce que toutes les lignes d'univers des observateurs fondamentaux passent par le sommet de sorte que le cône de lumière passé d'un point P intercepte toutes les lignes d'univers et qu'il n'y ait pas d'horizon de particules.

Si elle est de type espace, la ligne d'univers de tout fondamental se termine sur un point O de J^+ et le cône de lumière passé de O divise l'Univers en événements visibles par l'observateur et événements qu'il ne peut jamais voir ; il y a un horizon des événements. Si J^+ est nul, toutes les lignes du monde passeront par le sommet i^+ , de sorte que $0 = i^+$ et son cône de lumière passé est J^+ et il n'y a pas d'horizon des événements.

En conclusion,

J^- existence spatiale	d'un horizon de particules
J^+ existence spatiale	d'un horizon des événements.

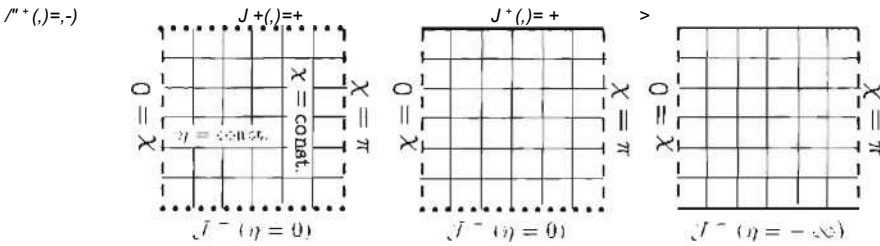


Fig. 3.14 Diagrammes conformes de l'espace-temps de Friedmann-Lemaître à sections spatiales sphériques avec $P > 0$ pour $A = 0$ (à gauche), et $A > 0$: cas hésitant (milieu) et cas rebondissant (clair). La ligne pointillée représente une singularité. Les trois diagrammes ne diffèrent que par la nature de $J^\pm$, même s'ils sont tous des surfaces de type espace.

3.6 Au-delà du principe cosmologique

Les espaces-temps de Friedmann-Lemaître présentent des sections spatiales à courbure constante, c'est-à-dire des surfaces tridimensionnelles homogènes et isotropes. Ces symétries sont caractérisées par six vecteurs Killing (Chapitre 1) qui fixent complètement la géométrie de la métrique spatiale, jusqu'à un nombre K .

Réciproquement, on peut construire des solutions en restreignant le nombre de symétries - et en imposant la structure de leur algèbre de Lie. De nombreuses solutions des équations d'Einstein sont connues dans ce cas et ont été classées [22-24],

Nous donnons une description générale de la classification des espaces-temps cosmologiques selon leurs symétries puis nous présentons deux solutions cosmologiques afin d'illustrer la richesse que cela apporte.

3.6.1 Classer les espaces-temps

Même si la discussion précédente s'est concentrée sur une classe particulière de solutions cosmologiques avec des sections spatiales à symétrie maximale, la plupart des solutions des équations d'Einstein n'ont aucune symétrie. Cette simplification a été motivée par le principe cosmologique mais il est important d'avoir une idée de solutions exactes avec moins de symétrie, notamment pour construire des contre-exemples à certaines conclusions ou tester leur robustesse.

3.6.1.1 Symétries et vecteurs de mise à mort

Les symétries d'un espace donné sont des transformations de cet espace en lui-même laissant inchangées la métrique ainsi que toutes ses propriétés géométriques. Comme expliqué au chapitre 1, une symétrie continue peut être caractérisée par un champ vectoriel Killing, ξ , satisfaisant

$$\xi^\alpha \nabla_\alpha U + U \nabla_\alpha \xi^\alpha = 0$$

Le groupe d'isométries d'une variété riemannienne forme un groupe de Lie (c'est-à-dire un groupe qui est aussi une variété lisse avec une opération de groupe xy^{-1} qui est une application lisse dans la variété elle-même ; voir chapitre 2). L'ensemble des générateurs de champs de vecteurs Killing de ces isométries forme l'*algèbre de Lie associée* : c'est un espace vectoriel, puisque la combinaison linéaire de deux vecteurs Killing quelconques est aussi un vecteur Killing, de dimension finie r puisque le nombre maximum de vecteurs Killing pour un espace de dimension n est $n(n+1)/2$, atteint pour les espaces à symétrie maximale. Le fonctionnement du produit est défini par le commutateur de deux vecteurs Killing

$$[U, V] = \nabla_U V - \nabla_V U \quad (3-113)$$

de coordonnées $[\xi^\alpha, \xi^\beta]^* = (\xi^\alpha \nabla^\beta - \xi^\beta \nabla^\alpha) \xi^\gamma$ et il satisfait l'identité de Jacobi, $[\xi^\alpha, [\xi^\beta, \xi^\gamma]] + [\xi^\beta, [\xi^\gamma, \xi^\alpha]] + [\xi^\gamma, [\xi^\alpha, \xi^\beta]] = 0$

On vérifie facilement que si ξ et η sont deux vecteurs Killing alors $[\xi, \eta]$ est aussi un vecteur Killing (puisque $\nabla_U \xi = 0$ et $\nabla_V \eta = 0$). Considérant une base $\{\xi^a\}_{a=1}^r$ de cette algèbre, tout vecteur Killing peut être décomposé sur cette base comme une combinaison linéaire à coefficients constants. Il s'ensuit que

$$(3.H4)$$

où C^a_b sont les *constantes de structure* de l'algèbre de Lie. Elles sont antisymétriques, $C^c_{ab} = -C^c_{ba}$ et doivent satisfaire, d'après l'identité de Jacobi $C^c_{ab} C^d_{cd} = 0$. Ces relations sont des conditions d'intégrabilité qui garantissent que l'algèbre de Lie est défini de manière cohérente.

3.6.1.2 Définitions

L'action d'un groupe d'isométries définit des orbites dans l'espace où il agit et la dimensionnalité de ces orbites caractérise les symétries.

L'*orbite* d'un point P est l'ensemble de tous les points dans lesquels P se transforme ! par l'action des isométries de l'espace. Les orbites sont donc des ensembles invariants. Une variété invariante est un ensemble globalement laissé invariant par l'action du groupe d'isométries. Il sera plus grand que toutes les orbites qu'il contient. Les orbites sont les plus

petits sous-espaces invariants (pour toutes les isométries du groupe). Une orbite qui se réduit à un seul point est un *point fixe*. C'est un point où tous les vecteurs de destruction disparaissent. On distingue les *points généraux* où la dimension de l'algèbre de Killing Lie mesure la valeur qu'elle a presque partout des *points spéciaux*, comme les points fixes, où la dimension est plus faible. Le groupe d'isométries est *transitif sur un espace S* s'il peut déplacer n'importe quel point de S vers n'importe quel autre point de S. Les orbites sont les plus grands espaces passant par chaque point sur lequel le groupe est transitif et peuvent être appelés *surfaces de transitivité*. Leur dimension, s , doit être inférieure ou égale à la dimension du groupe de translation,

$$s = \dim(\text{surface de transitivité}) < n.$$

Le *groupe d'isotropie*, en un point P , est le sous-groupe d'isométries permettant de fixer ce point particulier. Il est généré par les vecteurs Killing qui disparaissent en P . Sa dimension q est plus petite que la dimension du groupe de rotations, $n(n-1)/2$,

$$q = \dim(\text{groupe d'isotropie}) < Q^{n-1}$$

La dimension du groupe d'isométries, r , est la somme des dimensions du groupe d'isotropie et de la surface de transitivité. Il s'ensuit que r doit être plus petit que la dimension maximale de l'algèbre de Killing Lie, c'est-à-dire $n(n+1)/2$, c'est-à-dire pour un espace de courbure constante.

$$r = \dim(\text{groupe d'isométries}) = s + q < n(n+1)/2.$$

Le groupe d'isométries d'un espace est ainsi caractérisé par deux des trois nombres (s, g, r) et par les constantes de structure du groupe (C^i_j) .

3.6.1.3 Classification des modèles cosmologiques

Pour un espace-temps $n = 4$ dimensions, $r < 10$ et s peut aller de 0 à 4. La dimension du groupe d'isométries étant une propriété globale de l'espace, r ne doit pas changer dans l'espace. En effet, l'Univers réel n'a pas de symétrie ($r = 0$).

Pour les espaces cosmologiques, nous supposons que $ppP > 0$, ce qui implique que $q \in \{3, 1, 0\}$ car la congruence de la ligne d'univers des observateurs fondamentaux est invariante, de sorte que le groupe d'isotropie en chaque point doit être un sous-groupe agissant orthogonalement à iP et on peut montrer qu'il n'y a pas de sous-groupe de $o(3)$ de dimension 2. De plus, q peut varier dans l'espace mais pas sur une orbite et il peut être plus grand en des points spéciaux où s est plus petit. L'espace sera dit *isotropie* pour $q = 3$ (c'est le cas des espaces de Friedmann-Lemaître), *localement invariant en rotation* pour $q = 1$ (il existe une direction spatiale privilégiée) et *anisotrope* pour $q = 0$.

Le tableau 3.2 résume toutes les possibilités selon q et s . Pour plus de détails, voir Réf. [7, 22-24].

sphériques d'un univers de Friedmann-Lemaître et en comblant les vides par une solution sphériquement symétrique de l'équation d'Einstein, par exemple une solution de Schwarzschild. Les deux espaces-temps sont ensuite collés le long d'une hypersurface tridimensionnelle de type temps. Cela implique des contraintes sur les deux espaces-temps puisqu'ils doivent obéir à des conditions de jonction pour que l'espace-temps total se comporte bien (voir la section 8.4.5 du chapitre 8 pour une description de ces conditions).

Par exemple, on peut montrer que cela implique que la masse centrale de l'espace-temps de Schwarzschild, la densité et le facteur d'échelle de l'espace-temps de Friedmann-Lemaître et le rayon du vide sphérique doivent être liés par $M_{\text{Sch}}^{\text{TM}} = (47r/3)[\rho a^3 B^3]pL$. Ainsi, on peut construire un vide sphérique avec une surdensité au centre. Les conditions de jonction imposent que les sur- et sous-densités soient en moyenne égales à la densité moyenne de l'espace-temps de Friedmann-Lemaître. Il s'ensuit que la masse dans le vide central ne peut avoir aucun effet sur la matière extérieure au vide, et notamment sur le taux d'expansion : son effet gravitationnel est masqué.

3.6.3 Univers à sections spatiales homogènes

Les modèles d'Univers avec $s = 3$ sont centraux en cosmologie théorique car ils réalisent mathématiquement le principe cosmologique (ils ont des sections spatiales homogènes). Nous avons longuement décrit le cas des espaces-temps isotropes ($q = 3$; $r = 6$) dans ce chapitre. Deux classes d'espaces-temps non isotropes peuvent être construites : (i) la famille des solutions avec une symétrie de rotation locale ($q = 1$; $r = 4$), qui contient la famille des univers de Kantowski-Sachs et certains univers de Bianchi, et (ii) la famille des solutions anisotropes ($q = 0$; $r = 3$), qui contient les autres Univers Bianchi.

3.6.3.1 Génératrices sur les univers Bianchi

Pour classer tous les espaces avec $s = 3$, il faut déterminer les constantes de structure, C^c_b , du groupe simplement transitif sur des sections de type espace. Les C^c_b ont 9 composantes indépendantes et peuvent donc être mappées sur la matrice 3×3 $\gamma_{\alpha\beta}$ définie par

$$C^c_b = \frac{1}{2} \epsilon^{cd} \epsilon_{ab} \gamma_{cd}$$

où ϵ^{cd} est le tenseur complètement antisymétrique. En divisant N_{cd} en ses parties symétriques et antisymétriques comme $N_{cd} = n^{cd} + \epsilon^{cd} A_b$, nous obtenons que les constantes de structure sont

$$C^c_{ab} = \epsilon^{cd} \epsilon_{ab} A_c + \delta^c_a A_b - \delta^c_b A_a$$

On peut toujours choisir la base de l'algèbre de Lie telle que n^{ab} soit diagonale [$n_a = \text{diag}(n_1, n_2, n_3)$]. Une rotation permet de poser $A_b = (a, 0, 0)$ en gardant n^{ab} diagonale. L'identité de Jacobi implique que $n^{ab} A_c = 0$, de sorte que nous avons l'une des trois possibilités : (i) $a = 0$ et $n_1 \neq 0$, (ii) $a \neq 0$ et $n_1 = 0$, ou (iii) $a = 0$ et $n_1 = 0$. En redimensionnant les vecteurs Killing, nous pouvons finalement fixer le non-disparition n_a à ± 1 mais en général il est impossible de redimensionner à la fois a et n_a .

$$n_a \gamma^{ab} = \text{diag}(n_1, n_2, n_3), A_a = (a, 0, 0) \text{ avec } n_a \in \{0, \pm 1\} \text{ et } an_a = 0. \quad (3.120)$$

Le tableau 3.3 donne les onze groupes d'isométries répartis parmi les neuf types Bianchi I à IX. Ils sont répartis en deux classes : classe A si $a = 0$ et classe B sinon. Dans certains cas, ces groupes permettent une symétrie plus élevée. Par exemple, Bianchi I et VII₀ peuvent être isotropes (conduisant à $K = 0$ espaces-temps de Friedmann-Lemaître) ainsi que Bianchi IX (conduisant à $K = +1$ espaces-temps de Friedmann-Lemaître) et Bianchi V et Bianchi VII_a (conduisant à $K = -1$ espace-temps de Friedmann-Lemaître).

Type	<i>Y</i>	<i>II</i>	<i>VII</i>	Scie	<i>IX</i>	<i>VII</i>	<i>V</i>	<i>III</i>	<i>IV</i>	<i>VIL</i>	<i>J'ai</i>
<i>à</i>	0	0	0	0	0	0	1	1	1	<i>à</i>	<i>à</i>
<i>ni l'un ni</i>	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
<i>Nouvelle-</i>	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1
<i>Nouvelle-</i>	0	1	1	-1	je	-1	0	1	-1	1	-1

Tableau 3.3 Les constantes de structure des 11 groupes d'isométries et la définition des 9 types de Bianchi associés.

Classe U
N B

3.6.3.2 *Exemple : Univers Bianchi I*

L'univers le plus simple à expansion anisotrope est l'univers Bianchi *I*. C'est un espace-temps homogène de sorte que le gradient projeté de toute fonction scalaire disparaît, $VJ = 0$. Cela implique, dans les notations du chapitre 1, que $\omega = 0$ (car $V_p P = 0$ et le tourbillon disparaît également, $\omega = 0$). Il s'ensuit qu'il est complètement décrit par $\theta(t)$, $\sigma(i)$, $p(i)$ et $F(i)$.

L'équation de Raychaudhuri (1.73) donne

$$\dot{\theta} + \theta^2 + 2\sigma^2 = -4\pi G_N (\rho + 3p).$$

Les sections spatiales sont supposées euclidiennes de sorte que $R = 0$, ce qui implique que l'équation de Friedmann généralisée (1-78) se réduit à

$$|\dot{e}|^2 - A = 8\pi G_N \rho.$$

L'équation d'évolution en cisaillement est dérivée de la relation de Gauss-Codazzi, en utilisant le fait que $\nabla_{ab} \theta = 0$, et est donnée par

$$\omega^c \nabla_c (\sigma_{ab}) - \nabla_{ab} \theta = 0.$$

En termes de dérivés du temps cosmique, cela se réécrit comme

$$(\sigma_{ab})' + \theta \sigma_{ab} = 0.$$

En coordonnées mobiles, la métrique de cet espace-temps prend la forme

$$ds^2 = -dt^2 + X^2(t)dx^2 + Y^2(t)dy^2 + Z^2(t)dz^2. \quad (3.121)$$

La moyenne des taux d'expansion directionnelle est $S = (XY Z)^{1/3}$ et est liée à $\dot{S}$ par $3\dot{S} = S^{-1} \dot{S}$. En factorisant S , la métrique peut être reformulée comme

$$ds^2 = -dt^2 + S^2(t) \gamma_{ij}(t) dx^i dx^j, \quad (3.122)$$

et la métrique sur les hypersurfaces à temps constant peut être décomposée comme

$$\gamma_{ij} = e^{2\psi} \gamma_{ij}^0, \quad (3.123)$$

où les A doivent satisfaire $\nabla_i A = 0$. γ est sans trace et lié au cisaillement par

$$\sigma_{ij} \sim \gamma_{ij} - \frac{1}{3} \gamma \gamma_{ij}$$

L'équation d'évolution du cisaillement implique que

$$\sigma_j^i = \frac{\Sigma_j^i}{S^3} \quad (3.124)$$

où F^i_j un tenseur constant. Cela implique que $\dot{\Sigma}^i_j = S^2/S^6 \Sigma^i_j$, où $\Sigma^2 =$ et donc que l'équation de Friedmann généralisée (1-78) prend la forme

$$3\dot{S}^2 = 1 - \Sigma^2 + 2S\dot{\Sigma}^i_i \quad (3.125)$$

Pour un fluide d'équation d'état $P = wp$, $p \propto S^{-3(w+1)}$. Cela implique que pour toute valeur de S , le cisaillement domine toujours l'évolution primordiale de l'Univers. On peut également vérifier que l'équation de Raychaudhuri prend la forme

$$S^2 \ddot{S} = -\frac{\kappa}{6}(\rho + 3P) - \frac{1}{3} \frac{\Sigma^2}{S^6}. \quad (3.126)$$

The evolution of the three scale factors can be shown to be obtained by setting

$$\beta_i(t) = B_i W(t), \quad (3.127)$$

with

$$W(t) = \int \frac{dt}{S^3}. \quad (3.128)$$

The coefficients B_i must satisfy the constraint

$$\sum B_i = 0, \quad \sum B_i^2 = \Sigma^2. \quad (3.129)$$

This relation is trivially verified with

$$B_i = \sqrt{\frac{2}{3}} \Sigma \sin \alpha_i, \quad \alpha_i = \alpha + \frac{2\pi}{3} i, \quad (3.130)$$

where α is a constant. For instance, if $w = 0$, we obtain the solution

$$S = \left(\frac{3}{4} M t^2 + \sqrt{\frac{3}{2}} \Sigma t \right)^{1/3}, \quad W = -\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{\Sigma} \ln \left(3M + 2\sqrt{6}\Sigma/t \right), \quad (3.131)$$

une fois réglé $Kp = M/\delta^{1/2}$. A des époques tardives, l'Univers devient de plus en plus isotrope et tend vers un espace-temps d'Einstein-de Sitter, mais à l'approche du Big Bang, le cisaillement domine. *Sable*

$$X(t) = X_0 t^{(1/2 + 2\alpha + 2\beta)/3} Y(t) v_0 Z^{(1+2\beta + 2\alpha)/3}, \quad Z(t) Z_0^{1/3 + 2\alpha + 2\beta} U \quad (3.132)$$

Si $\alpha < 7/2$, deux des puissances sont positives et la troisième est négative. Des comportements similaires proches de la singularité seront discutés dans la section 13.4.1 du chapitre 13.

Comme autre exemple, considérons le cas d'une constante cosmologique pure. Alors, l'équation Friedmann peut prendre la forme

$$S^2 = H_0^2 \left(1 + \frac{S_0^6}{S^6} \right)$$

Il s'ensuit que

$$S(t) = |\sinh(32/t)|^{1/3}.$$

Encore une fois, à un moment tardif, il converge vers le facteur d'échelle de De Sitter $S \sim \exp(H_0 t)$ alors qu'au début il se comporte comme

Les références

- [1] PJE PEEBLES, *Principe de physique ! cosmologie*, Princeton University Press, 1993.
- [2] S. WEINBERG, *Gravitation et cosmologie : principes et applications de la théorie de la relativité générale*, John Wiley and Sons, 1972.
- [3] J. RICH, *Fondements de la cosmologie*, Springer-Verlag, 2001.
- [4] E. HARISSON, *Cosmologie*, Cambridge University Press, 1981.
- [5] B. RIDDEN, *Introduction à la cosmologie*, Addison Wesley, 2003.
- [6] RC TOLMAN, *Relativité, thermodynamique et cosmologie*, Oxford University Press, 1934.
- [7] GER ELLIS et H. VAN ELST, « Modèles cosmologiques », dans *Cosmologie théorique et observationnelle*, Kluwer, Dordrecht, 1999.
- [8] JP UZAN, C. CLARKSON et GER ELLIS, « La dérive temporelle du redshift cosmologique comme test du principe copernicien », *Phys. Le révérend Lett.* **100**, 191303, 2008.
- [9] R. WALD, *Gravitation*, Chicago University Press, 1984.
- [10] S. HAWKING et GFR ELLIS, *La structure à grande échelle de l'espace-temps*, Cambridge University Press, 1973.
- [11] AD CHERNIN, DI NAGIRNER et SV STARIKOVA, « Taux de croissance des perturbations cosmologiques dans le modèle standard : solution analytique explicite », *Astron. Astrophysique* . **399**, 19, 2003.
- [12] J. EHLERS et W. RINDLER, « Une représentation dans l'espace des phases des univers de Friedmann-Lemaître contenant à la fois de la poussière et des radiations et l'inévitabilité d'un Big Bang », *Mois. Pas. R. Astron. Soc.* **238**, 503, 1989.
- [13] GFR ELLIS et J. WAINWRIGHT (éd.), *L'approche systématique dynamique de la cosmologie*, Cambridge University Press, 1996.
- [14] J.-P. UZAN et R. LEHOUCQ, 'Une étude dynamique des équations de Friedmann', *Eur. J. Phys.* **22**, 371, 2001.
- [15] GFR ELLIS, « Cosmologie relativiste », dans *Relativité et cosmologie*, RK SACHS (éd.), Academie Press, 1971.
- [16] J.-P. UZAN, N. AGHANIM et Y. MELLIER, « La relation de dualité de distance à partir des observations aux rayons X et SZ des amas », *Phys. Rev. D* **70**, 083533, 2004.
- [17] M. DAVIES et L. MAY, 'Nouvelles observations de la raie d'absorption radio dans 3C 286, avec application potentielle à la mesure directe de la décélération cosmologique', *Astrophys. J.* **219**, 1, 1978.
- [18] A. LOEB, 'Mesure directe des paramètres cosmologiques issus de la décélération cosmique d'objets extragalactiques', *Astrophys. J. Lett.* **499**, III, 1998.
- [19] W. RINDLER, « Horizons visuels dans les modèles mondiaux », *Month. Pas. R. Astron. Soc.* **116**, 622, 1953.

176 références

- [20] TM DAVIS et CH LINEWEAVER, *Confusion croissante : idées fausses courantes sur les*

horizons cosmologiques et l'expansion spéculative de l'Univers, [astro-ph/0310808].

- [21] R. PENROSE, 'Traitement conforme de l'infini', dans *Relativité, groupes et topologie, Les Houches 1963*, pp. 561 C. DE WITT, et B. DE WITT (éd.) > Gordon et Breach, 1964.
- [22] A. KRASINSKY, *La physique dans un univers inhomogène*, Cambridge University Press, 1996.
- [23] D. K. RA MER, H. STEPHANI, MAH MCCALLUM et E. HERTG, *SOLUTIONS exactes d'Einstein 's équations de champ*, Cambridge University Press, 1980.
- [24] MP RYAN, *Cosmologies relativistes homogènes*, Princeton University Press, 1975.

4

Le modèle standard du Big-Bang

Ce chapitre est consacré à la description des piliers historiques sur lesquels repose le modèle standard du Big-Bang. A partir des solutions cosmologiques décrites au chapitre 3, nous présentons les observations prouvant l'expansion de l'Univers et les différentes conséquences de cette expansion.

Nous commençons, dans la section 4.1, par décrire les preuves observationnelles de l'*expansion de l'Univers* depuis les observations de Hubble jusqu'aux plus récentes. Cela nous amènera à discuter de la valeur de la constante de Hubble et de sa relation avec l'âge de l'Univers.

Les éléments de la thermodynamique dans un espace-temps en expansion sont résumés dans la section 4.2. Nous en déduisons que l'Univers possède une histoire thermique. Nous montrerons en particulier comment les écarts à l'équilibre thermodynamique jouent un rôle central.

Une caractéristique remarquable du modèle du Big-Bang vient de la preuve par Alpher, Bethe et Gamow en 1948 [1] que des noyaux légers peuvent être formés au cours de la nucléosynthèse *primordiale*. Ceci est discuté dans la section 4.3.

Gamow [2] ont également déduit l'existence d'un fond micro-onde de photons dont la température a été calculée par Alpher et Herman [3] en 1948. S'appuyant sur une estimation de l'abondance de l'hélium et de la densité des baryons, ils ont conclu que cette température devait être d'environ 5 K. La section 4.4 décrit les propriétés de la composante isotropie de ce *rayonnement de fond micro-onde*.

Ces ingrédients physiques transforment les solutions cosmologiques (mathématiques) de Friedmann-Lemaître en *modèle Big-Bang*. Nous montrerons dans la section 4.5 que ce modèle est un excellent modèle standard pour la cosmologie, même s'il souffre de quelques problèmes, sur lesquels nous concentrerons notre attention dans les chapitres suivants de ce livre.

4.1 Le diagramme de Hubble et l'âge de l'Univers

Si l'Univers est en expansion, les galaxies doivent s'éloigner les unes des autres (voir section 3.1.3 ; chapitre 3). La mesure du décalage achromatique systématique vers des longueurs d'onde plus grandes des raies spectrales d'absorption ou d'émission donne accès au redshift z . Pour les petits redshifts, la vitesse de récession est donnée par $v/c \sim z$. Quant aux distances, (3.99) montre que la luminosité et les distances angulaires se réduisent à

$$D_A \sim D_L$$

tant que $z \ll 1$. Dans ce régime, la pente de la courbe de v en fonction de D donne directement la constante de Hubble H_0 . Pour les redshifts plus importants, ce n'est plus le cas. Premièrement la

la distance angulaire et la distance de luminosité ne sont plus identiques, et par ailleurs d'autres paramètres cosmologiques interfèrent également dans la détermination de ces distances (voir chapitre 3).

Nous décrivons les mesures pour les petits redshifts dans la section 4.1.1 puis celles pour les supernovæ qui s'étendent jusqu'aux redshifts d'ordre 1 dans la section 4.1.2. Nous terminons en résumant les méthodes permettant de déterminer l'âge de l'Univers dans la section 4.1.3.

4.1.1 La constante de Hubble

Le diagramme de Hubble est la preuve la plus directe de l'expansion de l'Univers. L'idée sous-jacente est très simple et provient de mesures indépendantes du redshift et de la distance.

Ces mesures doivent être effectuées à des distances suffisamment grandes pour que la vitesse propre des galaxies soit négligeable. Typiquement, il faut mesurer des vitesses supérieures à $v \sim 10^4 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, ce qui correspond à un redshift de $z \sim 0,03$.

Les mesures originales de Hubble se situent respectivement jusqu'à des vitesses d'ordre $v \sim 1\,000 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ puis jusqu'à des vitesses d'ordre $v \sim 20\,000 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ (voir Fig. 4.1). Cette analyse a fourni une valeur pour H_0 10 fois supérieure à celle adoptée aujourd'hui. Pour une galaxie de vitesse de récession $v \sim 10\,000 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, l'effet de sa vitesse propre $n \sim 300 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ conduit à une incertitude d'environ 3 %. Cette incertitude peut être réduite en observant un grand nombre d'objets bien répartis sur l'ensemble du ciel.

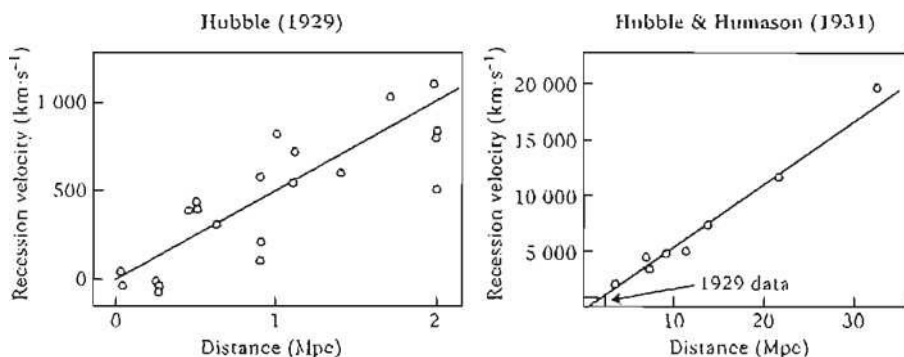


Fig. 4.1 Observations de Hubble en 1929 (à gauche) et de Hubble et Humason en 1931 (à droite) prouvant l'expansion de l'Univers. La première mesure de H_0 comprenait 18 galaxies pour lesquelles la distance et le redshift ont été déterminés. Hubble a conclu que $H_0 = 500 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$ [4].

4.1.1.1 Méthodes astronomiques

La difficulté de construire une échelle de distance fiable [5] a limité les progrès dans la mesure de la constante de Hubble. Grâce au Hubble Space Télescope (HST), il est désormais possible de mesurer H_0 avec une précision d'environ 10 %. En astronomie, les distances ne peuvent pas être mesurées directement. La méthode de parallaxe, qui est purement géométrique, peut éventuellement être utilisée pour déterminer les distances des étoiles les plus proches dans la Voie Lactée. La méthode générale consiste alors à mesurer la luminosité intrinsèque d'une classe d'objets pour lesquels μ est soit constant, soit corrélé à un autre

paramètre physique, dont la valeur est considérée comme indépendante de la distance, afin de calibrer les distances relatives. Diverses classes d'objets ont été utilisées à cette fin (voir Réf. [6] pour une revue).

1. *Céphéides* : les céphéides sont des étoiles variables dont l'atmosphère extérieure varie avec une période comprise entre 2 et 100 jours. Ces étoiles jeunes et brillantes sont très abondantes dans les galaxies spirales fermées et irrégulières. Le mécanisme de pulsation est bien compris théoriquement et il a été établi empiriquement sur la période de pulsation, indépendante de la distance, est corrélée à la luminosité intrinsèque de l'étoile. La dispersion de la relation période-luminosité est de l'ordre de 20% en luminosité. Puisque la luminosité évolue comme l'inverse du carré de la distance, cela implique une précision de 10 % sur la détermination de la distance. Pour un échantillon de 25 céphéides, l'incertitude statistique tombe à 2 %. Le diagramme de Hubble obtenu à partir de céphéides par le HST Key Project [7] est présenté sur la Fig. 4.2.

L'étalonnage le plus précis de la relation période-luminosité est effectué sur le Grand Nuage de Magellan (LMC) et sa distance a été déterminée avec une précision de 10 %.

Pour le moment, la détection de céphéides est limitée à environ 20 Mpc. Pour étendre l'échelle, il faudrait trouver des objets plus brillants que de simples étoiles. Leur luminosité peut être calibrée en identifiant de tels objets dans les galaxies proches qui contiennent également des céphéides.

2. *Type la supernovae* : type la supernovæ (SN Ia) sont les indicateurs de distance les plus prometteurs pour la cosmologie d'observation moderne. L'origine de SN Ia est l'explosion d'une naine blanche. Leur luminosité est comparable à celle d'une galaxie entière, ce qui les rend observables à des distances de plusieurs centaines de Mpc. Comme nous le montrerons plus loin dans la section 4.1.2, leur courbe de luminosité montre une forte corrélation entre le temps d'évolution caractéristique et la luminosité maximale. L'incertitude de cette relation est de l'ordre de 12% sur la luminosité, ce qui se traduit par une incertitude de l'ordre de 6% sur la détermination de leur distance.
3. Selon la *relation de Tully-Fisher*, la luminosité totale des galaxies spirales est fortement corrélée à la vitesse de rotation maximale de la galaxie. Cette relation, détaillée au chapitre 7, reflète le fait qu'une galaxie plus brillante, et donc plus massive, doit tourner plus rapidement pour compenser l'attraction gravitationnelle. La vitesse de rotation peut être mesurée par des observations spectroscopiques de l'effet Doppler. La relation de Tully-Fisher a été mesurée pour une centaine de galaxies et on peut montrer empiriquement qu'elle présente une dispersion de l'ordre de 30% en luminosité, ce qui implique une précision de l'ordre de 15% dans la détermination de la distance.
4. *Plan fondamental* : la luminosité intrinsèque des galaxies elliptiques est corrélée à la dispersion des vitesses de leurs étoiles. Cette corrélation est analogue à la relation de Tully-Fisher. Les galaxies elliptiques occupent un « plan fondamental » où leur luminosité L est corrélée à la luminosité de surface $I(j)$ et à la dispersion de vitesse a , par une relation de la forme $L \propto a^7$.

Cette relation peut être comprise par le fait que les galaxies elliptiques sont grossièrement

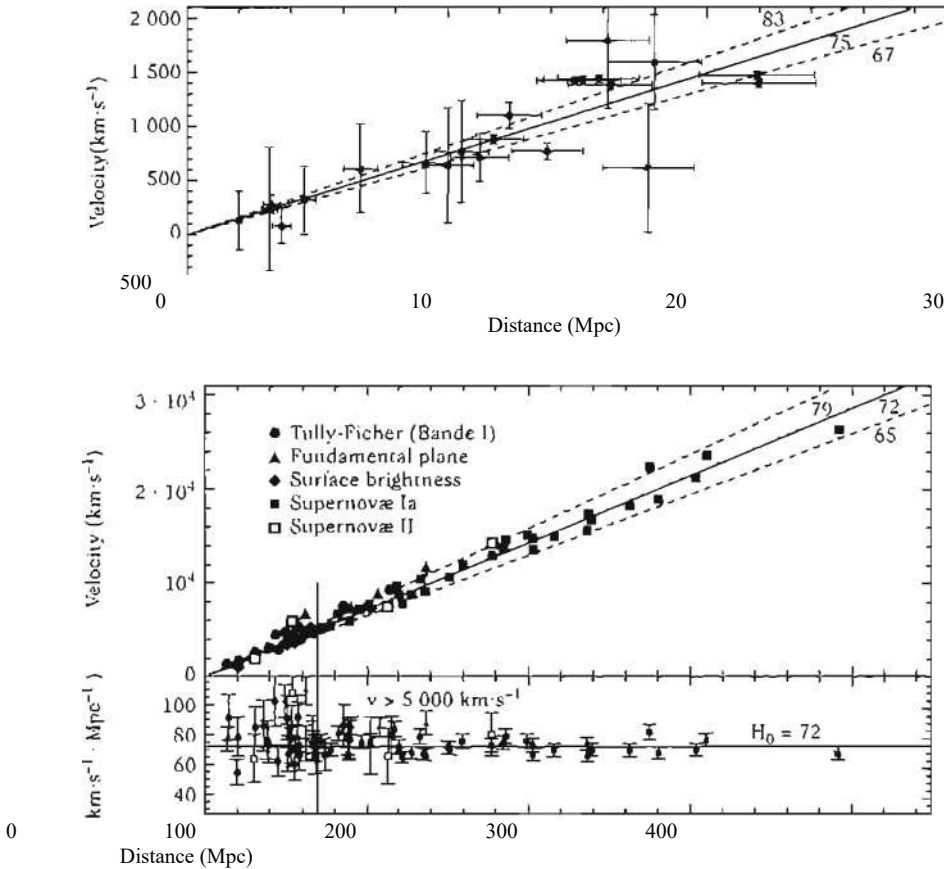


Fig. 4.2 (en haut) : Diagramme de Hubble pour les céphéides obtenu par la collaboration HST Key Project - 17]. Les données sont étalées jusqu'à des distances de l'ordre de 20 Mpc, tout comme les mesures de Hubble et Humason (1931). (en bas) : Différents objets sont utilisés et grâce au type la supernovae, le diagramme peut s'étendre jusqu'à environ 300 Mpc.

Systèmes autogravitants avec un rapport masse/luminosité plus ou moins constant. Le théorème du virial (voir section 7.2.2) impose alors un $\propto M/R$. De plus, la luminosité de la surface est bien décrite par $Z(r) = I_0 \exp[-(r/r_0)^{1/4}]$, appelée loi de Vaucouleur. Ceci peut être intégré comme $L \propto r_0^2 I_0$. En supposant que le rapport masse/luminosité est de la forme $M/L \propto M^x$ nous obtenons que $T \propto M^{1-x}$ ou $r \propto M^{1/(4(1-x))}$. La loi empirique est récupérée pour $x \approx 0,25$.

La précision de cette relation est de l'ordre de 10-20%, ce qui implique une précision de l'ordre de 5-10% sur la détermination de la distance.

5. Fluctuation de la luminosité de la surface : la résolution des étoiles avec une caméra CCD dépend de la distance. La luminosité de chaque pixel est due à un nombre donné d'étoiles. On peut montrer que les fluctuations de Poisson d'un pixel à un autre dépendent de la distance de la galaxie. Cette méthode a une précision de l'ordre de 8% et

s'applique à des redshifts allant jusqu'à $z \sim 0,02$.

4.1.1.2 Résumé des mesures

Ces différentes méthodes ont été mises en application, notamment grâce au HST, pour construire une échelle de distance astronomique fiable. Cette échelle de distance a notamment été calibrée jusqu'à un niveau de 5% par les céphéides. Les résultats concernant le diagramme de Hubble sont présentés sur la Fig. 4.2. Les différentes valeurs de la constante de Hubble obtenues par ces différentes méthodes [7] sont résumées dans le tableau 4.1.

Tableau 4.1 Valeur de la constante de Hubble telle que mesurée par les différentes méthodes discutées dans le texte.

H_0 (km ■ s ⁻¹ /Mpc)	Méthode
71 ±2 ±6	SN Ia
71 ±3 ±7	Tully-Fisher
70 ±5 ±6	luminosité de la surface
72 ±9 ±7	SNII
82 ±2 ±6	plan fondamental
72 ±8	méthodes combinées

4.1.1.3 Méthodes physiques

Parallèlement à ces méthodes astronomiques, il existe au moins trois autres méthodes pour déterminer la constante de Hubble, évitant ainsi de construire une échelle de distances.

1. *Expansion de la photosphère du SN II* : le front du SN II se propage à une vitesse d'ordre $v/c \sim 0,01$ après l'explosion. Cette vitesse peut être mesurée par le décalage Doppler dans le spectre de la supernova. Le rayon de la photosphère est alors r_p photosphère = $v(t - t_{\text{ex}})$ p[osition]- Si le diamètre angulaire $\hat{\theta}$ sous lequel la supernova est observée peut être mesuré, alors sa distance peut être déduite, $D = v(t - (explosion))/\hat{\theta}$ - Malheureusement, le diamètre angulaire est difficile à mesurer directement pour les supernovæ extragalactiques.
2. *Effet de location* : les instants d'arrivée de deux images à lentille gravitationnelle de la même source ponctuelle dépendent du chemin suivi par la lumière et des potentiels gravitationnels le long de ces chemins (Chapitre 7). Le délai entre deux signaux lumineux ainsi que la séparation angulaire entre les deux images d'un quasar variable permettent de déduire la constante de Hubble. Cependant, cette méthode présente certains problèmes. La lentille gravitationnelle est généralement une galaxie dont la distribution de masse n'est pas connue indépendamment. Il existe donc une dégénérescence entre la répartition de la masse de la lentille et la constante de Hubble. Idéalement, nous aurions besoin d'une mesure de la dispersion des vitesses en fonction de la position. Seule une douzaine de systèmes connus, présentant à la fois une géométrie favorable et au moins une source variable, sont actuellement connus.
3. *Effet Sunyaev-Zel'dovich* : la diffusion Compton inverse d'un photon de fond micro-ondes (voir section 4.4) par le gaz ionisé d'un amas induit une distorsion du spectre du corps noir, connue sous le nom d'effet (thermique) Sunyaev-Zel'dovich. effet [8]. La probabilité de diffusion P peut être grossièrement exprimée en fonction du diamètre de l'amas θ_c et sa densité électronique moyenne n_e par $P \sim n_e \theta_c^2 D_{10}^2 \sigma_T$, & T étant

la section efficace de diffusion de Thomson.

La température et la densité des gaz chauds peuvent être obtenues à partir d'une carte d'émission X. En utilisant le fait que le flux X, contrairement à la distorsion spectrale du fond micro-onde, dépend de la distance au cluster, on peut ainsi déduire cette dernière. Les principales incertitudes de cette méthode proviennent des hétérogénéités de la distribution des gaz (qui tendent à abaisser la valeur mesurée de H_0), des effets de projection et de l'hypothèse d'équilibre hydrostatique.

En conclusion, il est rassurant de constater que des méthodes basées sur des principes physiques très différents conduisent à des valeurs cohérentes de la constante de Hubble (voir tableau 4.2), elles-mêmes en accord avec celles obtenues par les méthodes astronomiques.

Tableau 4.2 Mesure de la constante de Hubble par des méthodes physiques.

H_0 (km s ⁻¹ /Mpc)	Méthode	Référence
73 ± 15	photosphère	Schmidt <i>et coll.</i> (1994)
72 ± 7 ± 15	effets de lecture	Tonry et Franx (1998)
60 ± 2	effets de location	Selon Fassnacht <i>et al.</i>
60 ± 4	Effet Sunyaev-Zel'dovich	Reese <i>et coll.</i> (2002)
72 ± 5	AP WM	Selon Spergel <i>et al.</i> (2003)

4.1.2 L'apport des supernovæ

Comme illustré dans la section 4.1.1, les SN la représentent à ce jour les candidats les plus compétitifs pour étendre le diagramme de Hubble aux grands redshifts, pour lesquels la relation distance de luminosité-redshift n'est plus linéaire. Cela offre la possibilité de mesurer des paramètres cosmologiques autres que la constante de Hubble.

4.1.2.1 Supernovæ lointaines

Il existe deux familles de supernovæ. Celles dont le spectre optique comporte des traces d'hydrogène sont dites de type II, tandis que celles dépourvues d'hydrogène sont de type I. De plus, les supernovæ de type I se subdivisent en trois sous-familles très différentes (a,b,c). SN Ib et Ic, tout comme SN II, sont créés par l'explosion d'étoiles massives (appelées Wolfe-Rayet) et conduisent à un trou noir résiduel ou étoile à neutrons. La masse perdue par le géniteur est plus importante pour le Ic que pour l'Ib si bien que ces derniers possèdent encore une couche d'hélium. Les SN Ia, en revanche, apparaissent dans les systèmes binaires où l'une des deux étoiles est une naine blanche qui accumule la masse de sa compagne. Lorsqu'elle atteint la masse critique de Chandrasekhar, 1,4, la naine blanche s'effondre et explose en supernova. Il a été établi, grâce à l'étude des supernovæ proches, que leur courbe de luminosité pouvait être étalonnée à l'aide d'une relation empirique entre le pic et la largeur de la courbe de luminosité. Ainsi, les SN Ia semblent être des bonbons de bon standard pouvant être observés jusqu'à de grands redshifts.

Deux équipes ont travaillé ensemble sur la recherche de supernovæ lointaines : le Super - nova Cosmology Project (SCP) [9] et la High-Z Supernova Search Team (HZT) [10]. En 1998, ils ont publié indépendamment le diagramme de Hubble de type la supernovæ (voir Fig. 4.3). Le groupe SCP a utilisé un catalogue de 42 SN la composé de 18 SN la avec $z < 0,101$ et 24 SN la avec $0,180 < z < 0,830$. L'analyse du groupe HZT s'appuie sur 34 SN la proches et 16 SN la avec $0,16 < z < 0,62$. La figure 4.3 résume les observations des deux équipes. Depuis, le nombre et le redshift maximal des supernovæ observées ont considérablement augmenté.

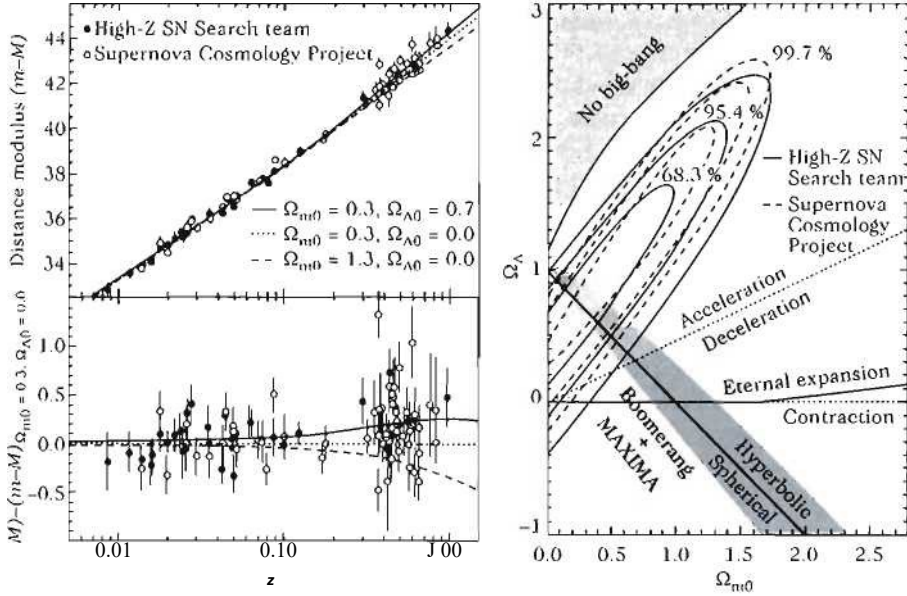


Fig. 4.3 The Hubble diagram for the supernovæ of both HZT and SCP teams compared with the prédictions of three ACDM models. The bottom panel shows the différence between the data and a (Jniverse with $(\Omega_{m0}, \Omega_{L0}) = (0.3, 0)$. (right): The constraints on the cosmological parameters $(\Omega_{m0}, \Omega_{L0})$ obtained by both experiments, compared with those obtained from the cosmological background (see Chapter 6) based on the observations of MAXIMA and BOOMERanG balloons. Adapted from Ref. [II],

4.1.2.2 Implication pour les paramètres cosmologiques

Dès que le redshift n'est pas trop petit, la relation entre la luminosité à distance et le redshift devient non linéaire et le terme d'ordre le plus proche est proportionnel à $|(1 - q_0) - \frac{2}{3} q_0|$ [voir (3.99)]. L'analyse des deux équipes prouve que le paramètre de décélération satisfait

$$q_0 < 0 \quad (4.1)$$

à 2,8u sans autre hypothèse que $H_{m0} > 0$. Cette conclusion découle de la paramétrisation (3.92) qui ne fait aucune hypothèse sur la composition matérielle de l'Univers et repose uniquement sur l'hypothèse que l'Univers peut être décrit par un espace-temps de Friedmann-Lemaître. On peut ainsi considérer le fait que l'Univers accélère comme une conclusion robuste de l'analyse des données SN la. ¹

Dans un univers ACDM, cette relation donne principalement des informations sur les

deux paramètres cosmologiques Q_m et Q_{AO} , comme indiqué par (3.94), et la contrainte (4.1) implique que $Q_{AO} > 0$. La figure 4.3 résume les contraintes de supernovæ. Ces données impliquent que la constante cosmologique doit être non nulle et positive. Les ellipses de contraintes de la Fig. 4.3 peuvent être résumées en détail comme suit :

$$80 \pm 6 \text{ } Q_{AO} \sim 2 \pm 1. \quad (4.2)$$

Pour des contraintes plus strictes, il convient de combiner les données d'autres observations telles que celles du background cosmologique des micro-ondes. Ce dernier indique que l'Univers est presque plat, $D_m + 0 \text{ } \Omega_m - 102 \pm 0,02$ selon l'analyse de WMAP (voir chapitre 6). Ainsi, pour un univers Λ CDM,

$$\Omega_m \sim 0,3, \quad Q_m \sim 0,7. \quad (4-3)$$

L'ordre de grandeur de cette analyse est confirmé par une analyse statistique précise.

4.1.2.3 Robustesse de la conclusion

La plus grande incertitude réside dans l'hypothèse selon laquelle les supernovæ lointaines seraient des bonbons standards et pourraient être calibrées de la même manière que les supernovæ proches. Trois effets doivent être quantifiés avec précision afin de savoir si cet effet est réel ou s'il s'agit d'un artefact.

- Le comportement des supernovæ pourrait varier avec le temps cosmique, principalement en raison du changement de métallicité, c'est-à-dire de leur composition chimique au-delà de l'hélium-4. Si les supernovæ lointaines avaient un pic de luminosité systématiquement plus faible que les supernovæ plus proches, la conclusion $Q_{AO} > 0$ serait adoucie. Si les explosions de SN lointaines sont plus fortes, alors la conclusion serait renforcée. Il est difficile d'obtenir des informations sur la luminosité intrinsèque et on peut plus facilement étudier d'autres paramètres de la courbe de lumière. Si deux familles (proches et lointaines) sont en tous points identiques, il est cependant fort probable que leur luminosité soit également la même.
- L'absorption par le milieu interstellaire pourrait donner l'illusion que les supernovæ lointaines sont systématiquement plus faibles. L'analyse de la courbe de lumière en plusieurs couleurs peut donner une estimation de cette gradation. Les effets de lentille gravitationnelle pourraient également adoucir la luminosité.
- La possibilité d'un biais d'observation doit également être envisagée.

Le nombre croissant de supernovæ observées permet de mieux comprendre leur physique et les études actuelles tendent à prouver que l'accélération de l'Univers ne peut s'expliquer par aucun de ces effets [1]. La figure 4.4 compare les effets astrophysiques et cosmologiques.

Nous soulignons que cette conclusion peut désormais être atteinte par la combinaison d'autres données (ag CM B et weak lensing) sans tenir compte du SN Ia.

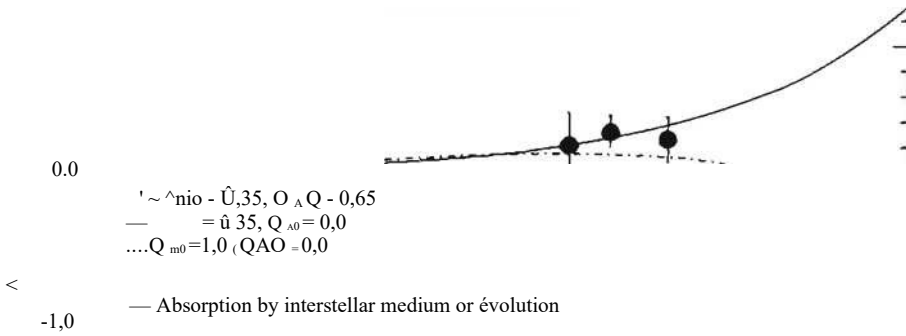


Fig. 4.4 Diagramme de Hubble pour les supernovæ de type Ia comparé à celui d'un Univers vide ($\Omega_m = 0, \Omega_\Lambda = 1$). La mesure du SN Ia à $z = 1,7$ est incompatible avec certains effets astrophysiques qui pourraient mimer une accélération de l'Univers à des redshifts inférieurs. Adapté de [1].

4.1.2.4 Constante cosmologique ou énergie sombre

Les résultats précédents supposent que seules une constante cosmologique et la matière ordinaire dominent. Cependant, tout type de matière avec une équation d'état $w < -1/3$ peut conduire à $\ddot{a} > 0$ [voir (3.94)].

Il est légitime de se demander si l'on peut vérifier à partir des données que la matière responsable de l'accélération de l'Univers est bien une constante cosmologique, c'est à dire une composante d'équation d'état $w = -1$. La figure 4.5 présente les contraintes sur le couple de paramètres (w, Ω_m) pour un Univers plat si w est supposé constant. Pour $\Omega_m = 0.3$ on obtient

$$w < -0,6. \quad (4.4)$$

Les contraintes sur l'équation d'état dépendent des données qui ont été combinées et du paramétrage de l'équation d'état. La figure 4.5 compare les contraintes obtenues en combinant les observations du fond micro-ondes (WMAP), des catalogues de galaxies (SDSS), des supernovæ et de la forêt Lyman- α de diverses manières.

Il est actuellement classique d'appeler *l'énergie sombre* la composante responsable de l'accélération de l'Univers. Cette énergie sombre pourrait être une constante cosmologique mais d'autres candidats existent également (voir le chapitre 12 pour une discussion plus détaillée). La majorité de ces candidats ont une équation d'état dynamique. Les contraintes sur l'équation d'état de l'énergie noire changent très rapidement avec le flux de nouvelles observations. Citons par exemple une *contrainte* [112] sur un paramétrage de la forme $w = w_0 + w_1/(1+z)$; cela mène à

$$w_0 = -0.981^{+0.193}_{-0.193} \quad w_1 = 0.05^{+0.83}_{-0.65} \quad (4.5)$$

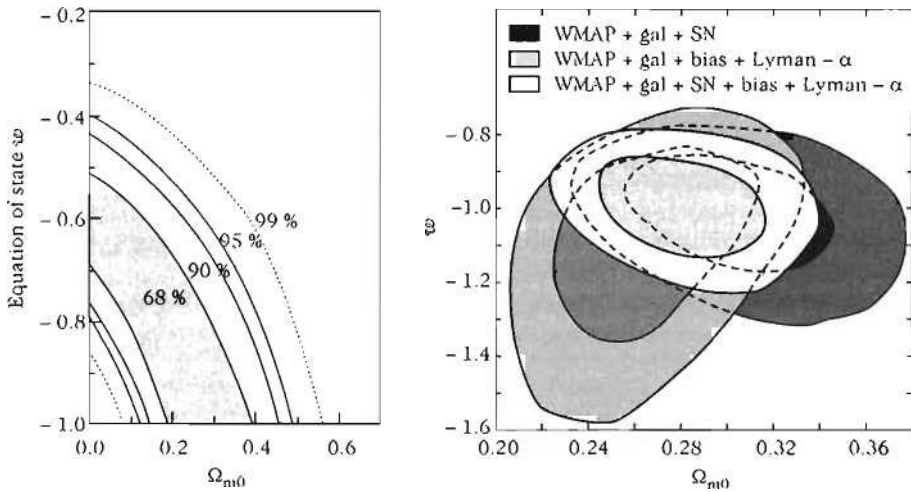


Fig. 4.5 (left): Constraints on a constant équation of state of dark energy as a function of Ω_{m0} for a fiat Universe. Adapted from Ref. [9]. (right): Same thing by combining various sets of observation (contours at 68% and 95%), cosmological microwave background (WMAP), galaxies (SDSS), supernovæ and Lyman- α forest, in different ways. Adapted from Ref. f 12]. at 1 σ . The détermination of the nature of this dark energy is one of the important challenges of modém c. osmology and will be discussed in the final chapters of this book.

4.1.3 L'âge de l'Univers

Une contrainte sur les paramètres cosmologiques peut également être obtenue à partir des mesures de l'âge de l'Univers. Une limite inférieure de cet âge peut alors être fixée, qui devrait être compatible avec l'âge dynamique de l'Univers calculé à partir des équations de Friedmann. Les données des supernovæ impliquent que l'âge dynamique de l'Univers pour un modèle Λ CDM fiduciaire est

$$t_0 = 14,9^{+1.1}_{-1.0} \times 10^9 \text{ ans}, t_0 = 14,2^{+1.0}_{-0.9} \times 10^9 \text{ ans}, (4,6)$$

en utilisant les données, respectivement, de SCP [9] et HZT [10].

4.1.3.1 Les âges de la Voie Lactée

Les objets les plus anciens de la Voie Lactée sont des étoiles ² à faible métallicité et sont situés dans le halo de la Voie Lactée. Il existe trois méthodes pour déterminer l'âge de ces étoiles [13].

1. *Nucléochronologie* ; D'un point de vue conceptuel, il s'agit de la méthode la plus simple, analogue aux méthodes de datation radioactive, et elle représente la manière la plus directe de dater l'Univers.

² Par *métallicité*, on entend ici la teneur en éléments chimiques au-delà de l'hélium-4. Le rapport $[\text{Fe}/\text{H}]$ retrace cette métallicité.

tu . L'âge des étoiles est estimé à partir de l'abondance de noyaux radioactifs à longue

durée de vie pour lesquels une demi-vie est connue (pour plus de détails, voir Réf. [14]). Le radio-isotope ²³²Th (thorium) de période de 14 millions d'années a été utilisé pour dater l'âge des étoiles de la Galaxie (notamment l'étoile CS 22892) mais son abondance n'est réduite que de moitié sur une période égale à l'âge de l'univers. En principe, ²³⁸U est un meilleur indicateur puisque sa demi-vie est de 4,5 millions d'années. L'abondance de cet isotope a été dérivée de l'observation de l'étoile CS31082-0018 [15], $\log(U/H) = -13,7 \pm 0,14$, ce qui correspond à un âge de $(12,5 \pm 3) \times 10^9$ ans.

2. *Refroidissement des naines blanches* : les naines blanches sont l'étape terminale de l'évolution des étoiles de masse inférieure à environ 8M_☉. EN vieillissant, les naines blanches deviennent plus froides et plus sombres. A l'aide d'un modèle de leur refroidissement, on peut calculer leur vitesse de refroidissement, et donc l'âge de l'Univers. Malheureusement, comme elles sont peu brillantes, les naines blanches sont très difficiles à observer si bien que les études se réduisent aux naines blanches au voisinage du système solaire et permettent d'estimer l'âge du disque local à environ $9,8 \times 10^9$ ans.
3. *Séquence principale* : des modèles théoriques d'évolution stellaire permettent de comprendre la position d'une étoile dans le plan température-luminosité. Durant la séquence principale, qui correspond à la partie la plus longue de leur vie, les étoiles brûlent leur hydrogène pour produire de l'hélium. A la fin de cette période, la luminosité de l'étoile augmente et sa température de surface diminue. On peut montrer que la luminosité des étoiles à cette transition de la séquence principale est la grandeur la moins sensible aux erreurs des modèles théoriques et peut être utilisée pour déterminer l'âge des amas globulaires avec une précision de 7 à 10 %. Il faut également déterminer la distance de la grappe qui limite la précision de la méthode (une erreur de 10 % sur la distance se traduit par une erreur de 20 % sur l'âge !). Grâce au satellite Hipparcos, un meilleur calibrage de l'échelle de distance locale a été possible. L'âge des amas globulaires est approximativement de l'ordre de $(11 - 14) \times 10^9$ ans.

Tableau 4.3 Récapitulatif des principales contraintes sur l'âge de l'Univers.

Âge (10 ^{ans})	Melbourne	Référence
15,2 ± 3,7	nucléochronologie (étoile CS 22892)	Snedden <i>et coll.</i> (1996)
12,5 ± 3	nucléochronologie (étoile CS 31082-0018)	Cayrel <i>et coll.</i> (2001)
11,5 ± 1,3	5 méthodes (amas globulaires)	Selon Chaboyer <i>et al.</i> (1999)
11,8 ± 1,2	séquence principale (amas globulaires)	Gratton <i>et coll.</i> (1997)
14 ± 1,2	séquence principale (amas globulaires + binaire)	Pont <i>et coll.</i> (1998)
13,7 ± 0,2	WMAP + structure à grande échelle	Spergel <i>et coll.</i> (2003)

4.1.3.2 Âge de l'Univers

En conclusion, l'âge minimum de notre Univers peut être estimé en précisant les âges des objets les plus anciens de notre Galaxie. Pour obtenir l'âge de l'Univers, il faut également estimer le temps nécessaire à la formation de ces objets. Malheureusement, il n'existe pas de théorie solide

pour le début des processus de formation stellaire. Le début de la formation des étoiles est estimé à $z \sim 5 - 20$, ce qui correspond à une période de $(0,1 - 2) \times 10^9$ ans. Cela nous permet de conclure (voir tableau 4.3) que

$$9.6 \leq \frac{t_u}{10^9 \text{ years}} \leq 15.4. \quad (4-7)$$

4.1.3.3 *Compatibilité entre la constante de Hubble et l'âge de l'Univers*

Après avoir mesuré la constante de Hubble, on peut obtenir à partir de (3.66) l'âge dynamique de l'Univers qui ne dépend que des paramètres cosmologiques Q_{m0} et Q_{AO} (la durée de l'ère de rayonnement étant négligeable).

Pour comprendre si les contraintes sur la constante de Hubble et sur les mesures de l'âge de l'Univers sont compatibles, nous présentons dans un premier temps une comparaison entre les données des supernovæ et le calcul théorique de l'âge dynamique de l'Univers (Fig. 4.6). On compare ensuite H_0 avec $H_0(Sl_{m0}, Q_{AO})$ en supposant que H_0 et t_u sont connus à 10 % près. Ces mesures sont cohérentes si la constante cosmologique ne disparaît pas, comme l'indiquent indépendamment les résultats des supernovæ. Un univers d'Einstein-de Sitter est marginalement exclu (jusqu'à $1,5\%$) par ces mesures.

4.2 La thermodynamique dans un univers en expansion

Les sections précédentes nous ont convaincus que l'Univers est en expansion. Étant donné que le rayonnement s'échelonne sur $a \sim t^2$ tandis que la matière sans pression s'échelonne sur $a \sim t^3$, l'Univers était dominé par le rayonnement dans le passé pour des redshifts supérieurs à

$$z_{eq} \sim 3612, \quad (4.8)$$

obtenu en assimilant l'énergie de matière et de rayonnement se densifie et où $z_{eq} = T_{CMB}/2725K$ [voir (4.137) ci-dessous], puisque l'échelle de température est de $(1+z)$, la température à laquelle les densités de matière et de rayonnement étaient égales est $T_{eq} = T_{CMB}(1+z_{eq})$ qui est d'ordre

$$T_{eq} \sim 5,65 \times 10^4 \text{ K} = 6,56 \times 10^4 \text{ K}. \quad (4,9)$$

Au-dessus de cette énergie, le contenu matière de l'Univers se présente sous une forme très différente de celle d'aujourd'hui. En particulier, lorsque la température T devient supérieure à deux fois la masse au repos m d'une particule chargée, l'énergie d'un photon est suffisamment grande pour produire des paires particule-antiparticule. Ainsi, lorsque $T \sim m_e$, des électrons et des positrons étaient présents dans l'Univers, de sorte que le contenu particulaire de l'Univers change au cours de son évolution, tandis qu'il se refroidit.

Ici, nous décrivons cette phase et nous concentrons d'abord sur la distribution des particules à l'équilibre, puis sur certains processus hors équilibre conduisant, par exemple, à la production de ressources thermiques.

4.2.1 Thermodynamique d'équilibre

Pour une description de la thermodynamique dans le contexte relativiste et en cosmologie, on peut se référer aux Refs. [16-18].

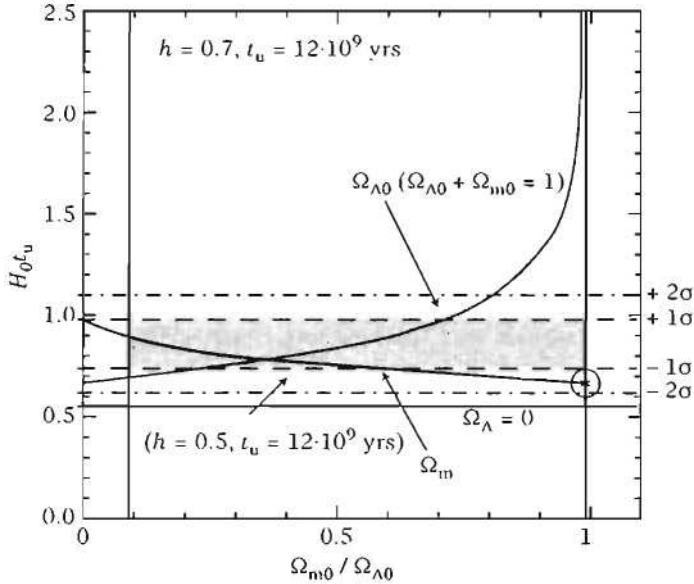


Fig. 4.6 Comparison between the constraints on the product of the Hubble constant and the age of the Universe, $H_0 t_u$, and the product of the Hubble constant and the dynamical age of the Universe, $H_0 t_d$. The latter depends on the cosmological parameters. We have fixed $h = 0.7$ and $t_u = 12 \times 10^9$ years. The dark curve represents a flat Universe ($\Omega_{m0} + \Omega_{\Lambda0} = 1$) in which case the abscissa is $\Omega_{\Lambda0}$. The light curve is for a Universe with no cosmological constant ($\Omega_{\Lambda0} = 0$), for which the abscissa is then Ω_{m0} . The grey regions indicate the areas at 1 and 2σ for $H_0 t_u$ and the plain horizontal line is the case where $h = 0.5$. The circle corresponds to an Einstein-de Sitter Universe for which $H_0 t_u = 2/3$. From Ref. [6].

4.2.1.1 Fonctions de distribution et grandeurs thermodynamiques

Pour décrire les processus physiques à l'ère dominée par les radiations, il convient de déterminer la fonction de distribution des particules présentes dans l'Univers.

Fonctions de répartition

Les interactions entre particules sont principalement caractérisées par une vitesse de réaction T . Si cette vitesse de réaction est bien supérieure au taux d'expansion de Hubble, alors elle peut maintenir ces particules en équilibre thermodynamique à une température T . Les particules peuvent ainsi être traitées comme des particules de Fermi-Dirac parfaites, et gaz Bose-Einstein avec distribution¹¹

$$F_i(E, T) = \frac{g_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{\exp[(E - \mu_i)/T_i(t)] \pm 1} \equiv \frac{g_i}{(2\pi)^3} f_i(E, T), \quad (4.10)$$

où g_i est le facteur de dégénérescence, μ_i est le potentiel chimique et $P^2 = p^2 - m^2$. La

¹¹La distribution dépend a priori de fonctions (x, t) et (p, E) mais l'hypothèse d'homogénéité implique qu'elle ne dépend pas de x et l'isotropie implique qu'elle est fonction de $p^2 = p^2$. Ainsi, il découle du principe cosmologique que $f(x, t, p, E) = f(E, t) = f(E, T(t))$.

normalisation de p est telle que $\int f_i = 1$ pour la densité maximale dans l'espace des phases autorisée par le principe de Pauli pour un fermion. T_i est la température associée à l'espèce donnée et, par symétrie, elle est fonction de t seul. Les espèces en interaction ont la

même température. Parmi ces particules, l'Univers contient un rayonnement électrodynamique à spectre de corps noir [voir Section 4.4] à une température de 2,725 K aujourd'hui. Toute espèce interagissant avec des photons aura donc la même température que ces photons tant que $\gg H$. La température des photons $T_\gamma = T$ sera alors appelée *température de l'Univers*.

Si la section efficace se comporte comme $\sigma \sim E^{-n} T^{-n}$ (par exemple, $n = 2$ pour les interactions électrofaibles), alors la vitesse de réaction se comporte comme $\Gamma \sim n\sigma \sim T^{-n+3}$; la constante de Hubble se comporte comme $H \sim T^{-2}$ dans la période de rayonnement. Ainsi, si $n + 1 > 0$, il y aura toujours une température en dessous de laquelle l'interaction se découplera pendant que l'Univers se refroidit. L'interaction n'est alors plus efficace; on dit qu'il est *gelé* et qu'il ne peut plus maintenir l'équilibre de l'espèce donnée avec les autres composants. Cette propriété est à l'origine de l'histoire thermique de l'Univers et de l'existence des reliefs. Ce mécanisme, au cours duquel une interaction ne peut plus maintenir l'équilibre entre diverses particules à cause de l'expansion cosmique, est appelé *découplage*. Une particule sera dite couplée si $\Gamma > H$ et découplée si $\Gamma < H$. Ce critère de comparaison de la vitesse de réaction et de la vitesse H est simple; il donne souvent un ordre de grandeur correct, mais une description plus détaillée du découplage devrait s'appuyer sur une étude microscopique de l'évolution de la fonction de distribution. À titre d'exemple concret, considérons la diffusion Compton. Sa vitesse de réaction, $\Gamma_{\text{Compton}} =$ est de l'ordre

$\Gamma_{\text{Compton}} \sim 1.4 \times 10^{-3} / T_0$ aujourd'hui, ce qui signifie que, statistiquement, un seul photon sur 700 interagit avec un électron au temps de Hubble aujourd'hui. Cependant, à un redshift $z \sim 10^3$, la densité électronique est 10^3 fois plus grande et le taux d'expansion de Hubble est de l'ordre $H \sim (1+z)^{-2} \sim 2 \times 10^{-4} / T_0$ de sorte que $\Gamma_{\text{Compton}} \sim 80 H$. Cela signifie que,

statistiquement, à un redshift $z \sim 10^3$, un photon interagit avec un électron environ 80 fois en un temps de Hubble. Cela illustre qu'avec le temps, les densités et les températures augmentent et que les interactions deviennent de plus en plus importantes.

Notons que si l'équilibre thermique peut être maintenu par des interactions au sein d'un plasma cosmique, par causalité, ces interactions ne peuvent pas établir un tel équilibre entre deux régions causalement déconnectées qui auraient des températures initiales différentes. L'hypothèse de l'homogénéité de l'espace implique que l'Univers soit initialement en équilibre thermique. La justification de cet état sera discutée au chapitre 8.

Quantifications thermodynamiques

La fonction de distribution (4.10) peut être utilisée pour définir des quantificateurs macroscopiques tels que la densité numérique des particules, n , la densité d'énergie, ρ et la pression, P , pour chaque espèce i comme ⁴

⁴Since $E^2 - m^2 = p^2$ implies that $p dp = E dE$ and, because of isotropy, $d^3p = 4\pi p^2 dp = 4\pi \sqrt{E^2 - m^2} E dE$.

$$n_i(t) = \int F_i(p, T) d^3p = \frac{g_i}{2\pi^2} \int_m^\infty \frac{\sqrt{E^2 - m^2} E dE}{\exp[(E - \mu_i)/T] \pm 1}, \quad (4.11)$$

$$\rho_i(t) = \int F_i(p, T) E(p) d^3p = \frac{g_i}{2\pi^2} \int_m^\infty \frac{\sqrt{E^2 - m^2} E^2 dE}{\exp[(E - \mu_i)/T] \pm 1}, \quad (4.12)$$

$$P_i(t) = \int F_i(p, T) \frac{p^2}{3E} d^3p = \frac{g_i}{6\pi^2} \int_m^\infty \frac{(E^2 - m^2)^{3/2} dE}{\exp[(E - \mu_i)/T] \pm 1}. \quad (4.13)$$

These three quantities can be expressed in terms of the integrals

$$I_i^{(m,n)}(x_i, y_i) \equiv \int_{x_i}^\infty \frac{u^m (u^2 - x_i^2)^{n/2} du}{\exp[(u - y_i)] \pm 1}, \quad (4.14)$$

with

$$x_i \equiv \frac{m_i}{T}, \quad y_i \equiv \frac{\mu_i}{T}, \quad (4.15)$$

as

$$n_i = \frac{g_i}{2\pi^2} T^3 I_i^{(1,1)}, \quad \rho_i = \frac{g_i}{2\pi^2} T^4 I_i^{(2,1)}, \quad P_i = \frac{g_i}{6\pi^2} T^4 I_i^{(0,3)}. \quad (4.16)$$

Le tableau 4.4 résume l'expression de ces quantités dans diverses limites pour les fermions (F) et les bosons (B), où $\zeta(3) \sim 1,202$ est la valeur de la fonction zêta de Riemann à 3.

Tableau 4.4 Récapitulatif des principales limites des grandeurs thermodynamiques (4.11)-(4.13) pour les fermions (F) et les bosons (B).

Particules	Lirait	n	p	P
$T \ll m, p$	B	$p(\zeta(3)/7r^2)T^3$	$(\pi^2/30)^{pT^1}$	$p/3$
	F	g_{MWW}^3	$(7\pi^2/8 \times 30)9T^{1/2}$	$p/3$
	F	$gp^3 / 6\pi^2$	$pp^3/8ir^2$	$p/3$
$T \gg m, p < -T$	B,F	$(p/7r^2)e^{m/7}T^3$	$(3p/7r^2)e^{m/7}r^{1/2}$	$Z > 3$
$T \lesssim m$	B,F	$\frac{1}{9}(mT/27r)^{3/2}e^{(M/m)^{3/2}}$	$(m + 3T/2)n$	NT

4.2.1.2 Nombre de degrés relativistes de liberté

La densité de rayonnement à une température T donnée peut être calculée à partir de ces expressions (voir tableau 4.4).

$$\rho_l(T) = g_l(T) \langle T^4 \rangle. \quad (4.17)$$

g_l représente le nombre effectif de degrés relativistes de liberté à cette température,

$1 = \text{bosons}$

$2 = \text{fermions}$

$1/2$

Le facteur $7/8$ provient de la différence entre les distributions de Fermi et de Bose. Dans ce régime, la matière est dominée par le rayonnement et la courbure est négligeable, de sorte que l'équation de Friedmann est de la forme

$$(419)$$

Numériquement, cela revient à

$$(4.20)$$

ou équivalent.

$$T^2 \quad (4.21)$$

obtenu en intégrant $H = -T/T$.

4.2.1.3 *Cheminai poùentiaJ et asymétrie particule-antipartide*

Les processus de diffusion inélastique tels que Brehmsstrahlung $e + p \longleftrightarrow e + p + \gamma$ impliquent que le nombre de photons n'est pas conservé et que leur potentiel chimique devrait donc disparaître

$$= 0. \quad (4.22)$$

Cela implique que les photons doivent avoir une distribution de Planck.

Toute particule A maintenue en équilibre chimique avec son antiparticule par une réaction de la forme $A + \bar{A} \longleftrightarrow \gamma + \gamma$ doit alors satisfaire la contrainte

$$\mu_A + \mu_{\bar{A}} = 0 \quad (4.23)$$

As long as $T \gg 1.4$, using (4.11), this implies an asymmetry $3''$

$$\frac{n - \bar{n}}{n + \bar{n}} \approx \frac{3}{2} \quad (4.24)$$

entre particules et antiparticules. À des températures plus basses ($T \sim m$), cette asymétrie est supprimée de manière exponentielle

$$\frac{n - \bar{n}}{n + \bar{n}} \sim e^{-m/T} \quad (4.25)$$

Lorsque T devient plus petit que A et $\bar{A}$ s'annihilent et seul ce petit excès survit. C'est par exemple le cas des électrons.

A noter que la neutralité électrique de l'Univers implique que le nombre de protons n_p est égal à $n_{\bar{p}} + n_e$. En utilisant la contrainte $n_p/n_{\gamma} \sim 5 \times 10^{-10}$ [voir Section 4.3.. (4.142)], nous obtenons

$$\frac{n_p}{n_{\gamma}} \approx \frac{7T^2}{6((3) T)} p_{\&} \quad (4.26)$$

so that $1.34/Q/T \approx 6.5 \times 10^{-10}$. The chemical potential of the électrons and positrons can thus be neglected.

4.2.1.4 Entropie

Pour suivre l'évolution des processus, il est convergent d'avoir conservé des quantités telles que l'entropie.

Combinant l'équation de conservation (3.27), réécrite sous la forme $d(\rho a^3) = -P da^3$, et la dérivée de la pression (4.13) par rapport à la température,

$$\frac{dP}{dT} = \frac{P + \rho}{T} \quad \text{ou} \quad \frac{dP}{P} = \frac{P + \rho}{T} \frac{dT}{T}$$

on obtient que la quantité

$$S = -k_B \ln \Omega \quad (4.27)$$

satisfait l'équation $d(S a^3) = 0$. Ainsi, le produit $S a^3$ est constant (i) tant que la matière n'est ni détruite ni créée, puisque alors $n a^3$ est constant, ou (ii) pour la matière relativiste non dégénérée, $p/T \ll 1$. On a donc en déduire que dans les cas pertinents pour la cosmologie,

Pour interpréter cette quantité, considérons l'expression (4.27) qui implique que $T d(S a^3) \sim d(\rho a^3) + P da^3$, dans la limite $p/T \ll 1$. On reconnaît $S = s a^3$ comme l'entropie et donc s est la densité d'entropie. Par conséquent, (4.28) implique que $s \propto a^{-3}$ tant que $p/T \ll 1$. Ensuite, en utilisant (4.27), l'entropie peut être exprimée comme

$$s = \frac{2\pi^2}{45} q_* T^3, \quad (4.29)$$

where q_* is defined by

$$q_*(T) = \sum_{i=\text{bosons}} g_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^3 + \frac{7}{8} \sum_{i=\text{fermions}} g_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^3 \quad (4.30)$$

Si tous les particules relativistes sont à la même température, $T_i = T$, alors $q_* = g_*$. Notez également que $s = q_* T^3 / 45 \approx 1.8 \times 10^{-37} \text{ g cm}^{-3}$, de sorte que la densité du nombre de photons donne une mesure de l'entropie.

³ (dans le cas d'un potentiel chimique en voie de disparition, cette expression peut être facilement dérivée en partant de l'expression générale de l'entropie d'un système comme $TdS = d\rho + PdV$. Si nous choisissons T et V comme variables pour décrire le potentiel thermodynamique état du système alors, puisqu'ils sont des quantités intensives, P et ρ sont des fonctions de T seul ; $P(T)$ et $\rho(T)$. Il s'ensuit que $dE = d(\rho V) = \rho dV + V(d\rho/dT)dT$.

$$dS = \frac{\rho + P}{T} dV + \frac{V}{T} \frac{d\rho}{dT} dT.$$

Ainsi,

On en déduit que $(dS/cV) \sim (P + \rho)/T$ et $(dS/dT) = (V/T) (d\rho/dT)$. La condition d'intégrabilité implique alors que $dP/dT \sim (P + \rho)/T$. En branchant ces expressions dans dS on en déduit que

$$dS = d \left[\frac{V}{T} (P + \rho) \right]$$

d'où on obtient l'expression de l'entropie par unité de volume constante additive.

⁶ En partant de $TdS = dE + PdV = \rho dV + V(d\rho/dT)dT$, de sorte que $E \propto a^3$, et $S \propto S a^3$ on en déduit que $Td(S a^3) = d(\rho a^3) + P da^3$. En tenant compte du fait que les deux premiers termes de la droite s'annulent, on en déduit l'équation d'évolution de $S a^3$.

Le nombre de particules dans un volume donné, $N \propto n a^3$ est constant si aucune matière n'est créée ou annihilée. La relation (4.28) implique donc que

$$Y_i = \frac{N_i}{s} \quad (4.31)$$

représente le nombre de particules par volume mobile. Pour les particules relativistes, cette quantité reste constante au cours de l'évolution. Il peut être facilement calculé dans deux cas limites

$$Y = \frac{45}{2\pi^4} \zeta(3) \frac{g_*}{q_*} \quad \text{if } T \gg m, \quad (4.32)$$

$$= \frac{45}{4\sqrt{2}\pi^5} \frac{g_*}{q_*} \left(\frac{m}{T}\right)^{3/2} \exp \quad \text{if } T \sim m. \quad (4.33)$$

4.2.1.5 Espèces découplées

Si à un instant donné, le taux d'interaction n'est plus assez élevé pour maintenir l'équilibre thermodynamique de l'espèce i , c'est à dire si $\Gamma_i < H$, alors cette espèce évolue indépendamment des autres. Si cette espèce était en équilibre thermodynamique avant le découplage, alors sa fonction de distribution au moment du découplage, t_D , est

$$f_i(p, t_D) = \frac{1}{\exp[(E - \mu_i)/T_i(t_D)] \pm 1} \quad (4.34)$$

Après découplage, les particules se propagent librement et la forme de la fonction de distribution est conservée. Seul l'élan est décalé vers le rouge par l'expansion comme $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(t_D) a(t_D)/a(t)$. Il s'ensuit que la fonction de distribution à tout $t > t_D$ est donnée par

$$A(p, t) = f_i \left[\frac{a(t_D)}{a(t)} p, t_D \right] \quad (4.35)$$

Ainsi, si une espèce était en équilibre thermodynamique à un moment donné de l'histoire de l'Univers, on peut déterminer sa répartition à tout moment.

Si le découplage s'est produit lorsque la particule était relativiste, ($T \gg m$, $p \gg m$), alors la fonction de distribution (4.35) prend la forme simple

$$f_i(p, t > t_D) = \frac{1}{\exp[E/T_i(t)] \pm 1}, \quad T_i(t) = T_D \frac{a_D}{a(t)}, \quad (4.36)$$

où $T_D = 7 \cdot 10^9$ (K). La température de cette espèce découplée diminue toujours en tant que a^{-1} et son entropie S_i est conservée séparément. Si cette particule devient non relativiste après INR, c'est-à-dire on a $E(t) \sim m$ pour tout $t > t_{NR}$ mais la fonction de distribution garde la forme (4.36).

Si le découplage s'est produit lorsque la particule était non relativiste ($T \sim m$), alors $E \sim m + p^2/2m$ et la fonction de distribution est donnée par

$$f_i(p, t > t_D) = e^{-(m - \mu_i)/T_D} e^{-p^2/2mT_i(t)}, \quad T_i(t) = T_D \left[\frac{a_D}{a(t)} \right]^2. \quad (4.37)$$

Ainsi, tout se passe comme si les particules avaient un potentiel chimique effectif, $\mu(t) = m + m(T(t)/T_0)$. On obtient alors

$$\rho_i = n_i m_i, \quad n_i \simeq g_i \left(\frac{m T_D}{2\pi} \right)^{3/2} \left(\frac{a_D}{a} \right)^3 e^{-m/T_D} \quad (4.38)$$

4.2.1.6 Températures et leur évolution

Température de l'Univers

Puisque l'entropie totale est constante, $g^*(T) T^3 a^3$ reste constant au cours de l'évolution de l'Univers. Si, de plus, une espèce est découplée du plasma cosmique en température alors l'entropie de cette espèce se conserve d'elle-même de sorte que

$$S = \frac{2\pi^2}{45} q_i(T) T^3 a^3 \quad \text{and} \quad S_i = \frac{2\pi^2}{45} q_i(T_i) T_i^3 a^3 \quad (4.39)$$

sont tous deux constants. L'entropie, $S - S_i = (27\pi^2/45) g_\gamma(T) T^3 a^3$, des particules en équilibre thermique avec les photons, est donc également constant. Nous concluons donc que la température de l'Univers varie selon

$$T \propto a^{-1/3} \quad (4.40)$$

où q_γ est donné par la relation (4.30) mais en additionnant uniquement les particules relatives qui sont en équilibre thermique avec les photons.

Température d'une espèce découplée

Tant que le nombre d'espèces relativistes ne varie pas, la température diminue comme a^{-1} . Lorsqu'une espèce devient non relativiste, son entropie est transférée aux autres particules relativistes restant en équilibre thermique et voient donc leur température augmenter brusquement (q_i est une quantité décroissante) au fur et à mesure

$$T(+)=T(-)^{1/3} \quad (4.41)$$

où $+$ et $-$ font respectivement référence aux grandeurs évaluées après et avant le découplage. Au moment du découplage $T - T_i = T_0$ de sorte qu'en comparant les grandeurs (4.39) aux températures T_0 et $T < T_0$, on obtient que la température des espèces découplées est liée à celle de l'Univers par

$$\left[\frac{q_i(T_D)}{q_i(T)} \frac{q_\gamma(T)}{q_\gamma(T_D)} \right]^{1/3} \quad (4.42)$$

Cette expression généralise (4.36) au cas où $q_i(T)$ n'est pas constant. En particulier, $q_i(T)$ peut varier si l'espèce i a une nouvelle interaction lui permettant de s'annihiler pour produire une autre particule n'interagissant pas avec le plasma cosmique.

4.2.1.7 Les neutrinos comme exemple

Les neutrinos sont en équilibre avec le plasma cosmique tant que les réactions $\nu + i \rightleftharpoons e + T$ et $\nu + e \rightleftharpoons \nu + e$ peuvent les maintenir couplés. Les neutrinos de silice ne sont pas chargés, ils n'interagissent pas directement avec les photons.

La section efficace des interactions faibles est donnée par $\sigma \sim G^2 E^2$ tant que l'énergie des neutrinos est comprise dans la plage $m_e \leq E \leq m_j$. Le taux d'interaction est donc de l'ordre de $\Gamma = n \langle \sigma v \rangle \sim G^2 T^5$. On obtient que

$$\tau \gg \left(\frac{h}{kT} \right)^3. \quad (4.43)$$

where we have used (4.20). Thus, close to $T_Q \sim 1$ MeV, neutrinos decouple from the cosmic plasma. For $T < T_b$, the neutrino temperature decreases as $T_\nu \propto a^{-1}$ and remains equal to the photon temperature.

Slightly after decoupling, the temperature becomes smaller than m_e . Between T_0 and $T = m_e$ there are 4 fermionic states (e^-, e^+ , each having $g_e = 2$) and 2 bosonic states (photons with $g_\gamma = 2$) in thermal equilibrium with the photons. We thus have that

$$m_e = -2x^2 + \frac{7}{8} = \frac{11}{2} q_\gamma(T)$$

Pour $T < m_e$ seuls les photons contribuent à q_γ et donc

$$q_\gamma(T < m_e) = 2. \quad (4.45)$$

La conservation de l'entropie implique qu'après $e^+ - e^-$ annihilation, les températures des neutrinos et des photons sont liées par

$$(4.46)$$

Ainsi, la température de l'Univers est augmentée d'environ 40% par rapport à la température des neutrinos lors de l'annihilation. Puisque $n_\nu = (3/11)n_\gamma$ il doit exister un fond cosmique de neutrinos d'une densité de 112 neutrinos par centimètre cube et par famille, avec une température d'environ 1,95 K. La densité énergétique de ces neutrinos, aussi longtemps comme ils sont relativistes, soit $\rho_\nu = (7/8)(4/11) \rho_\gamma$ par famille de neutrinos. En utilisant la valeur (4.141) de ρ_γ , nous concluons qu'aujourd'hui

$$\rho_\nu / c^2 = 1.68 \times 10^{-5} \text{ g cm}^{-3} \quad (4.47)$$

4.2.1.8 Number of relativistic degrees of freedom

The $e^+ - e^-$ annihilation is the last annihilation to happen, so that knowing T_L/T_γ gives the values of g^* and g^* today

KF

si leur masse est inférieure à 10^{-4} eV .

$$n_{\nu,0} = 2 + 3x_2 x_2 = 3.36, \quad n_{\nu,0-2} = 3x^2 x_2$$

s'il existe 3 familles de neutrinos sans masse.

Les fonctions $g^*(T)$ et $g_{**}(T)$ dépendent du contenu en particules de notre Univers. A titre d'exemple, le tableau 4.5 et la figure 4.7 résument leur évolution dans le contexte du modèle standard de physique des particules, discuté au chapitre 2.

Tableau 4.5 Contenu en particules de l'Univers en fonction de la température dans le contexte du modèle standard de physique des particules. $T^{qh} \sim 150\text{--}400$ MeV caractérise la transition de phase quark-hadron, que l'on suppose adiabatique. L'histoire thermodynamique de cette transition n'est pas encore bien comprise. Ce tableau suppose également que le boson de Higgs a une masse supérieure à la masse des bosons W^* et du quark top (f). Les trois dernières lignes de ce tableau ne sont pas certaines puisque le secteur de Higgs et la transition électrofaible ne sont pas bien compris. À des températures plus élevées, g dépend fortement du modèle théorique des interactions fondamentales. Par exemple, pour un modèle de grande unification SU(5) minimal, $g_{*}(T > T_{GUT}) = 647/4$ et dans le cas du modèle supersymétrique minimal, $g_{*}(T < T_{SUSY}) = 915/4$ puisque le nombre de degrés de liberté est presque doublé.

T	(GeV) Particules relativistes g		
$< m_{oi}$	$0,511 \times 10^{-3}$	7 (+ 3 i/ découplés)	2
$m_c - T_{bfo}$	$(2 - 4) \times 10^{-3}$	+e*	11/2
$- m_{\nu}$	0,106	ν commencent à	43/4
$m_{\mu} - m_n$	0,135	$\pm$	57/4
$m'' - T^{qh}$		+ $7T^+, 7T^-$	69/4
$T^{qh} - m_{\nu}$	0,194	7, 3p, $e_{\pm}, p_{\pm}$	205/4
		$u, \bar{u}, d, \bar{d}, 8 g$	
$m_{\nu} - m_c$	$1,27 \pm 0,05$	$\pm s, s$	247/4
$m_c - 772 \tau$	1,78	$\pm c, c$	289/4
$m_t - m_b$	$4,25 \pm 0,10$	+ $T^* =$	303/4
$m_{rib} \sim m_{riw}$	$80,3 \pm 0,3$	$\pm b, b$	345/4
$m_w -$	$180 \pm L2$	+ $V1/\pm, Z^0$	381/4
$m_t - m_H(y)$		+ j_e, t	423/4
$-T_c$	300 (?)	$\pm H^0$	427/4

4.2.2 Thermodynamique hors équilibre

L'évolution d'une espèce découplée peut ainsi être facilement décrite. Cependant, la description du découplage, ou du gel d'une interaction, est un problème plus complexe qui nécessite d'aller au-delà de la description de l'équilibre développée précédemment.

-----1--ri 11 irq ---1--ii ri ni| ----1-ii 11 ni| -----1--je -----je imi| -----r--je -----je 11 iii| 1--je r11 iii| 1-je je 11111

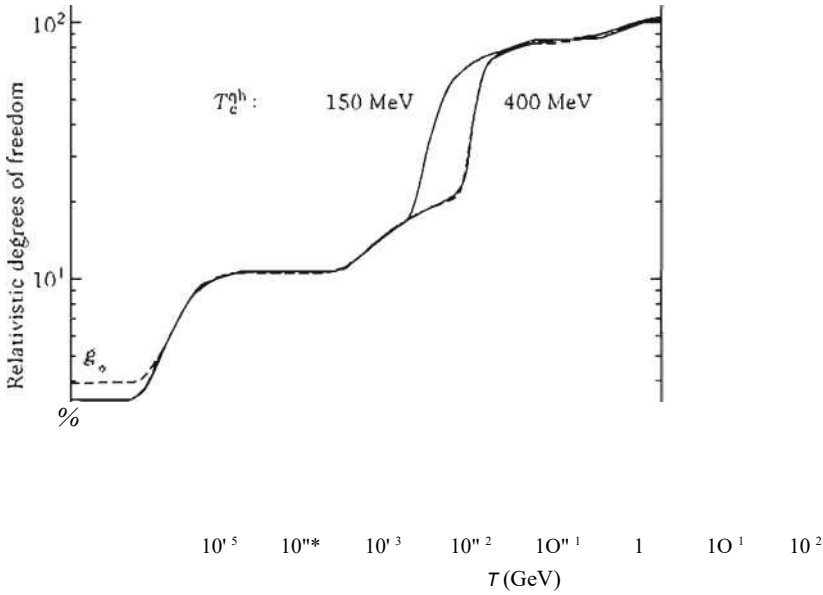


Fig. 4.7 Evolution des fonctions p^* et ζ^+ en fonction de la température dans le modèle standard de physique des particules $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ avec deux hypothèses concernant la température critique de la transition quark-hadron, ■

4.2.2.1 Équation de Boltzmann

Evolution de la fonction de distribution

L'évolution de la fonction de distribution est obtenue à partir de l'équation de Boltzmann

$$r[\cdot] = C[\cdot].$$

$$(4^{49})$$

où C décrit les collisions et $L = d/ds$ est l'opérateur de Liouville, avec s la longueur le long d'une ligne d'univers. L'opérateur L est fonction de huit variables prenant la forme explicite

$$= \quad (4,50)$$

Dans un espace-temps homogène et isotrope, f n'est fonction que de l'énergie et du temps, $f(E, t)$, de sorte que

$$= E \wedge \tilde{t} \sim H r^{>2} d\tilde{E}' \quad (4,51)$$

En utilisant la définition (4.11) de la densité des particules, et en intégrant cette équation par rapport à l'impulsion p , on obtient¹²

¹²Afin d'évaluer le deuxième terme de (4.51), nous utilisons que

$$\dot{n}_i + 3Hn_i = C_i, \quad C_i \sim \langle \sigma_i J \rangle \quad (4.52)$$

La partie difficile réside dans la modélisation et l'évaluation du terme de collision. On se restreint ici au cas simple d'une interaction de la forme

$$i + j \longleftrightarrow k + l, \quad (4.53)$$

avec un. Signe H- pour les bosons et

for which the collision term can be decomposed as $C_z = C_{ij \rightarrow kl} - C_{ij \leftarrow kl}$ with

$$C_{ij \rightarrow kl} = (2\pi)^4 \int \frac{g_i d^4 p_i}{(2\pi)^3} \delta(E_i - p_i^2 - m_i^2) \dots \frac{g_l d^4 p_l}{(2\pi)^3} \delta(E_l - p_l^2 - m_l^2) \\ \times \delta^{(4)}(p_i + p_j - p_k - p_l) |\mathcal{M}|_{ij \rightarrow kl}^2 f_i f_j (1 \pm f_k)(1 \pm f_l), \quad (4.54)$$

signe a - pour les fermions. $|\mathcal{M}|_{ij \rightarrow kl}^2$ sont les éléments de la matrice décrivant l'interaction. La fonction Dirac delta impose la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie. Cette forme montre également que la probabilité que i disparaisse est proportionnelle à $f_i f_j$, c'est-à-dire à peu près à la densité des espèces en interaction. ⁸ Les facteurs $(1 \pm f_h)$ sont issus de la mécanique quantique et sont liés au principe d'exclusion de Pauli pour les fermions et à l'émission stinée pour les bosons.

Si l'invariance CP est vraie, comme nous le supposons ici, alors elle implique un unique

élément de matrice, $|\mathcal{M}|^2$, déterminé par le processus physique. En effet, cette invariance implique que le processus que nous considérons est réversible et donc que $i + j \rightarrow k + l$ et $k + l \rightarrow i + j$ ont les mêmes éléments matriciels. Il s'ensuit que

$$C_i = \dots \quad (4.55)$$

L'équation (4.52) fait donc intervenir trois sources d'évolution pour la densité numérique n_i , à savoir la dilution ($3Hn_i$), la création ($C_i = \dots$) et la destruction ($C_i = -\dots$).

Evolution de la densité des particules

Dans des situations cosmologiquement intéressantes, $E \gg T$. Les effets quantiques peuvent ainsi être négligés et $1 \pm f \sim 1$. L'équation (4.52) prend alors la forme

$$\int \frac{p^2}{E} \frac{\partial f}{\partial E} d^3 p = -3 \int f d^3 p$$

en intégrant par parties.

⁸ Pour cette raison, on peut se décomposer comme —. Puisque C_f a des dimensions d'un volume divisé par un temps, on peut l'interpréter comme la section efficace moyenne multipliée par la vitesse relative des particules en interaction, soit $\langle \sigma v \rangle$. $\langle \sigma v \rangle$ définit la vitesse de réaction $\langle \sigma v \rangle$ d'ici là (4.52) prend la forme

$$C_i = \dots$$

$$\dot{n}_i + 3Hn_i = \frac{g_i \cdots g_l}{(2\pi)^8} \int \frac{d^3 p_i}{2E_i} \cdots \frac{d^3 p_l}{2E_l} \delta^{(4)}(p_i + p_j - p_k - p_l) |\mathcal{M}|^2 (f_k f_l - f_i f_j). \quad (4.56)$$

Dans cette limite, les fonctions de répartition sont de la forme $f \propto \exp[-(E - \mu)/T]$ de sorte que la densité des particules (4.11) peut s'exprimer en fonction de celle en $p = 0$ comme

$$n_i = e^{\mu_i/T} n, \quad (4.57)$$

De plus, la conservation de l'énergie implique que $E_k + E_l = E_i + E_j$ tel que le terme $f_k f_l - f_i f_j$ prend la forme

L'équation de Boltzmann (4.56) peut donc s'écrire

$$(4.58)$$

où (cru) est défini comme

$$d^3 n, \quad + p_j \sim p_k - p_l) |\mathcal{Ad}|^2 \quad \frac{e^{-(E_i + E_j)/T}}{(2\pi)^8} \quad (4.59)$$

Cette équation est très générale, mais pour aller plus loin il faudrait connaître la forme de l'élément $|\mathcal{Ad}|$. Notons simplement que lorsque $n_j \ll n$, on récupère le fait que (4.58) ne peut être satisfait que si le terme entre parenthèses s'annule, c'est à dire si

$$\frac{T U n_j}{n_i n_j} \hat{n}_i \hat{n}_j \leq \Rightarrow p_i + p_j = p_k + p_l \quad (4.60)$$

Le Système est alors en équilibre chimique. Cette égalité est rompue dès que le système est en équilibre.

4.2.2.2 Interactions gelées et particules de repos

Une particule massive X est en équilibre thermodynamique avec son antiparticule $\bar{X}$ pour des températures supérieures à sa masse. En supposant que cette particule soit stable, alors sa densité ne peut être modifiée que par annihilation ou annihilation inverse.

$$X + \bar{X} \longleftrightarrow l + \bar{l}.$$

Si cette particule était restée en équilibre thermodynamique jusqu'à aujourd'hui, sa densité serait liée. $n \propto \exp(-m/T)$ serait tout à fait négligeable. La densité de relief de cette particule massive, c'est à dire la densité résiduelle une fois que l'annihilation n'est plus efficace, sera en réalité plus importante puisque, dans un espace en expansion, l'annihilation ne peut pas maintenir les particules en équilibre pendant toute l'histoire de l'Univers. Cette particule est généralement appelée une *reli*.

Pour évaluer le facteur $(f_l/x \sim f_l f_l Y)$, notons que l et l sont en équilibre thermique de sorte que, après avoir négligé leurs potentiels chimiques, $f_l = \exp(-E_l/T)$ et $f_{\bar{l}} = \exp(-E_{\bar{l}}/T)$. La conservation de l'énergie impose $E_x + E_{\bar{x}} = E_l + E_{\bar{l}}$, de sorte que

$$f_l f_{\bar{l}} = \exp\left[-\frac{(E_x + E_{\bar{x}})}{T}\right] = f_x f_{\bar{x}}$$

Le Boltzmann (4.58) prend désormais la forme simplifiée (intégrée)

$$n_x - 3Hn_x = -\langle \sigma v \rangle (n_x^2 - \bar{n}_x^2), \quad (4.61)$$

où $\langle \sigma v \rangle$ est défini par (4.59). La conservation de l'entropie implique que $n_x + 3Hn_x = sY_x$, où $Y_x = n_x/s$ est le nombre de X particules par volume comobile, de sorte que (4.61) peut s'écrire

$$Y_x = -\langle \sigma v \rangle s (Y_x - \bar{Y}_x). \quad (4.62)$$

Utiliser la variable x [voir (4.15) pour sa définition] et du fait que $dx/dt = Hx$, cette équation peut être réécrite comme

$$\frac{dY_x}{dx} = -\langle \sigma v \rangle \frac{s}{Hx} (Y_x^2 - \bar{Y}_x^2). \quad (4.6)$$

De plus, $s \propto x^{-3}$, so that introducing $\Delta \equiv Y_x - \bar{Y}_x$, and expressing $\bar{Y}_x$ in terms of Δ and Y_x , we get

$$\frac{d\Delta}{dx} = -\frac{d\bar{Y}_x}{dx} - \lambda x^{-2} \Delta (\Delta + 2\bar{Y}_x), \quad (4.6)$$

with

$$\lambda = \langle \sigma v \rangle \sqrt{\frac{\pi}{45}} \frac{q_*}{g_*^{1/2}} m M_P. \quad (4.6)$$

To go further, we need the form of $\langle \sigma v \rangle$ and the value of $\bar{Y}_x$. We illustrate the mechanism in the next section.

4.2.3 Two limiting cases

4.2.3.1 Cold relics

For a cold relic, the decoupling occurs when the particle is non relativistic. Using our previous results to express n_X [(4.11)] and s [(4.29)], we get that

$$\bar{Y}_x = \frac{45}{2\pi^4} \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{g_X}{g_*} x^{3/2} e^{-x}. \quad (4.6)$$

Les quantités $\langle \sigma v \rangle$ et λ dépendent a priori de la vitesse. En général, $\langle \sigma v \rangle \propto v^{2n}$ avec $n = 0$ (annihilation des ondes s) ou $n = 1$ (annihilation des ondes p). Cette quantité peut être paramétrée de manière générale comme

$$\langle \sigma v \rangle = c_0 / X r, \quad (4.67)$$

où $f(z)$ est fonction de m/T uniquement puisque $(v^2) \propto T$. L'équation (4.64) peut être intégrée numériquement, mais les principales propriétés de ses solutions peuvent être obtenues analytiquement.

Avant découplage, ($1 < z < g : X_f$), $Y_x \sim Y_x$ et A et sa dérivée restent très petits. Ainsi, (4.64) pose la solution approchée

$$A \frac{J}{2A_0} x^2 \frac{d \ln \ddot{y}_x}{dx}, \quad A_0 = c r_0 \sqrt{\frac{\pi}{45 g_*}} \quad (4.68)$$

1, on obtient ça avant le découplage

$$\frac{x^2}{dx} \quad (4.69)$$

Après découplage ($x \ll 1$), Y_x diminue de façon exponentielle et devient négligeable par rapport à $Y \sim A$. L'équation (4.64) prend alors la forme

$$\frac{dx}{dx} = \frac{A^2}{\ddot{y}_x(x)^2} \quad (4.70)$$

Integrating this equation between z_c and $z = \infty$, we get

$$\int_{x_i}^x \frac{f}{x^2} dx. \quad (4.71)$$

It follows that

$$T_{00} = A_0 \quad (4.72)$$

X_f should now be determined. The decoupling happens when Y_x differs significantly from $\ddot{Y}_y$, i.e. when $A(x_f) = c \ddot{Y}_x(z_f)$, c being a number of order unity that can be determined by comparison with a numerical integration. By estimating $A(2q)$ with its value (4.69), X_f is the solution of

$$\frac{z^{1/2} e^{X_f}}{(Z_f) K^4} \quad (4.73)$$

A similar expression is obtained using the criteria $r(r_c) = r(z_c)$, which gives

$$\frac{-q_y \wedge x_j^2 e^{X_f}}{P_c} = \sqrt{\frac{2}{45}} \quad (4.74)$$

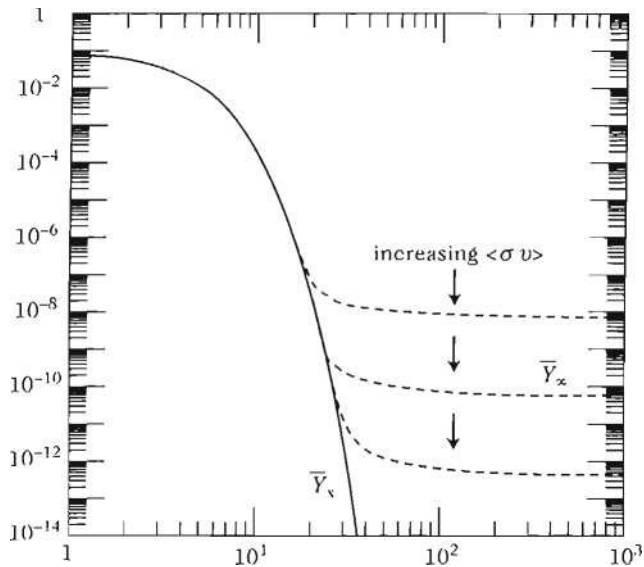
De la densité d'entropie actuelle [voir (4.140)], on peut déduire la densité de référence de la particule X , $n_{X0} = s Y_{0c}$,

$$n_{X0} = 1.09 \times 10^4 \frac{g_*^{1/2}}{g_*} \left(\frac{q_{*0}}{3.91} \right) \Theta_{2.7}^3 \frac{\left[\int_{x_i}^{\infty} f(x)/x^2 dx \right]^{-1}}{m M_p \sigma_0} \text{ cm}^{-3}. \quad (4.75)$$

Pour donner une estimation de cette densité de relief, supposons que $f(x) = x^{-n}$ et que $g(x) \sim$
Puisque $P_{x0} = mn_{x0}$ et $\langle P \rangle_x = Z \langle x \rangle / Z$ c'est-à-dire, on obtient

$$Cl_{x0}h^2 \sim 0.31 \frac{1}{100}^{-1/2} (n+1)^{n+1} \left(\frac{q+0}{3.91} \right) \Theta_{2.7}^3 \left(\frac{\sigma_0}{10^{-38} \text{ cm}^2} \right)^{-1} \quad (4.76)$$

Puisque Xf ne dépend que faiblement de la masse, ces expressions donnent une bonne estimation de la densité de relief en fonction de la masse et de la section efficace de la particule. La figure 4.8 représente l'intégration numérique de l'équation de Boltzmann (4.64). Nous récupérerons les deux régimes asymptotiques discutés dans cette section.



s?

$\delta \hat{O}$

$\frac{1}{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}$

$\frac{1}{Q} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}$

$$y \cdot y_x^{45(3)}, 9X \quad (4.78)$$

Fig. 4.8 Intégration numérique de (4.64). On retrouve à la fois les régimes asymptotiques et la dépendance en (cru) de la densité de relief y -

4.2.3 2 Chaud repose

Un chaud relief découplé du plasma alors qu'il est relativiste, pour que

$$y \approx \dots \quad (4.77)$$

où $\epsilon_{\text{pa}} = 1$ (boson) ou $3/4$ (fermion). L'interaction n'est plus efficace lorsque $\dot{Y}_x$ est constant, de sorte que la densité de référence est simplement donnée par sa valeur à l'équilibre

If the evolution of the Universe remains adiabatic after this transition then

$$n_{X0} = s_0 Y_\infty = 776.8 \left(\frac{q_0}{3.91} \right) \frac{\epsilon_{F89X}}{q_*(x_f)} \Theta_{2.7}^3 \text{ cm}^{-3} \quad (4.79)$$

Si cette particule est encore relativiste aujourd'hui, alors elle se comporte comme le neutrino sans masse évoqué à la section 4.2.1.6. Si sa masse est supérieure à la température du fond cosmique actuel, soit $m > 1,7 \times 10^{-4} \text{ eV}$, alors la densité d'énergie associée est $P_{X0} =$ de sorte qu'en utilisant (4.140), sa densité est

$$\Omega_{X0} h^2 = m_X s_0 Y_\infty = 0.739 \frac{1}{3.91} \frac{1}{V_{10} \text{ eV}} \quad (4.80)$$

La contrainte $\Omega_X h^2 < 1$ implique que $m < 13,5 \frac{1}{\epsilon_{F89X}} \text{ eV}$. La valeur précise de cette contrainte dépend de la valeur de q_* au découplage.

Par exemple, pour des neutrinos peu massifs, ou pour des particules de petite masse découplées vers 1 MeV, $q_*(x) = 10,75$, et on obtient

$$\Omega_{X0} h^2 = \frac{m_X}{91.5 \text{ eV}}, \quad (4.81)$$

ce qui donne une contrainte sur la masse des particules. La densité de relief est inversement proportionnelle à $q_*(x_f)$. Un relief sera ainsi moins abondant s'il est découplé précocement. Par exemple, si la particule se découple vers 300 GeV alors $q_*(x_f) \sim 107$, de sorte que

$$\Omega_{X0} h^2 = \frac{m_X}{910 \text{ eV}}. \quad (4.82)$$

Ainsi, une particule découplant tandis que $q_*(x_f) \gg 1$ aura une abondance et une température très faibles par rapport aux photons du fond cosmique. C'est ce qu'on appelle généralement des comptes *chauds*.

4.3 Nucléosynthèse primordiale

Pour des températures supérieures ou de l'ordre de 100 MeV, l'Univers est dominé par des particules relativistes en équilibre : électrons, positrons, neutrinos et photons, et les réactions nucléaires peuvent être activées. La contribution des neutrons et des protons, alors non relativistes, est négligeable dans le budget de masse. Les faibles interactions entre neutrons, protons et leptons,

$$n + \bar{n} \longleftrightarrow p + \bar{p}, \quad e^+ + n \longleftrightarrow p + e^-, \quad n \longleftrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e, \quad (4.83)$$

et les interactions entre électrons et positrons,

$$e^+ + e^- \longleftrightarrow \gamma + \gamma, \quad (4.84)$$

maintenir toutes ces particules, ainsi que les baryons non relativistes, en équilibre thermodynamique.

4.3.1 Principales étapes du mécanisme

Le synopsis de la nucléosynthèse primordiale (généralement appelé thèse de la nucléosynthèse du Big-Bang, BBN) peut être décomposé en trois étapes principales :

- (1) $T \gg 1 \text{ MeV}$, les composants de l'Univers sont en équilibre thermodynamique. Le rayonnement domine l'Univers et $g_r = 10,75$. Ainsi, le rapport neutron sur proton est approximatif¹ donné par sa valeur à l'équilibre

$$\left(\frac{n}{p}\right)_{eq} \sim \exp\left(-\frac{Q}{T}\right) \sim 1,$$

$Q = m_n - m_p = 1,293 \text{ MeV}$. La fraction de chaque noyau atomique peut alors être obtenue à partir de considérations purement thermodynamiques.

- (2) $T \sim 1 - 0,7 \text{ MeV}$, les interactions faibles ne peuvent plus maintenir l'équilibre. Les neutrinos découplés et le rapport n/p s'écartent de sa valeur d'équilibre. A la température de congélation, $T_f \sim 0,8 \text{ MeV}$, elle est de l'ordre de

$$\left(\frac{n}{p}\right)_f \sim \exp\left(-\frac{Q}{T_f}\right) \sim \frac{1}{5}$$

Les neutrons libres se désintègrent ensuite en protons tandis que les noyaux atomiques restent en équilibre thermodynamique. En termes de temps, cette étape commence approximativement vers $t \sim 1 \text{ s}$ [voir (4.21)].

- (3) $T \sim 0,7 - 0,05 \text{ MeV}$, l'équilibre thermodynamique nucléaire ne peut plus être maintenu. Les électrons et les positrons se sont annihilés et ont réchauffé le bain de photons. g_r vaut alors 3,36. Les noyaux atomiques sont alors formés par une série de réactions à deux corps. Pour cela, il faut synthétiser du deutérium ($p + n \rightarrow D + \gamma$), ce qui n'est possible que lorsque la densité de rayonnement est suffisamment faible pour que la réaction inverse, la photodissociation du deutérium, soit négligeable. Ceci détermine la température T_{Nuc} obtenue par $no/n_\gamma \sim 1$, soit

$$\eta^2 \exp\left(-\frac{Q}{T_{Nuc}}\right) \sim 1,$$

Autour de T_{Nuc} , $(n/p)_{Nuc} = (n/p)_f \exp(-fN_{uc}/T_n) \sim 1/7$. Tous les neutrons sont alors liés dans des noyaux d'hélium-4, avec une abondance (en masse par rapport au nombre total de nucléons, $= n + p$) de l'ordre de

$$\frac{2 \left(\frac{n}{p}\right)_{Nuc}}{1 + \left(\frac{n}{p}\right)_{Nuc}} \sim 0,25,$$

parce que la densité numérique de l'hélium-4 est $n/2$, ce qui représente une masse $4 \times n/2 = 2n$ en unités nucléaires. L'augmentation de la barrière coulombienne pour les noyaux de masse atomique plus grande ainsi que la baisse de la température et de la densité (et donc de la probabilité de réactions à deux corps) associées à l'absence de

noyaux atomiques stables de masse $A = 5$ et $A = 8$ expliquent pourquoi la nucléosynthèse primordiale ne produit aucun noyau au-delà de l'hélium en quantité significative. BBN s'arrête à peu près à $T \sim 0,05$ MeV, ce qui correspond à $t \sim 530$ s [voir (4.21)].

Paramètres clés

Dans ce mécanisme, l'écart par rapport à l'équilibre thermodynamique est crucial, car autrement tous les nucléons se trouveraient sous forme de fer si l'équilibre était maintenu tout au long de la nucléosynthèse. Les abondances prédites par la thèse de la nucléosynèse primordiale dépendent principalement de quelques paramètres.

- $g_{\pm}$: le nombre de degrés de liberté relativistes. g^* détermine la densité du rayonnement et donc la valeur de la température de gel T_f . Ce paramètre dépend du nombre h_ν des familles de neutrinos. La température T_f est grossièrement obtenue à partir de l'équation de Friedmann

$$G^2 T_f^5 \sim \kappa / G^2 T_f^2.$$

- τ_n : la durée de vie du neutron détermine le rapport $(n/p)_{\text{Nuc at.}}$ le début de l'osynthèse nucléaire à partir de sa valeur de congélation. dépend de diverses constantes fondamentales

$$\tau_{n,1} = (887 \pm 2\text{s})^*.$$

- g : le nombre de baryons par photon $n_b/n_\gamma \sim (5 - 6) \times 10^{-10}$ [voir (4.142)]. Cette quantité n'est pas directement mesurable avec une grande précision car il est difficile de déterminer quelle fraction de matière noire est sous forme baryonique. BBN propose ainsi un moyen de mesurer ce paramètre.
- Les constantes fondamentales : G_N et G_F interviennent dans la détermination de la température de gel. La constante de structure fine α détermine Q et les taux de réaction, puisqu'elle entre dans la valeur des barrières coulombiennes.

Ce chapitre détaillera ces principales lignes. Pour obtenir des résultats précis, il faut intégrer numériquement le réseau de réactions nucléaires dans un espace-temps en expansion. Nous nous référons aux articles originaux [1-3, 19, 20] et aux revues [21—25] pour des explications plus détaillées et au code numérique [26] qui est disponible gratuitement [27],

4.3.2 Etat initial

4.3-2.1 Equilibre nucléaire thermodynamique

À des températures élevées par rapport à 1 MeV, tous les noyaux sont maintenus en équilibre thermodynamique par les interactions nucléaires. La densité de ces noyaux non relativistes est alors

given by

$$n_A = g_A \left(\frac{m_A T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-(m_A - \mu_A)/T}. \quad (4.85)$$

Tant que la vitesse de réaction est supérieure à la vitesse d'expansion, l'équilibre chimique

impose la valeur du potentiel chimique

$$jUA = + (A - Z)Mn \quad (4.86)$$

où y_p et n_s , sont les potentiels climatiques des protons et des neutrons. En négligeant la différence de masse $Q = m_n - m_p \sim 1,293$ MeV dans les préfacteurs, les densités de neutrons et de protons sont

$$n_s = n_p \exp\left(\frac{Q}{T}\right) \quad (4.87)$$

où $\gamma = (m_p + mn_s)$.

En utilisant (4.86), le facteur exponentiel dans l'expression (4.85) peut être exprimé comme

$$\exp\left(\frac{Q}{T}\right) = \left(\frac{m_p}{m_n}\right)^{Z_p} \exp\left(\frac{Q}{T}\right) \quad (4.88)$$

En exprimant les deux premiers facteurs en fonction des densités de protons et de neutrons (4.87), on obtient

$$n_s = n_p \exp\left(\frac{Q}{T}\right) \quad (4.88)$$

où B_A est l'énergie de liaison du noyau

$$B_A = Zm_p + (A - Z)m_n - m_A \quad (4.89)$$

La fraction massique d'un nucléus de numéro atomique A par rapport à la masse totale du nucléon est définie par

$$X_A \equiv \frac{An_A}{n_b} \quad n_b = n_n + n_p + \sum A n_A \quad (4.90)$$

En termes de paramètre r ; Défini par

$$\eta \equiv \frac{n_b}{n_\gamma} \quad (4.91)$$

on obtient finalement que les abondances des noyaux atomiques en équilibre thermodynamique, en utilisant $n_\gamma = 2\zeta(3)T^3/7r^2$, sont données par

$$X_A = F(A) \left(\frac{T}{m_N}\right)^{3(A-1)/2} \eta^{A-1} X_p^Z X_n^{A-Z} e^{B_A/T}, \quad (4.92)$$

$$F(A) \equiv g_A A^{5/2} \left[\zeta(3)\pi^{-1/2} 2^{(3A-5)/(2A-2)}\right]^{A-1} \quad (4.93)$$

Ceci illustre l'influence de l'entropie sur l'abondance des différents noyaux. Si $\eta \sim 1$, A'' est stable dès $T \sim B_A$ puisqu'à cette température la formation des noyaux, contrôlée par le facteur $\exp(B_A/T)$, domine sa destruction par photodissociation, contrôlée par le facteur r^{A-1} . Or, si $r \ll 1$, l'équilibre entre formation et photodissociation n'est atteint que lorsque $\exp(B_A/T) \sim r^{A-1}$, c'est-à-dire à des températures plus basses.

La température à laquelle l'abondance du noyau A devient d'ordre unité, que nous dénotée ! par T_A , peut donc être estimée à partir de (4.92). En négligeant le facteur numérique $F(A)$ et avec $X_p \sim X_n \sim 1$, on a

$$T_A \sim \left(\frac{X-1}{1.5 \ln(Th/mbj)} \right)^{1/4} \sim \ln 77 \quad (4.94)$$

Pour les éléments les plus légers, on obtient, avec $r) \sim 5 \times 10^{-10}$,

	D	T	³ He	⁴ He
BA (MeV)	2.22	6.92	7.72	28.3
TA (MeV)	0.066	0.1	0.11	0.28

Ainsi, même à l'équilibre thermodynamique, la nucléosynthèse ne démarre pas avant environ 0,3 MeV. Cela est dû à la très petite valeur de r). Même si les noyaux sont énergétiquement favorisés, l'entropie agit de manière inverse et favorise les neutrons et protons libres.

4.3.2.2 Abondance de neutrons

Puisque l'équilibre entre protons et neutrons est maintenu par une interaction faible, (4.83) implique que

$$\frac{n_n}{n_p} = \frac{1}{2} \frac{4 - 1/2}{e} \quad (4.95)$$

Nous concluons de (4.87) que

$$\frac{n}{p} = \frac{n_n}{n_p} \exp \left(-\frac{Q}{T} + \frac{\mu_n - \mu_p}{T} \right) \quad (4.96)$$

Comme le montre (4.26), la neutralité électrique de l'Univers implique que $y_e T \sim 10^{-10} \sim 10^{-8}$. En négligeant, nous obtenons cela

$$\left(\frac{n}{p} \right)_{eq} = \exp \left(-\frac{Q}{T} \right) \quad (4.97)$$

Pour des températures supérieures à 0,1 MeV, l'étude de la section précédente nous apprend que $X_A \approx 1$ tel que $7\% = n_n + n_p$. Ainsi, l'abondance des neutrons libres à l'équilibre est

$$X_{n,eq} = (1 + e^{Q/T})^{-1} \quad (4.98)$$

Aux grandes températures, on a donc $X_n = X_p = 0$. Par exemple, pour $T = 1$ MeV, le deutérium a une abondance $X_2 \sim 6 \times 10^{-12}$.

4.3.3 Gel de l'interaction faible et du rapport neutron/proton

Les interactions faibles maintiennent les neutrons et les protons en équilibre. Ces interactions gèlent à une température T_f déterminée par $H = \Gamma_w$ (27). Pour les températures $T < T_f$ et $T > T_f$ la vitesse de réaction des interactions faibles est donnée par

$$\Gamma_w = (1 + 3)^{1/2} G_F^2 T^5, \quad (4.99)$$

pour la réaction $p + e \longrightarrow \nu_e + n$. On obtient de (4.19) avec $g_e = 10.75$ que

$$(4.100)$$

de sorte que la température de gel des interactions faibles est de l'ordre de

$$(4.101)$$

Ainsi, le gel se produit vers $t_f = 1,15$ s.

Appliqué aux neutrons, le Boltzmann (4.56) peut être réexprimé en termes de X_n comme

$$-\dot{A}_{pn}(1 - A'_{ij} - A_{np}X_n). \quad (4.102)$$

La vitesse de réaction np , A_{np} , est liée à celle des réactions pn , A_{pn} , par $A_{np} = A_{pn} \exp(Q/T)$ simplement parce que les réactions (4.83) sont réversibles. A l'équilibre, c'est à dire lorsque $\dot{X}_n = 0$, la solution de cette équation est donnée par (4.98).

On peut tout d'abord noter que l'équation d'évolution (4.102) a une solution intégrale

$$(4.103)$$

où la fonction I est définie par $Z(t, t') = \exp[-\int_{t'}^t (A_{pn}(u) + A_{np}(u)) du]$. Comme à haute température les vitesses de réaction sont très grandes, $I(t, t_j)$ sera négligeable si le temps t , est choisi suffisamment loin dans le passé, de sorte que $X_n(t_j)$ ne joue aucun rôle et on peut choisir $t_j = 0$ (voir, par exemple, Réf. [20]). Il s'ensuit que

Puisque les vitesses de réaction sont grandes par rapport à leur variation relative, il s'ensuit que (4.105)

Ainsi, l'abondance des neutrons suit sa valeur d'équilibre jusqu'à t_f . Lorsque les interactions faibles gèlent, l'abondance des neutrons est donc

$$(4.106)$$

c'est-à-dire $(n/p)_{eq} \sim 0,198 \sim 1/5$. La coïncidence numérique $Q/7 = 0(1)$ implique que X_n n'est ni égal à X_p ni très petit. En conséquence, la quantité d'hélium synthétisée sera du même ordre de grandeur que la quantité d'hydrogène. Nous soulignons ici que cette coïncidence est inattendue puisque Q est déterminé par les interactions fortes et électromagnétiques, alors que t_f est fixé par les interactions faibles et gravitationnelles.

To evaluate the remaining abundances after the freeze-out, $X_n(t \gg t_f)$ one should use the explicit form of the reaction rates (see Ref. [22])

$$\begin{aligned}\lambda(n\nu_e \rightarrow pe) &= A \int_0^\infty dq_\nu q_\nu^2 q_e (E_\nu + Q)(1 - f_e) f_\nu, \\ \lambda(ne^+ \rightarrow p\bar{\nu}_e) &= A \int_0^\infty dq_e q_e^2 q_\nu (E_e + Q)(1 - f_\nu) f_e, \\ \lambda(n \rightarrow pe^- \bar{\nu}_e) &= A \int_0^{\sqrt{Q^2 - m_e^2}} dq_e q_e^2 q_\nu (E_e + Q)(1 - f_\nu)(1 - f_e).\end{aligned}\tag{4.107}$$

On peut montrer (voir Réf. [20] pour le détail de ce calcul) que la majeure partie de ces intégrais provient de particules d'énergie grande par rapport à la température lors du BBN. Les distributions de Fermi-Dirac peuvent ainsi être approchées par les distributions de Maxwell, $f_e = [1 + \exp(\epsilon_e/T_e)]^{-1} \sim \exp(-E_e/T_e)$. Puisque les facteurs de Boltzmann sont petits dans un environnement dilué gaz, les effets quantiques sont négligeables et les facteurs de Pauli peuvent être négligés, $1 - f \sim 1$. La dernière approximation suppose $m_e = 0$ dans le calcul des deux premiers intégrais, qui sont dominés par $E_e \sim m_e$, de sorte que

$$A(n \rightarrow pe) = A(n \rightarrow p\nu_e) = AT^3(24T^2 + 12TQ + 2Q^2).$$

Cette approximation est précise au niveau de 15 % tant que $T > m_e$, lorsque les vitesses de réaction sont devenues très faibles. La dernière vitesse de réaction donne une relation entre la constante A et la durée de vie du neutron

$$\tau_n^{-1} = A Q^5 \left[\frac{\sqrt{1 - \tilde{m}^2}}{5} \left(\frac{1}{6} - \frac{3}{4} \tilde{m}^2 - \frac{2}{3} \tilde{m}^4 \right) + \frac{\tilde{m}^4}{4} \cosh^{-1} \left(\frac{1}{\tilde{m}} \right) \right] \sim 0.0158 A Q$$

avec $m = m_e/Q$. Finalement, la vitesse de réaction totale $A_{np} \sim 2A(n \rightarrow pe)$ prend la forme

$$A_{np} \sim (12 + 6x + x^2),\tag{4.108}$$

avec $x \sim Q/T$, si l'on néglige la désintégration des neutrons lors du gel. En fait, ce terme ne devient important que lorsque $T < 0.13$ MeV, soit pour $x > 10$. VVe retrouve que pour $x < T$, la vitesse de réaction est donnée par $A_{np} \sim 12 \times 253/T^5 \sim G^2 T^5$, ce qui justifie a posteriori notre approximation dans la détermination de T_f .

L'expression (4.108) permet de calculer la fonction $I(t)$ comme

$$I(x, x') = \exp[\mathcal{A}(x) - \mathcal{A}(x')]$$

avec où le paramètre b est donné par $b = 253\gamma/45/47r^3 g_i M_p/r_n Q^2 = 0,252$. De l'expression (4.104), on peut déduire l'évolution de l'abondance des neutrons

$$K(x) = b \int_x^\infty \frac{1 + e^{-u}}{u^4} (12 + 6u + u^2) du$$

$$= b \left[\left(\frac{4}{x^3} + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x} \right) + \left(\frac{4}{x^3} + \frac{1}{x^2} \right) e^{-x} \right]$$

$$X_n(x) = X_n,eq(\wedge) + [[X_n,eq(z)]^2 \exp [K(x) - K(x')] e^x dx'] \quad (4.109)$$

Finalement, nous constatons que l'abondance des neutrons se fige à

$$X_n(\infty) = 0,150. \quad (4.110)$$

Cette valeur est atteinte à $T \sim 0,25$ MeV ($x \sim 5$), soit à $t \sim 20$ s.

4.3.4 Abondances des éléments légers

Le calcul précédent ne prend pas en compte le changement de g . et la production de deutérium, deux processus se déroulant en dessous de 1 MeV.

Les éléments légers seront formés par une série de réactions nucléaires, résumées sur la Fig. (4.9). Aucune abondance significative ne peut être produite avant la formation du deutérium puisque les densités sont trop faibles pour permettre à plus de réactions à deux corps, telles que $2n + 2p \rightarrow {}^4\text{He}$, de jouer un rôle important. De plus, la production de deutérium à partir de deux protons ($p + p \rightarrow D + e^+ + \nu_e$) implique une interaction faible et est donc négligeable.

Les isotopes légers ne peuvent pas être synthétisés avant que la température ne descende en dessous de 0,1 MeV. Cela est dû au fait que le deutérium a une très faible énergie de liaison et est facilement photodissocié. Sa synthèse ne démarre que lorsque la densité de rayonnement est suffisamment faible. De plus, la chaîne de réaction ne peut pas continuer avant que le deutérium ne soit synthétisé, c'est ce qu'on appelle souvent le « goulot d'étranglement du deutérium ».

4.3.4.1 Deutérium

La synthèse du deutérium est ainsi une étape clé de la nucléosynthèse primordiale. Il doit être produit en quantité suffisante pour que les éléments lourds puissent ensuite être synthétisés.

Comme déjà mentionné, la synthèse des isotopes légers ne commence qu'aux alentours de $T = T_{\text{nuc}} = 0,066$ MeV. A cette température, les électrons et positrons ne sont plus relativistes et $g = 3,36$, de sorte que (4.21) implique que $i_{\text{nuc}} = 303s$. Puisque $n(T_{\text{nuc}}) = n(T_f) \exp(-i_{\text{lluc}}/r_{11})$ et $p(T_{\text{nuc}}) = p(T_f) + n(7)[1 - \exp(-t_{\text{nuc}}/r_n)]$, ce qui implique que $(n/p)(T_{\text{IUC}}) \sim 0,133$, on a

$$X_n(T_{\text{nuc}}) \sim 0,117. \quad (4.111)$$

La vitesse de réaction par neutron de la réaction de formation de deutérium ($n + p \rightarrow D + \gamma$) est

$$AD = 4,55 \times 10^{-20} n_p \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}. \quad (4.112)$$

On peut montrer que cette réaction se fige bien après la fin de la nucléosynthèse de sorte que l'abondance du deutérium ($50 = 3$) est donnée par sa valeur d'équilibre (4,85).

$$\frac{X_D}{X_n X_p} = \frac{24}{\pi^2} \left(\frac{T}{m_N} \right)^{3/2} \exp \left(\frac{B_D}{T} \right) \quad (4.113)$$

]. p <"> n

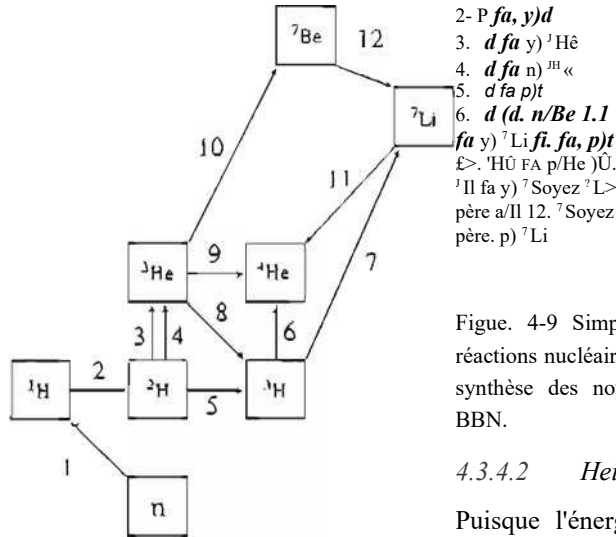


Figure. 4-9 Simplifier le réseau de réactions nucléaires impliquées dans la synthèse des noyaux légers lors du BBN.

4.3.4.2 Heilvm-4

Puisque l'énergie de liaison de l'hehvm-4 est supérieure à celle

du deutérium, l'hélium est favorisé par le facteur de Boltzmann $\exp(B/T)$ par rapport au deutérium. Comme le montre la figure 4.10, la croissance du deutérium abondance est suivie par celle de l'hélium-4. Les noyaux plus lourds ne sont pas synthétisés en quantités significatives principalement pour deux raisons : (1) l'absence de noyaux stables avec $A = 5$ ou $A = 8$, de sorte que les chaînes de production pour les réactions $n + {}^4\text{He}$, $p + {}^4\text{He}$, ${}^4\text{He} + {}^4\text{He}$ sont bloqués (le processus triple es, qui produit du carbone 12 dans les étoiles, ne peut pas être efficace dans l'Univers primordial) ; (2) l'importante barrière coulombienne pour les réactions telles que ${}^3\text{H} + {}^4\text{He} \rightarrow {}^7\text{Li} + \gamma$ et ${}^2\text{He} + {}^4\text{He} \rightarrow {}^6\text{Be} + \gamma$.

Au niveau de T_{nuc} , tous les neutrons libres sont liés aux noyaux d'hélium-4. Puisque l'hélium-4 possède deux neutrons, son abondance primordiale est donc Une estimation plus précise [20] de T_{nuc} donne $T_{\text{nuc}} = 0,086 \text{ MeV}$, ce qui implique $\xi_{\text{nuc}} = 178.5$ s et donc $Y_o \sim 0,238$.

Cette estimation analytique donne des ordres de grandeur et des prédictions correctes avec une précision de l'ordre de 1% par rapport à ce que l'on peut obtenir par intégrations numériques.

Rappelons que notre estimation a supposé $\xi = 0$ pour déterminer le rapport (4,97). Si ce

$$Y_p = \frac{2X_n(T_{\text{nuc}})}{1 + X_n(T_{\text{nuc}})} \simeq 0.21. \quad (4.114)$$

n'est pas le cas, le paramètre constant $\xi = jj_{\text{e}}/T$ peut être introduit. Lorsque ce paramètre est petit, son effet principal est de modifier la vitesse de réaction $n + p \rightarrow d + \gamma$, donc

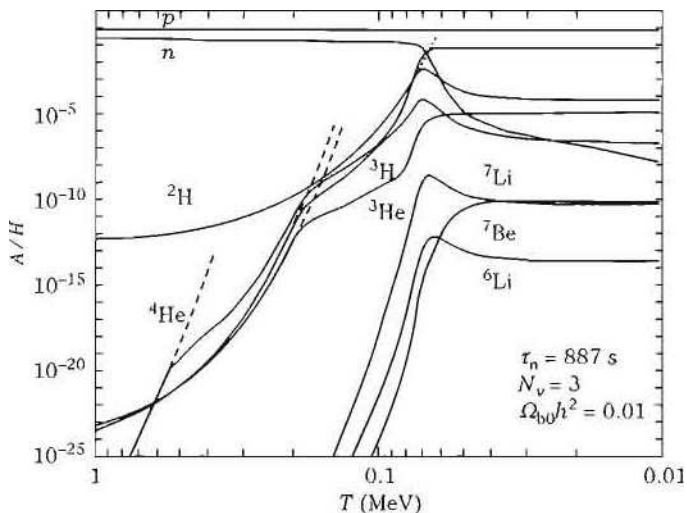


Fig. 4.10 Evolution des abondances d'éléments légers lors de la nucléosynthèse primordiale. Les lignes pointillées représentent les abondances à l'équilibre thermodynamique.

que $A_{np} = A_{pn} \exp(Q/T + \xi)$. Cela change l'abondance des neutrons gelés (4.110) en $X_n(\infty) = X_n(\infty, \xi = 0) \exp(-\xi)$.

Les résultats des simulations numériques peuvent être résumés, dans l'intervalle $3 \times 10^{-10} < r_f < 10^{-9}$, par

$$Y_p = 0,245 + 0,014(M, -3) + 0,0002(r_n - 887s) + 0,0091n \left[-1 - 0,25\zeta, (4,115) \right] \times 10^{-4}$$

qui donne la sensibilité aux paramètres les plus critiques (voir Réf. [28] pour une étude plus détaillée).

4.3.4.3 Autres éléments

En fin de nucléosynthèse, vers $t \sim 1000$ s, des traces de deutérium ($\% \sim 10^{-4}$), d'hélium-3 ($X_{He-3} \sim 10^{-5}$) et de lithium ($X_{Li} \sim 10^{-9}$) sont toujours présentes. L'abondance d'hélium-3 inclut une partie du tritium qui disparaît d'ici [3] désintégration, et de même, celle du lithium-7 comprend le béryllium-7. La production d'éléments au-delà de $A = 7$, comme le bore, est négligeable.

Contrairement à l'hélium-4, les abondances de ces noyaux sont très sensibles à la valeur de r_f (voir Fig. 4.11). Les abondances de deutérium et d'hélium-3 diminuent avec r_f . Le lithium-7 peut être produit par deux voies : (1) ${}^4\text{He} + {}^3\text{H} \rightarrow {}^7\text{Li} + \gamma$ qui entre en compétition avec ${}^7\text{Li} + p \rightarrow {}^4\text{He} + {}^4\text{He}$ pour $r_f < 3 \times 10^{-10}$ et (2) ${}^7\text{Be} + n \rightarrow {}^7\text{Li} + p$, suivi de la désintégration pour $r_f > 3 \times 10^{-10}$. La transition entre les deux canaux explique la forme de la courbe d'abondance du lithium-7 (Fig. 4.11).

On peut montrer [23] que dans la bande $10^{-10} < r_f < 10^{-9}$, les abondances primordiales des noyaux légers sont données par

$$(g) \quad = 3,6 \times 10^{-5} \text{ } ^{60}\text{S}_{8-i} \text{ } ^6, \quad (4-116)$$

$$= 12 \times 10^{-51} 06 \wedge \text{ } ^{63}\text{S} \gg \quad (4117)$$

$$= 1,2 \times 10^{-2} (n s i^{38} + 21,7 \wedge ^8), \quad (4,118)$$

avec $\eta = 7,5 = 7,5 \times 10^0$.

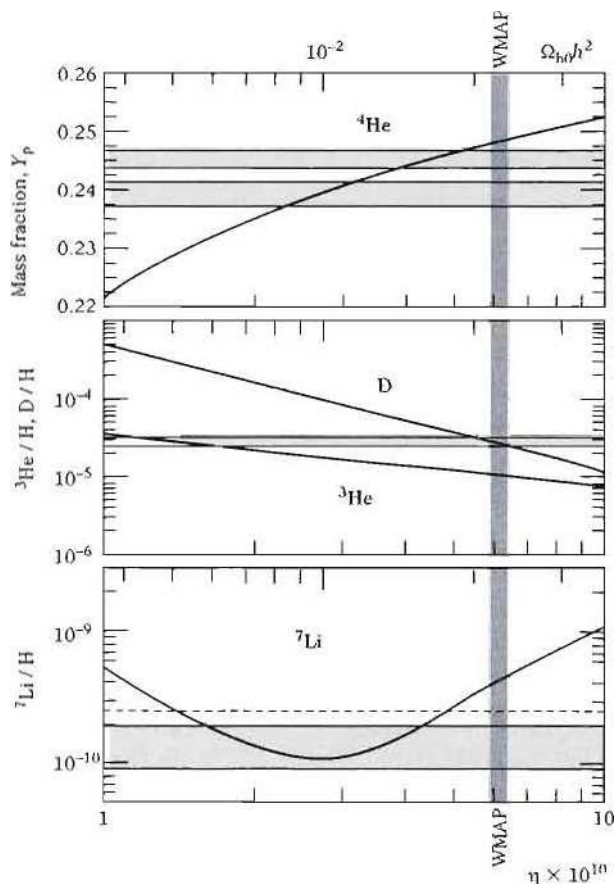


Fig. 4.11 Abondances d'hélium-4, de deutérium, d'hélium-3 et de lithium-7 en fonction du rapport baryon sur photon, η , ou équivalent de la densité baryonique, $\Omega_b h^2$. Les zones hachurées correspondent aux observations spectroscopiques discuté dans le texte : Réf. [29-31] pour l'hélium-4, Réf. [32] pour le deutérium, et Réf. [33] pour le lithium-7. La bande verticale représente la contrainte sur η obtenue du satellite WMAP [34]. De la Réf. [35].

4.3.5 Observations ! statut

La comparaison entre les abondances observées et prédites est difficile, principalement parce que les abondances primordiales peuvent être modifiées par divers processus nucléaires au cours de l'évolution de l'Univers. De plus, ces modifications sont différentes pour chaque noyau. Par exemple, l'abondance de l'hélium-4, qui est très stable, augmente du fait de la production stellaire, alors que le deutérium est beaucoup moins stable et ne peut être que détruit mais jamais synthétisé dans les étoiles. L'hélium-3 et le lithium-7 ont des évolutions plus complexes car ils peuvent être à la fois synthétisés et détruits. Les astronomes tentent donc de mesurer les abondances dans des environnements les plus primordiaux possibles.

4.3.5.1 Observations

Nous passons brièvement en revue l'état des observations d'abondance de noyaux légers. Pour un examen plus détaillé de ces sujets, voir Réf. [24].

- *Hélium-4* : est détecté grâce à ses raies d'émission dans divers environnements astrophysiques (atmosphères planétaires, jeunes étoiles, nébuleuses planétaires), qui peuvent être galactiques, extragalactiques ou intergalactiques. Afin d'éliminer la production d'hélium stellaire, son abondance est corrélée à celle d'autres éléments comme l'azote et l'oxygène. Le meilleur système pour réaliser ces études semble être les régions HII des galaxies bleues compactes. Des mesures récentes de différents groupes donnent $Y_p = 0,2443 \pm 0,0015$ [29], $Y_p = 0,2391 \pm 0,0020$ [30] et $Y_p = 0,249 \pm 0,004$ [36]. L'analyse récente de 82 régions HII réalisée dans 76 galaxies compactes a donné [31] $Y_p = 0,2421 \pm 0,0021$.
- *Deutérium*. est facilement détruit dans les étoiles dès que la température dépasse 6×10^5 K. Toute mesure de D/H est donc une borne inférieure, donnant une borne supérieure sur r). Son abondance aurait pu être réduite d'un facteur estimé entre 2 et 10. Ses raies spectrales n'ont en réalité jamais été détectées dans aucune étoile, ce qui implique que $D/H < 10^{-6}$ dans les atmosphères stellaires. Ils peuvent être détectés sur des planètes géantes, dans des environnements interstellaires locaux et dans le spectre d'absorption des nuages à faible métallicité situés dans la ligne de mire des quasars. Les mesures les plus fines dans les systèmes d'absorption conduisent [32] à $D/H = 2,78 \pm 0,1 \times 10^{-5}$. Conservât! En effet, les mesures locales au sein des régions interstellaires donnent la limite inférieure [37] $D/H = (1,5 \pm 0,1) \times 10^{-5}$, tandis que l'absence de toute détection dans les systèmes à fort redshift fixe la limite supérieure [32] $D/H < 6,7 \times 10^{-5}$.
- *Lithium-7* : le système qui semble permettre les meilleures mesures du lithium-7 est le halo stellaire de notre Galaxie. Ce halo est principalement composé d'étoiles des populations I et II et possède donc une métallicité très faible. En extrapolant à une métallicité nulle, on obtient une abondance primordiale $Li/H = 1,23^{+0}_{-0} \times 10^{-10}$ [33].
- *Hélium-3* : n'a été observé que dans les régions HII du disque galactique (donc dans un environnement de métallicité relativement élevée). Dans ces régions, son abondance est de ${}^3He/H = (1 - 2) \times 10^{-5}$ [38] bien qu'il soit difficile de remonter à sa valeur primordiale car cet isotope a une histoire stellaire complexe et peut être à la fois produit et détruit au cours de l'évolution galactique. Il est donc peu probable que l'hélium-3 fournisse aujourd'hui un test cosmologique précis. Pour le moment, ça peut être principalement

utilisé pour contraindre les mécanismes astrophysiques dans lesquels il est produit ou détruit. Cependant, en comparant l'abondance primordiale de ^3He avec l'abondance du disque, on peut conclure qu'elle n'a pas beaucoup évolué en 14 milliards d'années.

4.3.5.2 *ConstiAints et modèles co\$jno)ogiques*

La nucléosynthèse primordiale allons d'abord mesurer le rapport r). Si seules les données spectroscopiques sont considérées et en supposant $A_{\text{fi}} = 3$, alors

$$\tau = (5,15 \pm 1,75) \times 10^6, \quad (4.119)$$

ce qui correspond à $\Omega_b h^2 = 0,0224 \pm 0,0009$.

Les données actuelles permettent d'imposer des contraintes sur des paramètres tels que N_u , le nombre de familles Deutrino de masse inférieure à 1 MeV, et ξ , mais aussi de tester la valeur de certaines constantes fondamentales comme la constante gravitationnelle, ou la constante de structure fine. (voir Réf. [39]). La nucléosynthèse primordiale est donc un test non seulement du modèle du Big Bang, mais aussi de la physique nucléaire et de l'astrophysique générale. L'accord entre théorie et observations en fait l'un des piliers du modèle Big-Bang.

4.3.5.3 *Une crise récente ?*

Pendant longtemps, la nucléosynthèse primordiale et la détermination spectroscopique des abondances d'éléments légers ont été les seuls moyens fiables de quantifier le contenu en baryon de l'Univers. Récemment, a été déterminé avec une extrême précision [34] grâce à l'analyse des anisotropies du fond d'ondes cosmiques (voir chapitre 6)

$$\Omega_b h^2 = 0,0224 \pm 0,0009, \quad (4.120)$$

ce qui correspond à $r = (6,14 \pm 0,25) \times 10^{-10}$. En utilisant cette valeur pour la densité des baryons, on peut alors en déduire les abondances attendues [35] :

$\Omega_b h^2$	$^7\text{Li}/\text{H}$	$^6\text{Li}/\text{H}$
$0,02247 \pm 0,00004$	$(2,6 \pm 0,3) \times 10^{-5}$	$(1,2 \pm 0,08) \times 10^{-14}$

Cela a ouvert la voie à une réanalyse des taux de réactions nucléaires impliqués lors de la nucléosynthèse (Fig. 4.9). La situation est résumée dans les Fig. 4.11.

4.4 *Le rayonnement de fond micro/ave cosmique*

Tant que la température de l'Univers reste élevée par rapport à l'énergie d'ionisation de l'hydrogène, la matière est ionisée et les photons sont alors fortement couplés aux électrons par diffusion Compton. À des températures plus basses, la formation d'atomes neutres est thermodynamiquement favorisée pour la matière. La diffusion Compton n'est alors plus efficace et le rayonnement se découple de la matière pour donner naissance à un rayonnement fossile : le fond micro-onde cosmique (CMB).

La température de ce fond cosmique a été prédite par Alpher et Herman [3] en 1948, suite aux arguments développés la même année par Gamow [2]. Cette prédiction a été confirmée ! en 1964 par Penzias et Wilson [4] qui ont découvert

un signal de bruit inexpliqué, identique dans toutes les directions. Ce signal a été immédiatement interprété par Dicke *et al.* [41] comme étant le rayonnement de fond cosmique micro-onde à une température de $3,5 \pm 1$ K.

Dans cette section, nous décrivons d'abord les mécanismes de recombinaison et de découplage avant de décrire les propriétés de la composante isotropie du fond cosmique révélées par le satellite COBE en 1987 ; en particulier, nous décrivons les contraintes sur les distorsions possibles du spectre de Planck . Pour plus de détails à ce sujet, nous vous recommandons les revues [42-44].

4.4.1 Recombinaison

4.4.1.1 Prédiction de l'existence du fond diffus cosmologique

Pour commencer, laissez-le. Nous passons brièvement en revue l'analyse d'Alpher et Herman qui ont prédit la température du fond cosmique de manière **surprenante** , en s'appuyant uniquement sur une estimation de l'abondance d'hélium et de la densité des baryons.

Pour expliquer une abondance d'hélium-4 d'environ 25%, la nucléosynthèse primordiale a dû avoir lieu vers $19 \text{ h} \cdot \text{K}$. A cet instant, la densité baryonique est de l'ordre de $n_b \sim 10^{\text{EST}} \text{ cm}^{-3}$. Aujourd'hui, il est de l'ordre $n_b \sim 10^{-7} \text{ cm}^{-3}$, d'où on déduit que, au moment de la nucléosynthèse, le redshift est

$$1 + z_{\text{BBN}} = \left(\frac{n_b}{n_b^{\text{EST}}} \right)^{1/3} \sim 2 \times 10^8.$$

Puisque T évolue comme $(1 + z)$, la température actuelle du bain de photon est donc d'environ

$$T_{\text{CMB}} = \frac{T_{\text{BBN}}}{1 + z_{\text{BBN}}} \sim 5 \text{ K}.$$

4.4.1.2 Recombinaison et découplage

Tant que la réaction de photoionisation

$$(4.121)$$

est capable de maintenir l'équilibre, les abondances relatives des électrons, des protons et de l'hydrogène seront fixées par (4.60). Puisque l'Univers est électriquement neutre, on *n'a pas* = n_p . Pour plus de simplicité, nous introduisons la fraction d'ionisation

$$x = \frac{n_e}{n_p + n_H} \quad (4.122)$$

où le dénominateur représente le nombre total de noyaux d'hydrogène, $n_H = n_p + n_H$ [$n_e = n_p = X_e n_b$, $n_H = (1 - X_e) n_b$]. Dans ce cas particulier, (4.60) est connue sous le nom d'équation de Saha. Une fois les quantités d'équilibre calculées, cela implique que

$$x = \frac{X_e}{1 - X_e} \left(\frac{m_e T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-E_I/T} \quad (4.123)$$

où $E_I = m_e c^2 + m_p c^2 - m_H c^2 = 13,6 \text{ eV}$ est l'énergie d'ionisation de l'hydrogène. Le photon la température est $T = 2,725(1 + z) \text{ K} = 2,348 \times 10^{-4} (1 + z) \text{ eV}$ et la densité baryonique $n_b = n_0 (1 + z)^{-3} \text{ cm}^{-3}$ pour que l'équation précédente devienne

$$\frac{25163}{1+z} \quad (4.124)$$

Remarquons d'abord que lorsque $TE \ll 1$, le membre droit de (4.123) est d'ordre 10^{-15} , de sorte que $X_e(T \sim E) \sim 1$. La recombinaison n'est heureuse que pour $T \ll E$. Pour voir cela, déduisons de (4.124) que si la recombinaison est définie par $X_e = 0.5, 0.1, 0.01$ puis $z_{\text{rec}} = 1376, 1258, 1138$, respectivement. Ainsi, X_e varie brusquement entre $z \sim 1400$ et $z = 1200$ et la recombinaison peut être estimée comme se produisant à une température comprise entre 3100 et 3800 K. Notez que (4.123) implique que

$$1 - X_e \approx - \ln [74 \langle \sigma v \rangle^2] \cdot$$

d'où on déduit que

$$\frac{1}{\omega_p} \left| \frac{\Gamma}{E i^{3/2} y} \right|_{\ln}$$

Cela donne une estimation approximative de la température de recombinaison puisque le dernier terme peut être négligé. Cela donne $T \sim 3500\text{K}$.

La densité électronique varie rapidement au moment de la recombinaison, d'où la vitesse de réaction $\tau_T = n_e \langle \sigma v \rangle$, avec $\langle \sigma v \rangle$ la section efficace de diffusion de Thompson, décroît rapidement de sorte que la réaction (4.121) se fige et les photons se découplent peu après. Une estimation du temps de découplage, t_{dec} peut être obtenue par l'exigence $n_e(t_{\text{dec}}) = H$. (idée)- La vitesse de réaction τ_T prend la forme

$$\tau_T = n_e \tau = 1,495 \times 10^{11} X_e \quad (4.125)$$

Only matter and radiation contribute significantly to the Hubble expansion rate so that

$$H^2 = (1+z)^3 \left(\frac{1}{4} F^2 \right) \quad (4.126)$$

Ainsi, nous concluons que le redshift de découplage est une solution de

$$(1+z_{\text{dec}})^{3/2} = \frac{280.01}{X_e(\infty)} \left(\frac{\Omega_{b0} h^2}{0.02} \right)^{-1} \left(\frac{\Omega_{m0} h^2}{0.15} \right)^{1/2} \sqrt{1 + \frac{1+z_{\text{dec}}}{1+z_{\text{eq}}}} \quad (4.127)$$

$X_e(\infty)$ est la fraction électronique résiduelle, une fois la recombinaison terminée. On peut estimer (voir la section suivante) que $X_e(\infty) \sim 7 \times 10^{-3}$.

4.4.1.3 Dynamiques de recombinaison

Pour décrire la recombinaison, et déterminer $X_e(\infty)$, il faut résoudre l'équation de Boltzmann. Un traitement complet, prenant en compte les apports d'hydrogène et d'hélium, est décrit dans les Réf. [45,46]. En réalité, la recombinaison de l'hélium se termine bien avant celle de l'hydrogène. Par simplicité, nous négligerons l'apport d'hélium.

des deux processus dominants. Une étude plus complète, avec des détails sur tous les processus, est présentée dans la Réf. [46]. Le tableau 4.6 compare l'approximation de l'équation de Saha avec l'intégration de (4.128) pour un Univers fiat avec $\text{Ob}^2 = 1$.

Tableau 4.6 Comparaison entre l'approximation de l'équation de Saha et l'intégration de (4.128) pour un Univers fiat avec $\text{Ob}^2 = 1$.

z	1667	1480	1296	1111	926	741
Saha (4.128)	$9,43 \times 10^{-1}$ $9,2 \times 10^{-1}$	$3,8 \times 10^{-1}$ $4,0 \times 10^{-1}$	$2,6 \times 10^{-2}$ $7,2 \times 10^{-2}$	$8,8 \times 10^{-4}$ $9,8 \times 10^{-3}$	$5,28 \times 10^{-6}$ $9,2 \times 10^{-4}$	$2,4 \times 10^{-3}$ $1,23 \times 10^{-4}$
Réf. [46]	$9,14 \times 10^{-1}$	$4,0 \times 10^{-1}$	$7,15 \times 10^{-2}$	$9,68 \times 10^{-3}$	$9,01 \times 10^{-4}$	$1,2 \times 10^{-4}$

Une analyse détaillée de (4.128) montre [46] que pour $1500 > z > 800$, cela se réduit à

$$= -61,72 \cdot \frac{Q}{\Lambda^2} (z) [1 + 2,26 \times 10 \text{Se}^{14d86/(z\hat{O}^2)}]^{-1} \quad (4,132)$$

avec $f(z) = (1 + \Lambda S z / \Lambda^2 \text{eq})^{-1} \wedge^2 \gg$ si on ne garde que la contribution dominante. Une bonne approximation de la solution de cette équation est

$$X_{e(z)} = 2,74x \text{ Nous} \quad)^{-1} \wedge^5. \quad (4-133)$$

tant que flbo et $\text{fl}_m \text{o}$ sont tous deux compris entre 0,05 et 1.

4.4.1.4 Dernière surface d'arnaque

La profondeur optique peut être calculée en utilisant la fraction d'ionisation en fonction du redshift autour du découplage,

$$r = \frac{1}{n_e} X_{\text{eff}} d_x = 0,42 e^{14 + 48s} \langle -^s J \rangle (\wedge^p)^5. \quad (4,134)$$

où la dépendance disparaît de manière évidente. Plus intéressant encore, r est également indépendant de flbo . La largeur optique varie rapidement autour de $z \sim 1000$ de sorte que la fonction de visibilité $g(z) = \exp(-T)dr/dz$, qui détermine la probabilité qu'un photon soit diffusé entre z et $z + dz$, est une fonction à pic élevé (voir Fig. 4.12). Son maximum définit le temps de découplage, $Z_{dc} = 1057,3$. Ce redshift définit l'heure à laquelle les photons CMB se diffusent pour la dernière fois ; l'Univers devient alors rapidement transparent et ces photons peuvent se propager librement dans toutes les directions. L'Univers est alors noyé dans ce rayonnement homogène et isotropie. L'instant où les photons interagissent pour la dernière fois est une hypersurface de type spatial, appelée dernière *surface de diffusion*. Certains de ces photons relais peuvent être observés. Ils proviennent de l'intersection de la dernière surface de diffusion avec notre cône de lumière passé. Il s'agit donc d'une sphère bidimensionnelle, centrée autour de nous, de rayon comobile $x(\wedge^{dec})$ - Cette sphère n'est pas infiniment mince. Si nous définissons sa largeur comme la zone où la fonction de visibilité est réduite de moitié, nous obtenons $Az_{dec} = 185,7$. Comme on peut le voir dans (4.133) et (4.134), la valeur de z_{dc} n'est pas

très sensible à $\Omega_b h^2$ et $\Omega_m h^2$ [et $\Omega_\Lambda h^2$ uniquement indépendant de ces paramètres dans l'approximation de (4.132)]. De l'analyse [34] du satellite WMAP, nous pouvons conclure que

$$z_{\text{déc}} = 1089 \pm 1, \quad \Omega_m h^2 = 0.315 \pm 0.007, \quad (4,135)$$

ce qui est en bon accord avec notre approximation analytique.

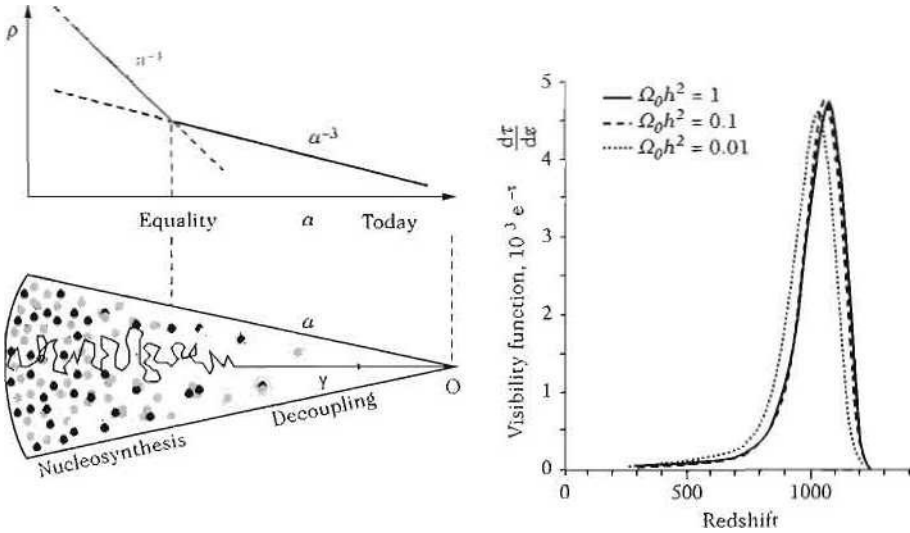


Fig. 4.12 (à gauche) : Au cours de l'expansion de l'Univers, la densité, ρ , diminue avec le temps. Peu après la recombinaison, la densité des électrons libres diminue rapidement et l'Univers devient transparent (à droite) : la fonction de visibilité est très pointue, ce qui nous permet de définir la dernière surface de diffusion.

4.4.2 Propriétés du fond cosmique des micro-ondes

Dans les modèles Big-Bang, l'énergie injectée dans le rayonnement entre l'annihilation électron-positon à un redshift d'ordre $z \sim 10^9$ et $z = 10 - 20$ est très faible. Le rayonnement fossile émis autour de $z = 10^3$ doit donc avoir un spectre très proche d'une distribution de Planck. Il a fallu attendre le satellite COBE [42] pour vérifier cette prédiction avec précision. Dans cette section, nous détaillons les propriétés observées de ce rayonnement.

4.4.2.1 Température et spectre observés

La température du fond diffus cosmologique, définie comme la moyenne de la température de l'ensemble du ciel

$$T_0 = T_{\text{moy}} = \frac{1}{4\pi} \int T(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi,$$

a été mesuré avec précision par l'expérience FIRAS à bord du satellite COBE [47]

$$T_0 = 2,725 \pm 0,001 \text{ K} \quad (4,136)$$

à 2×10^{-5} . Nous définissons le paramètre sans dimension

BK.

(4-137)

Cette température correspond à une énergie de $E_{\gamma}Q = 2,345 \times 10^{-4} \text{ eV}$.

Le spectre observé JS compatible avec un spectre de corps noir

(413E 0

Les figures 4.13 et 4.14 comparent les mesures du spectre du fond diffus cosmologique à celui d'un corps noir à 2,725 K.

Le fait que ce spectre soit si proche d'un corps noir prouve que le rayonnement fossile aurait pu être thermalisé, principalement grâce aux interactions avec les électrons. Cependant, pour des redshifts inférieurs à $z \sim 10^6$, le rayonnement fossile n'a pas le temps de se thermaliser. Toute injection d'énergie à un redshift inférieur induirait des distorsions dans le spectre de Planck et peut donc être limitée à ces observations (voir Fig. 4.13).

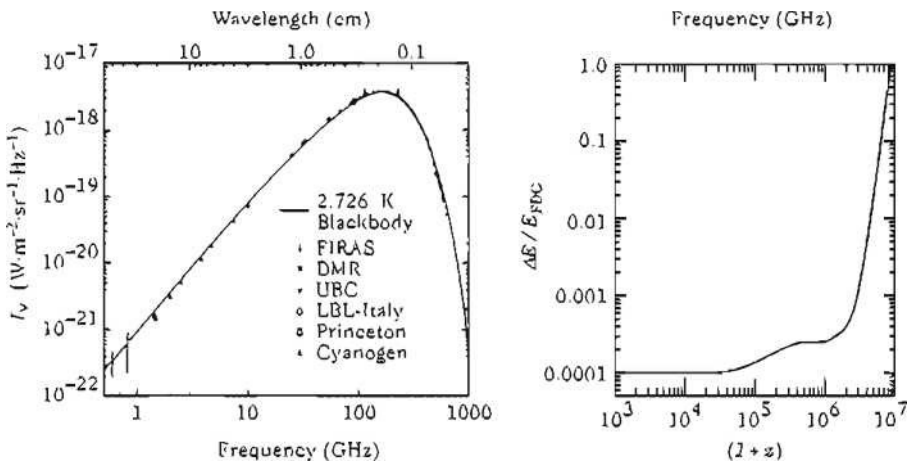


Fig. 4-13 (à gauche) ; Comparaison entre les mesures du spectre de fond cosmique micro-onde à un corps noir à 2,725 K. (à droite) : Borne supérieure de l'énergie injectée compatible avec les contraintes de FIRAS sur les distorsions du spectre de fond cosmique. De la Réf. [48].

Les photons CMB ont une distribution de Planck à une température T_0 . Des expressions (4.11) et (4.12), on peut conclure ($p = 2$) que

$$n_\gamma \hat{u} = 410,44 \hat{\sigma}^3 \text{ cm}^{-3} p_{\gamma u} = 4,6403 \times 10^{-34} \text{ }^\circ\text{C}^3 \text{ g cm}^{-3}. \quad (4.139)$$

Cela implique que $p \sim 0,26032 \text{ eV} \cdot \text{cm}^{-3} = 4,96 \times 10^{-13} \text{ eV}^4$. On déduit alors de (4.29) que la densité d'entropie actuelle est

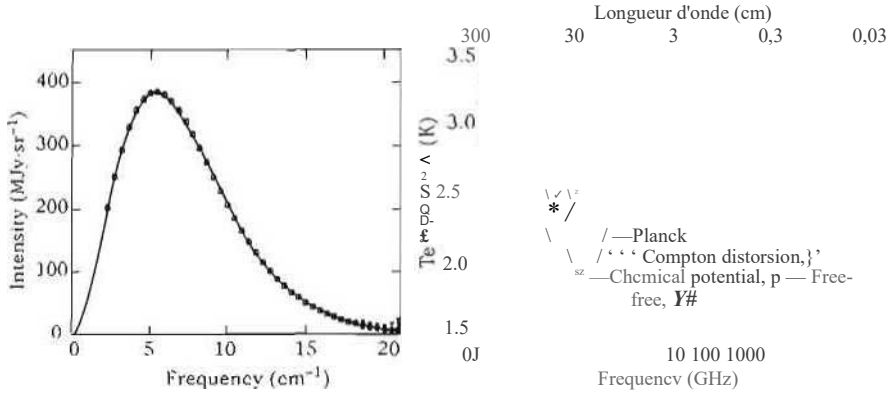


Fig. 4.14 (à gauche) Spectre du rayonnement fossile mesuré par le satellite COBE, les barres d'erreur sont multipliées par 200. (à droite) : Différents types de distorsions du spectre du corps noir. Aucune de ces distorsions n'a été observée. De la Réf. [48].

$$s_0 = 2889,2 \quad 0_{27} \text{ cm}^{-3} = 7,039 \quad n_{70}, \quad (4.140)$$

et que le paramètre de densité de photons est

$$Clyofi^2 = \blacksquare 2,4697 \times 10^{s_0}_{27}. \quad (4.141)$$

En utilisant «bo = $\sim 0.11(\text{flb}\hat{u}/0.02) \text{ m}^{-3}$ on en déduit que

$$r) = 5,514 \quad (4.142)$$

4.4.2 2 Distorsions du spectre de Planck

Trois types de distorsions peuvent affecter le spectre du fond cosmique.

1. À des redshifts inférieurs à $z < j_{ec}$, le plasma cosmique peut être chauffé par injection d'énergie à des températures supérieures à celle des photons CMB. La diffusion Compton des électrons chauds tend alors à déplacer le spectre vers des énergies plus élevées, tout en maintenant le nombre de photons constant, de sorte que les basses fréquences (partie Rayleigh-Jeans) s'épuisent au profit des fréquences plus élevées (partie Wien). Cette distorsion est appelée *distorsion Compton* et se caractérise par un paramètre unique

$$y = \int \frac{a_T n_e}{J} \frac{h\nu}{m_e c^2} dt, \quad (4.143)$$

qui représente la profondeur optique Compton intégrée.

2. Pour les redshifts entre $z \sim 2 \times 10^6$ et $z \sim 10^5$, le fond cosmique des micro-ondes peut être thermalisé par diffusion Compton, mais la thermalisation de l'énergie entre le plasma et les photons se produit trop tard pour que

3. le spectre

ayez le temps de vous détendre dans un spectre de Planck. Le spectre est ensuite déformé en un spectre de Bose-Einstein dont le potentiel chimique ne disparaît pas.

$$I(\nu) \propto \frac{\nu^3}{e^{(\nu-\mu)/T} - 1}. \quad (4.144)$$

Cette différence peut être caractérisée par le paramètre sans dimension

$$\mu = \frac{P}{T_\gamma} \quad (4.145)$$

4. Enfin, il peut y avoir des distorsions dites *libres-libres*, provenant principalement de l'émission de photons par les électrons qui se diffusent sur les particules chargées. L'effet sur le fond cosmique est alors proportionnel au paramètre F_h défini comme

$$\kappa = Y_{\text{ff}} = \int \kappa \left(1 - \frac{T_\gamma}{T_e} \right) dt \quad (4.146)$$

$$\text{with } \frac{87^{\wedge}7}{3} F \backslash \sim 376 \backslash 47 r f_0 J \quad 3 \quad 2$$

où $g \sim 2$ est appelé le facteur Gaunt.

Les contraintes actuelles sur ces trois types de distorsions [48] sont principalement obtenues à partir de l'analyse du spectre FIRAS, et donnent

$$M < 1,9 \times 10^{-5} \text{ K}, |p| < 9 \times 10^{-5}, |Y_{\text{ff}}| < 1,5 \times 10^{-5}. \quad (4.147)$$

Celles-ci contraignent fortement tout processus capable d'injecter de l'énergie dans l'Univers à partir de $z \sim 10^6$, et même à partir de la nucléosynthèse primordiale (voir Fig. 4.13).

4.4.2.3 Monopôle et dipôle

Les observations de FIRAS [49] dépendent de la position et de la fréquence. Ils ont été développés en harmonies sphériques en anisotropies monopôles, dipolaires et résiduelles.

Même si chaque point du ciel possède un spectre de Planck, la température du spectre - est légèrement plus élevée dans une moitié du ciel et plus basse dans l'autre moitié. Cette distorsion dipolaire a été mesurée par FIRAS

$$= (3,346 \pm 0,017) \times 10^{-3} \text{ K} \cos \theta$$

et est compatible avec une origine cinématique locale associée au mouvement du Système Solaire et de notre Galaxie par rapport au référentiel de repos CMB. Le dipôle proviendrait alors d'un effet Doppler, c'est à dire d'une fluctuation de température de la forme

$$T = T_0 \left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta + O\left(\frac{v^2}{c^2}\right) \right),$$

où θ est l'angle entre la ligne de visée et le dipôle, c'est-à-dire la direction du mouvement.

Nous concluons ainsi que le centre de gravité du système solaire se déplace dans la

direction $(l, b) = (263,85^\circ \pm 0,10^\circ, 48,25^\circ \pm 0,04^\circ)$ en coordonnées galactiques, avec une vitesse $v \sim 368 \pm 2 \text{ km s}^{-1}$. La vitesse correspondante de notre Galaxie et du groupe local est alors $v \sim 627 \pm 3 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \sim 0,0022c$ dans le sens $(l, b) = (276^\circ \pm 3^\circ, 30^\circ \pm 3^\circ)$.

A partir de ce dipôle, on peut déterminer le mouvement absolu du satellite par rapport au repère de repos CMB, c'est à dire le repère de référence pour lequel aucun dipôle n'est présent. A noter que ce dipôle pourrait avoir une origine cosmologique (son effet ne se distinguerait pas de celui d'un dipôle cinématique). Cependant, la valeur du quadripôle étant d'environ 1% du dipôle, l'interprétation cinématique est communément admise.

4.4.2.4 *Fluctuations résiduelles*

Fluctuations résiduelles

$$<5T(0, <p) = T(i9, <p) - T_o, \tag{4.148}$$

d'amplitude caractéristique de $((6T/T)^2)^{1/2} \sim 1,1 \times 10^{-5}$, ont également été détectées par le satellite GOBE.

Pour atteindre ces fluctuations, il a fallu d'abord éliminer divers effets de premier plan (poussière, émission galactique, synchrotron, libre-libre,...). Le spectre de ces émissions est très différent d'un spectre de Planck. La Fig. 4.15 représente leurs amplitudes relatives en fonction de la fréquence. Ces cotisations peuvent ainsi être soustraites (plus ou moins facilement).

Après soustraction de ces effets, il subsiste quelques anisotropies de température, d'amplitude relative $\sim 10^{-5}$, qui correspondent à des fluctuations de température de l'ordre de 30 μK . Ces anisotropies correspondent aux anisotropies du fond diffus cosmologique au moment de la recombinaison et décalées vers le rouge par l'expansion cosmique. Le chapitre 6 est consacré à l'étude de ces anisotropies de température.

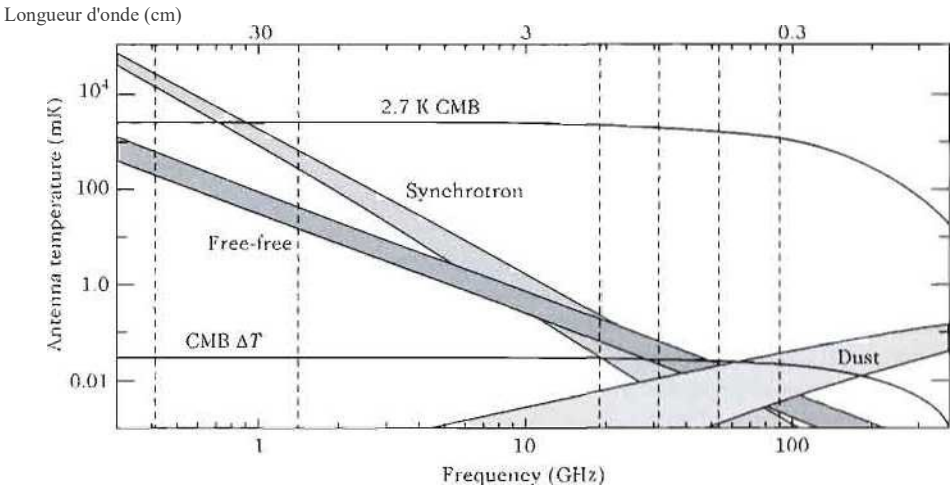


Fig. 4.15 Différents effets de premier plan gâchant le fond cosmique des micro-ondes. Aucun de ces effets n'a de spectre de Planck. De la Réf. [48].

En conclusion, le fond diffus cosmologique confirme que l'Univers émerge d'un état d'équilibre thermodynamique et que sa matière a été ionisée dans le passé. Sa température permet de déterminer la densité des photons. Cette contribution représente environ 93 % du rayonnement électromagnétique, intégré sur toutes les longueurs d'onde. On peut ainsi en déduire la densité de rayonnement, le paramètre cosmologique le mieux mesuré. Le fond diffus cosmologique peut être utilisé pour contraindre fortement toute injection d'énergie depuis $z \sim 10^6$.

4.4.3 Une autre preuve de l'expansion de l'Univers

L'évolution de la température du fond diffus cosmologique donne une preuve supplémentaire de l'expansion de l'Univers. En effet, son échelle doit être l'inverse du facteur d'échelle, de sorte que

$$T(a) = 2,725(1+z) \text{ K.} \quad (4,149)$$

Ces photons peuvent exciter les niveaux de structure fine de certains atomes. La température des photons CMB à un redshift de $z \sim 2,33771$ a été récemment mesurée [50] à partir de l'observation de nuages absorbants. La mesure est basée sur l'excitation des deux premiers niveaux hyperfins de carbone neutre. Ces excitations sont induites par les collisions et par la queue de la distribution des photons CMB. Après avoir soustrait la première contribution, qui peut être évaluée aux autres transitions, on peut déterminer la température de distribution des photons relais. Cela conduit à la contrainte

$$6,0 \text{ K} < T < 14 \text{ K,} \quad (4,150)$$

tandis que la prédiction théorique est $T = 9,1 \text{ K}$. La figure 4.16 résume les différentes tentatives pour vérifier la relation (4.149) et prouve qu'elle semble être satisfaite. Cela fournit une preuve supplémentaire de l'expansion de l'Univers.

4.5 Statut du modèle Big-Bang

4.5.1 Un bon modèle standard...

Les solutions de Friedman-Lemaître dérivées du chapitre 3 décrivent des univers homogènes et en expansion isotrope. Cette expansion est maintenant établie par diverses observations (voir section 4.1.1) et la constante de Hubble a été mesurée avec une bonne précision. Remettre en question la réalité de cette expansion nécessiterait la réinterprétation de diverses observations, ce qui n'a encore été réalisé par aucun modèle alternatif (voir, par exemple, Réf. [51] pour une tentative originale et instructive). L'expansion de l'Univers et le redshift représentent le premier pilier observationnel du modèle Big-Bang.

Le principe cosmologique, c'est-à-dire l'hypothèse d'homogénéité et d'isotropie, impose les symétries des espaces-temps cosmologiques et est à l'origine de leur simplicité mathématique. Cette hypothèse est étayée par les observations du fond cosmique des micro-ondes qui prouvent le niveau élevé d'isotropie de l'Univers qui nous entoure. Le modèle Big-Bang n'aborde pas l'origine de cette homogénéité et de cette isotropie. Il est donc important de tester davantage le principe copernicien par l'observation.

L'étude des processus nucléaires et électromagnétiques dans l'espace-temps cosmologique a conduit à deux conclusions principales : (I) l'existence et l'abondance des noyaux légers sont

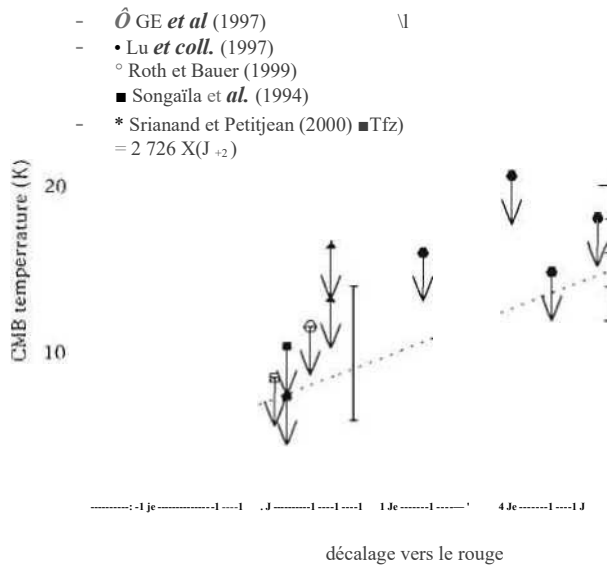


Fig. 4.16 Mesures de la température du fond diffus cosmologique à différents redshifts. La ligne pointillée représente la prédiction du modèle Big-Bang. De la Réf. [50]. naturellement expliqué à dix ordres de grandeur près, section 4.3 ; et (2) il doit exister un fond micro-onde cosmique de photons d'origine cosmologique, section 4.4. Ces deux prédictions ont été confirmées par des observations, fournissant ainsi deux autres piliers d'observation du modèle.

Comme nous l'avons déjà vu, les mécanismes hors équilibre jouent un rôle central dans ces prédictions . Ces conclusions s'appuient sur des hypothèses sensées, voire conservatrices, à savoir la validité de la relativité générale et de la physique nucléaire et électromagnétique à des températures inférieures à 100 MeV, fournissant une description robuste de l'histoire de l'Univers depuis $t \sim 10^{-4}$ s après le Big Bang.

Ce modèle du Big-Bang constitue donc un excellent *modèle standard* pour la description de l'Univers. Nous l'utiliserons comme point de départ dans la suite de cet ouvrage et il est aujourd'hui adopté à l'unanimité. Un certain nombre de conclusions sont génériques à ce modèle :

- l'Univers était autrefois dominé par les radiations. Ainsi, une ère dominée par les radiations et une ère dominée par la matière se succèdent. Il peut alors éventuellement y avoir une époque dominée par une constante cosmologique ou par la courbure de l'Univers.
- l'Univers a une histoire thermique . Lors de son expansion, l' Univers se refroidit. Les interactions efficaces à haute température ont tendance à se découpler dès que leur vitesse de réaction devient inférieure à la vitesse d'expansion.
- l' Univers émerge d'un état où la matière à haute température est ionisée et est en équilibre thermodynamique.

La dynamique des modèles Big-Bang dépend de leur contenu en matière. Comme on le voit dans

Chapitre 3, toutes les observables d'arrière-plan dépendent uniquement de la fonction $E(z)$. Une évaluation détaillée de ce contenu peut être faite [52]. Comme vu dans ce chapitre, les modèles Big-Bang sont caractérisés par 5 paramètres indépendants ($h, \Omega, \Omega_b, \Omega_c, \Omega_\Lambda$) avec la contrainte que la somme sur les Ω s doit être de 1. Les valeurs de ces paramètres, telles que déduites des observations, sont résumées dans le tableau 4.7. De ces paramètres, on peut déduire quelques quantifications qui caractérisent l'histoire thermique de l'Univers. Elles sont résumées dans le tableau 4.8.

Tableau 4-7 Paramètres cosmologiques des modèles et contraintes du Big-Bang abordés dans ce chapitre.

h	Constante de Hubble	$0,72 \pm 0,05$	Article 4.1.L
χ^2	paramètre de courbure	$-0,0049 \pm 0,013$	Chapitre 6
$\Omega_m h^2$	densité de matière noire	$0,113 \pm 0,009$	Chapitre?
$\Omega_b h^2$	densité baryonique (BBN)	$0,018 \pm 0,06$	(4.119)
	densité baryonique (CMB)	$0,0224 \pm 0,009$	
Ω_γ	densité de photons	$2,4696 \times 10^{-5}$	(4.141)
Ω_ν	(sans masse) densité de neutrinos (3)	$1,68 \times 10^{-5}$	(4.47)
Ω_r	densité de rayonnement	$4,148 \times 10^{-5}$	
Ω_Λ	constante cosmologique	$0,72 \pm 0,03$	Section 4.1.2
w	équation d'état de l'énergie noire	$w < -0,6$	(4.4)

Tableau 4.8 Grandeurs caractéristiques de l'histoire thermique de l'Univers.

n	rapport baryon/photon (CMB)	$(6,14 \pm 0,25) \times 10^8$	(4.120)
	rapport baryon/photon (BBN)	$(5,15 \pm 1,75) \times 10^8$	(4.119, 4.142)
T_0	température actuelle du CMB	$2,725 \pm 0,001$ K	(4.137)
	redshift à égalité	$3612 (n_{\text{m}} / n_{\text{r}})^{1/3} \approx 3371$	(4.8)
T_{eq}	température à égalité	$5,65 \times 10^4 (n_{\text{m}} / n_{\text{r}})^{1/3}$ eV	(4.8)
$z_{\text{déc}}$	redshift au découplage	1089 ± 1	Section 4.4
Δz	largeur	195 ± 2	Section 4.4
$T_{\text{déc}}$	température au découplage	2970 K	Section 4.4
z_{BBN}	redshift à la nucléosynthèse	$\sim 10^9$	Article 4,3
T_{BBN}	température à la nucléosynthèse	~ 1 MeV	Section 4.3

4.5.2 ... mais un modèle incomplet

Le modèle Big-Bang offre une image convaincante de l'évolution de l'Univers. A des températures plus élevées, le modèle est moins fiable puisque les lois de la physique doivent être extrapolées à des régimes où elles n'auraient pas été testées autrement. Par exemple, nous ne disposons toujours d'aucun modèle expliquant l'origine des baryons. Mais il est raisonnable d'espérer que nous le ferons. Il est possible d'extrapoler, au moins qualitativement, jusqu'à la grande échelle de l'unification, c'est-à-dire jusqu'à environ 10^{16} GeV. Au-delà de cette valeur, probablement à des énergies proches de la

on rentre aussi dans des Zones de plus en plus spéculatifs mais cela nous donne la possibilité Planck scale at 10^{19} GeV, we expect to have to consider quantum gravity effects. We de tester la phénoménologie des modèles théoriques à ces énergies. Mis à part cela, le mode Big-Bang ! présente une liste de problèmes inhérents à sa formulation.

4.5.2.1 Problème de planéité

L'équation d'évolution de la courbure (3.53) est de la forme

$$\frac{d\Omega_K}{d \ln a} = (3w + 1)(1 - \Omega_K) \quad (4.151)$$

si l'on néglige l'apport récent de la constante cosmologique. Si w est constant, cette équation peut être intégrée facilement

De sorte que si la courbure actuelle est petite, ie $|\Omega_K| = |\Omega_0 - 1| < 0,1$, comme les observations tendent à le prouver, il faut alors

$$|\Omega_K(z_{eq}) - 1| < 3 \times 10^{-5} \quad (4.152)$$

at equality and

$$|\Omega_K(z_p) - 1| < 10^{-60} \quad (4.153)$$

à l'époque de Planck. Le modèle du Big-Bang ne donne aucune explication à une si petite courbure au début de l'Univers. Nous aurions pu conclure avec la même conclusion de l'analyse dynamique de la section 3.2.2 qui concluait que, pour toute équation d'état $w > 0$, le point fixe $\Omega_K = 0$ était instable.

Il faudrait donc déterminer un mécanisme conduisant à une si petite courbure ou expliquer pourquoi nous avons strictement $\Omega_K = 0$. Une solution est déjà suggérée sur la figure 3.6 qui illustre que $\Omega_K = 0$ est un attracteur si l'Univers est dominé par un composant de matière avec une équation d'état $w < -1/3$.

À l'ère primordiale, tant que l'Univers est dominé par la matière ordinaire, il est toujours très plat, de sorte que le problème de la planéité peut en réalité être considéré comme un problème d'âge : pourquoi notre Univers paraît-il si jeune ?

4.5.2.2 Problème d'horizon

Le principe cosmologique, qui impose l'homogénéité et l'isotropie de l'espace, est au cœur des solutions de Friedmann et Lemaître. Par construction, ils ne peuvent expliquer l'origine de cette homogénéité et de cette isotropie. Il serait donc plus satisfaisant de trouver une justification à ce principe.

D'un point de vue observationnel, le rayonnement CMB conforte cette hypothèse. Son isotropie pourrait s'expliquer facilement si les photons étaient émis une fois le contact causal établi entre eux. Pour cela, les photons doivent être en contact causal depuis le découplage. Pour calculer la taille des régions causalement connectées au découplage, nous travaillons en temps conforme (voir Fig. 3.12).

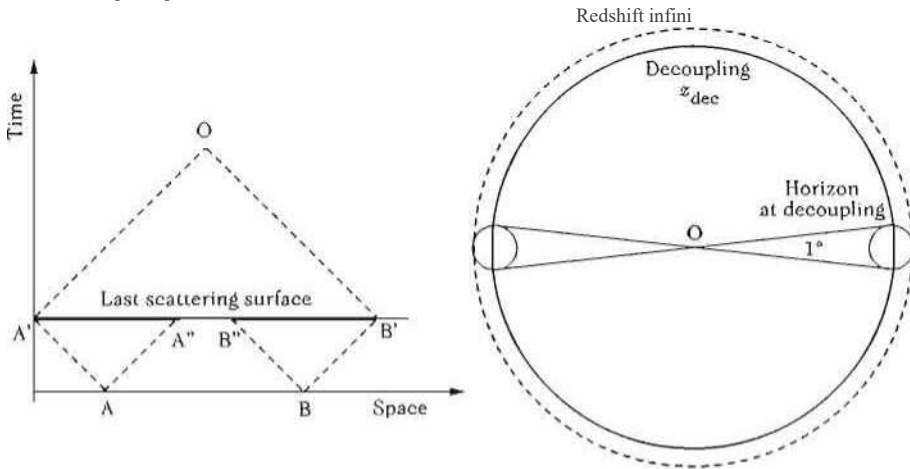


Fig. 4.17 (à gauche) : La lumière passée. Le cône d'un observateur O coupe la surface de dernière diffusion sur une sphère de diamètre $A'B'$ qui détermine la taille de l'Univers observable. La taille des régions causalement connectées ($A' A''$,...) est déterminée par l'intersection avec le futur cône de lumière de l'hypersurface du Big-Bang. (à droite) : L'horizon au découplage et la surface de dernière diffusion.

Comme le montre la figure 4.17, les régions en contact causal au moment du découplage sont plus petites que la taille de l'Univers observable. Ainsi, la surface de la dernière diffusion comprend environ

$$N \sim \left(\frac{r_{dec}}{r_H} \right)^2 \sim 8(1 + Z_{dec})^{3/2} \sim 10^5 - 10^6$$

régions en contact causal. Une telle région causale au découplage est maintenant observée sous un angle

$$\theta \sim 2 \frac{r_{dec}}{r_H} \sim 1^\circ. \quad (4.154)$$

Il est difficile d'expliquer pourquoi la température du fond diffus cosmologique est la même jusqu'à $10^{-3} \%$ dans l'ensemble du ciel, alors que ce dernier est composé d'environ 10^6 régions causalement indépendantes. Le modèle cosmologique standard ! prédit que seules de petites régions de la surface de la dernière diffusion devraient être corrélées, alors que les échelles plus grandes devraient nécessairement être décorrélées.

Une autre façon de formuler le problème de l'horizon est de donner une estimation du nombre de cellules initiales, avec une longueur caractéristique initiale de la taille de Planck, présentes aujourd'hui dans l'Univers observable. Ce numéro est généralement d'ordre

$$N \sim \left(\frac{1 + z_{pl}}{\ell_p H_0} \right)^3 \sim 10^{87}.$$

Là encore, l'étude des galaxies tend à montrer que leur répartition est homogène à plus grande échelle, il est donc difficile de comprendre comment des conditions initiales fixées sur 10^{87} régions causalement indépendantes peuvent apparaître à ce point identiques (au niveau 10^{-5}).

Le problème de l'horizon est lié à l'état d'équilibre thermodynamique dans lequel se trouve l'Univers, discuté dans la section 4.2. Le principe cosmologique impose une condition initiale non causale aux sections spatiales de l'Univers et notamment que la température du bain thermal soit la même en tout point.

Le problème de l'horizon est donc étroitement lié au principe cosmologique et est donc profondément ancré dans les solutions de Friedmann-Lemaître.

4.5.2.3 Problème de l'origine des structures

Les solutions de Friedmann-Lemaître décrivent des espaces-temps strictement homogènes et isotropes. Cependant, l'Univers est rempli de nombreuses structures dont l'origine et les propriétés ne peuvent être abordées et expliquées dans ce cadre. Tel qu'il est formulé, le -modèle cosmologique est donc incomplet.

Puisque la gravité est purement attractive, toute perturbation de densité aura tendance à s'effondrer pour créer une structure. On peut ainsi penser que de petites fluctuations, d'origine thermique par exemple, pourraient expliquer la structure à grande échelle. Mais ce mécanisme n'est en réalité pas très efficace dans un Univers en expansion (voir chapitre 5). Tant que l'Univers est dominé par les radiations, la pression des radiations agit contre l'effondrement gravitationnel et retarde ainsi le début de la formation de structures à grande échelle. Ainsi, les fluctuations de densité ne peuvent augmenter de manière significative que pour $z > z_{eq} \sim 10^4$. Il faudrait donc trouver un mécanisme capable de générer des fluctuations de densité d'amplitude non négligeable. De telles fluctuations existent bel et bien et ont été détectées par le satellite COBE.

Ainsi, un nouveau problème d'horizon apparaît. Dans un Univers dominé par les radiations et la matière, le rayon causal, à peu près le rayon de Hubble, augmente plus rapidement que la longueur d'onde physique des perturbations. Ainsi, les longueurs d'onde de toutes les perturbations cosmologiques observées aujourd'hui devaient être plus grandes que le rayon causal au début de l'expansion de l'Univers. En particulier, le satellite COBE a détecté des fluctuations de température avec des longueurs d'onde plus grandes que l'horizon au découplage. De plus, ces fluctuations semblent avoir un spectre invariant en fonction de l'échelle.

Ces perturbations initiales de densité peuvent-elles être générées par un mécanisme causal ? Comment expliquer leur amplitude et leur spectre ?

Un autre problème lié à l'existence de ces perturbations est le *problème trans-planckien*. Toutes les longueurs d'onde physiques observées aujourd'hui étaient plus petites que l'échelle de Planck à un moment donné dans le passé. Ainsi, ils ont dû être décrits par une physique que nous ne connaissons pas. Jusqu'à quel point les observations cosmologiques sont-elles suffisamment robustes contre l'hypothèse de cette physique (inconnue) ? Peuvent-ils être utilisés pour extraire des informations sur cette physique ? A noter que le rayon de Hubble devient également plus petit que la longueur de Planck, il est donc difficile de savoir si la description de l'Univers par un espace-temps classique est encore acceptable. Ce problème est lié à l'existence d'une singularité initiale. Cette version du trans-Planckien Le problème est légèrement différent de celui présenté au chapitre 8 où seule la longueur d'onde des perturbations devient trans-planckienne, alors que le rayon de Hubble reste plus grand que la longueur de Planck.

4.5.2 4 Problème de fiabilité

Pendant que l'Univers se refroidit, certaines symétries peuvent être spontanément brisées (voir chapitre 11). Lors de ces transitions de phase, des défauts topologiques peuvent se

former.

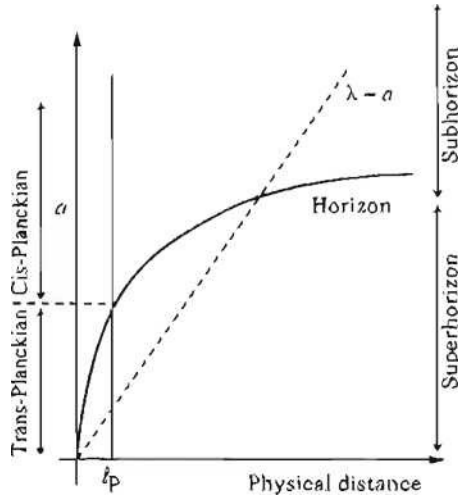


Fig. 4.18 Problème d'horizon pour a. perturbation avec la longueur d'onde physique λ et les problèmes transplanckiens liés à l'existence d'une singularité. Toutes les longueurs physiques, en particulier les longueurs d'onde, deviennent plus petites que l'échelle de Planck. Le rayon de Hubble devient également plus petit que l'échelle de Planck et la description classique de l'espace-temps peut être remise en question dans cette limite.

En particulier, dans le cadre de la grande théorie unifiée, les interactions non gravitationnelles sont supposées avoir une symétrie décrite par un groupe G . Ce groupe doit être brisé pour donner naissance à celui observé à basse énergie, à savoir $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ (voir chapitre 2). Si le groupe G est un groupe simple, alors lors de cette brisure de symétrie, on réalise des monopôles d'une masse d'ordre $M_{\text{monopôle}} \sim M_{\text{GUT}} \sim 10^{16} \text{ GeV}$. Puisque les champs donnant naissance à ces monopôles ne sont pas a priori corrélés sur des distances supérieures à l'horizon causal, on peut supposer qu'ils sont créés avec une densité unitaire par volume lors de la transition de phase, $n_{\text{monopôle}} \sim (2\pi T_{\text{GUT}})^{-3}$. On obtient que la densité monopôle est $\rho_{\text{monopôle}} \sim n_{\text{monopôle}} M_{\text{monopôle}}$.

Chez $T > T_{\text{GUT}}$ l'Univers est dominé par les radiations de sorte que $Z_{\text{GUT}} \sim 1$ (voir Chapitre 11 pour une description des transitions de phase dans le cadre cosmologique). Il s'ensuit que

$$\Omega_{\text{monopôle}} h^2 \sim 10^{17} \left(\frac{T_{\text{GUT}}}{10^{16} \text{ GeV}} \right)^3 \left(\frac{M_{\text{monopôle}}}{10^{16} \text{ GeV}} \right). \quad (4.155)$$

Dès leur formation, de telles couches domineraient donc le contenu matière de l'Univers. Les effets de cette matière sur l'évolution de l'Univers seraient catastrophiques. Ce problème était initialement appelé le *problème du monopôle*.

En conclusion, la surproduction de ressources massives dans l'Univers primordial est attendue dans divers cadres théoriques, en particulier la grande théorie unifiée. Nous devrions expliquer pourquoi ces changements n'affectent pas la dynamique de l'Univers.

4.5 2 5 Problème du secteur sombre

Selon les conclusions des observations cosmologiques, seulement environ 5 % de la matière cosmique, dite baryonique, se trouve sous la forme attendue par le modèle standard de la physique des particules. Il faut postuler l'existence d'un secteur sombre représentant 95% de la matière et comportant au moins deux composantes :

- la matière noire, représentant $23 \pm 3\%$ de la matière. Cette matière non relativiste ne peut être sous forme baryonique. La production de reliques dans l'Univers primordial fournit un mécanisme qui pourrait conduire à une telle matière. Il faudrait déterminer les interactions impliquées et la nature de cette particule.
- l'énergie sombre, qui représente $72 \pm 3\%$ de la matière, est nécessaire pour expliquer la récente accélération de l'Univers. La constante cosmologique est depuis longtemps une candidate naturelle.

cosmologique satisfaisant ne peut se contenter d'une compréhension approfondie de ce secteur sombre. En particulier, nous devrions comprendre pourquoi la matière noire et la matière baryonique ont des abondances comparables. Il ne faut pas oublier non plus que la baryogenèse est encore un processus encore mal compris. Ce mécanisme devrait expliquer pourquoi $p = n/n_y \sim 10^{-10}$. Quant à l'énergie noire, deux possibilités sont à considérer :

- la constante cosmologique est une manifestation du vide. Dans ce cas, sa densité d'énergie peut être calculée à partir de la théorie de la physique des particules. Or, toute énergie du vide provenant d'une théorie compatible avec le mode standard de la physique des particules devrait être au moins de l'ordre de l'énergie de l'échelle électrofaible de rupture de symétrie, $\sim 1 \text{ TeV}$. Mais la valeur cosmologique est de l'ordre du

10^{-3} eV . Le désaccord entre l'estimation théorique et la valeur cosmologiquement déterminée est ainsi au moins de l'ordre de 10^{60} , et peut aller jusqu'à 10^{120} si on extrapole à l'échelle de Planck. Ce problème est connu sous le nom de problème *cosmologique constant*.

- énergie sombre est une quantité dynamique. Ces modèles seront décrits en détail au chapitre 13. Cependant, on pourrait se demander pourquoi cette matière commence seulement aujourd'hui à dominer le contenu matériel de l'Univers. C'est ce qu'on appelle le *problème des coïncidences*.

Le problème de la coïncidence est en réalité plus général et repose sur le fait que les différents composants de la matière sont aujourd'hui dans le rapport suivant

$$ClyO : \text{ftbO} : n_{c0} : \Lambda_0 \sim 10^{-3} : 1 : 5 : 14. \quad (4.156)$$

Comment comprendre que ces composants de la matière, dont l'origine dépend a priori de mécanismes différents, se présentent dans un tel rapport ? Pourquoi vivons-nous à une époque où les deux composantes du secteur sombre sont en quantités comparables ? Notez également que l'existence de la structure et les observables cosmologiques sont très sensibles à ces ratios.

Pour finir, notons que toute information obtenue sur ce secteur sombre a été déduite de l'observation de la matière lumineuse. Ces conclusions s'appuient sur une hypothèse centrale : la validité de la relativité générale pour décrire la gravité. Cette hypothèse est si centrale qu'il est indispensable de la tester à des échelles cosmologiques. Ce dernier point se confond avec

la constance effective des constantes fondamentales de la Nature aux échelles de temps cosmologiques.

Notons encore une fois que ces conclusions ont été obtenues en imposant que l'Univers soit bien décrit par un espace de Friedmann-Lemaître. La plupart des observations, et en particulier les données de supernovæ, dont on déduit la récente accélération de l'Univers, sont localisées dans notre cône de lumière passé. Cela implique que les dépendances dans l'espace et dans le temps sont en général dégénérées. Cette dégénérescence est levée par l'hypothèse de symétrie dans le cadre des modèles de Friedmann-Lemaître. Les conclusions pourraient donc être différentes dans un Univers dépourvu de ces symétries. Par exemple, les données des supernovæ peuvent être reproduites dans un Univers à symétrie sphérique, rempli uniquement de poussière (espace de Lemaître-Tolman-Bondi décrit au chapitre 3). L'expansion d'un tel Univers n'est pas accélérée mais l'observation de supernovæ serait interprétée avec une fausse hypothèse de symétrie et conduirait à conclure que l'expansion s'accélère, alors qu'elle ne reflète en réalité que la dépendance spatiale de la métrique. Encore une fois, il convient de vérifier autant que possible le principe copernicien et de vérifier toutes les conclusions que l'on peut déduire des observations : elles dépendent des hypothèses faites sur la structure de l'espace-temps.

4.5.3 Conclusion

Le modèle Big-Bang est un bon modèle standard, donnant une description satisfaisante de l'Univers à grande échelle, où il peut être décrit par un espace-temps homogène et isotrope. Elle pose néanmoins divers problèmes que la cosmologie primordiale entend résoudre. À des températures plus élevées, la physique est moins bien comprise et ses implications cosmologiques peuvent offrir des solutions à certains de ces problèmes, mais peuvent également contraindre cette physique.

Il est donc important pour la cosmologie primordiale de disposer d'un modèle standard tel que le Big Bang. Ce point de départ permettra de formuler quelques variantes, de les tester et d'étudier leur phénoménologie. Le reste de ce livre est dédié à ce programme.

Les références

- [1] RA ALPHER, H. BETHE et G. GAMOW, « L'origine des éléments chimiques » » *Phys. Le révérend Lett.* 73, 803, 1948.
- [2] G. GAMOW, « L'évolution de l'Univers », *Nature* 162, 680, 1948.
- [3] RA ALPHER et R. HERMAN, « Evolution of the Universe », *Nature* 162, 774, 1948.
- [4] E. HUBBLE, « Une relation entre la distance et la vitesse radiale parmi les nébuleuses extra-galactiques », *Proc. Natl. Acad. Sci. États-Unis* 15, 168, 1929.
- [5] SK WEBB, *Mesurer l'Univers, l'échelle de distance cosmologique*, Springer-Verlag, 1999.
- [6] W. FREEDMANN, « La constante de Hubble et l'âge d'expansion de l'Univers », *Phys. Rapport* 333, 13, 2000.
- [7] W. FREEDMANN *et coll.*, « Résultats finaux du projet clé du télescope Hubble visant à mesurer la constante de Hubble », *Astrophys. J.* 553, 47, 2001.
- [8] M. BIRKINSHAW, « L'effet Sunyaev-Zeldovich », *Phys. Rapport* 310, 97, 1999.
- [9] S. PERLMUTTER *et al.*, « Mesure de Q et A à partir de 42 hauteurs — z supernovæ », *Astrophys. J.* 517, 565, 1999.
- [10] AG RIESS *et al.*, 'Preuves d'observation provenant de supernovæ pour un Univers en accélération et une constante cosmologique', *Astron. J.* 116, 1009, 1998.
- [11] A. FILIPPENKO, « L'Univers en accélération et l'énergie noire : preuves du type la supernovæ », *Lect. Notes Phys.* 646, 191, 2004.
- [12] U. SELJAK *et al.*, « Analyse des paramètres cosmologiques, y compris le biais SDSS Ly- α de la forêt et de la galaxie : contraintes sur le spectre primordial des fluctuations, la masse des neutrinos et l'énergie sombre », *Phys. Rev. D* 71, 103515, 2005.
- [13] B. CHABOYER, « L'âge de l'Univers », *Phys. Rapport* 307, 23, 1998.
- [14] JJ COWAN, F.-K. THIELEMANN et JW TRURAN, 'Datation radioactive des éléments ', *Annu. Révérend Astron. Astrophysique.* 29, 447, 1991.
- [15] R. CAYREL *et al.*, 'Mesures des âges stellaires à partir de la désintégration de l'uranium', *Nature* 409, 691, 2001.
- [16] E. KOLB et M. TURNER, *The early Universe*, Addison Wesley, 1990.
- [17] R. TOLMAN, *Relativité, thermodynamique et cosmologie*, Cambridge University Press, 1934.
- [18] J. BERNSTEIN, *Théorie cinétique dans l'univers en expansion*, Cambridge University Press, 1988.
- [19] PJE PEEBLES, 'Abondance primordiale d'hélium et boule de feu primitive. II', *Astro - phys. J.* 146, 542, 1966.
- [20] J. BERNSTEIN, LS BROWN et G FEINBERG, « Production cosmologique d'hélium simplifiée », *Rev. Mod. Phys.* 61, 25, 1989.
- [21] PJE PEEBLES, *Cosmologie physique*, Princeton University Press, 1971.

- [22] S. WEINBERG, *Gravitation et cosmologie : principes et applications de la théorie générale de la relativité*, John Wiley and Sons, 1972.
- [23] S. SARKAR, « Nucléosynthèse Big-Bang et physique au-delà du mode standard ! », *Rep. Prog. Phys.* 59, 1493, 1996.
- [24] K.Å. OLJE, G. STEIÛMAN et TP WALKER, « Nucléosynthèse primordiale : théorie et observations », *Phys. Rep.* **333**, 389, 2000.
- [25] V. MÜKHANOV, « Nucléosynthèse sans ordinateur ¹ », *Int. J. Théor. Phys.* 43, 669, 2004.
- [26] RV WAGONER, 'Sur la synthèse d'éléments à très hautes températures', *Astrophys. J.* **148**, 3, 1967.
- [27] [http : //www-thphys.physique.ox.ac . fr/users/SubirSarkar/bbn . html](http://www-thphys.physique.ox.ac.fr/users/SubirSarkar/bbn.html).
- [28] KM NOLLETH et S. BURLES, « Estimation des taux de réaction et des incertitudes de la nucléosynthèse primordiale », *Phys. Rev. Lett.* **61**, 123505, 2000.
- [29] YI IZOTOV et al., « Abondance d'hélium dans les galaxies compactes bleues les plus (méta)déficientes », *Astrophys. J.* 527, 757, 1999.
- [30] V. LURIDJANA et al., 'L'effet du renforcement collisionnel des fines de Balmer sur la détermination de l'abondance primordiale de l'hélium', *Astrophys. J.* **592**, 846, 2003.
- [31] YI IZOTOV et TX THUAN, « Effets systématiques et nouvelle détermination de l'abondance primordiale de 4He et D/H à partir d'observations de galaxies compactes bleues », *Astrophys. J.* **602**, 200, 2004.
- [32] D. KJRKMAN et al, 'La densité cosmologique des baryons du deutérium à l'hydrogène vers le système d'absorption QSO : D/H vers Q1243+3047', *Astrophys. J. Supplément.* 149, 1, 2003.
- [33] S. G- RYAN et al., « Lithium primordial et nucléosynthèse du Big Bang », *Astrophys. J.* **523**, 654, 1999.
- [34] DN SPERGEL et al, 'Observations de la sonde d'anisotropie micro-ondes Wilkinson (WMAP) de première année : détermination des paramètres cosmologiques ¹ », *Astrophys. J. Suppl.* **148**, 175, 2003.
- [35] A. ÜOC et al., « Mise à jour de la nucléosynthèse du Big Bang confrontée aux observations WM AP et à l'abondance des éléments légers », *Astrophys. J.* **600**, 544, 2004.
- [36] K. OLIVE et E. SKILLMAN, « Une détermination réaliste de l'erreur d'abondance d'hélium primitive : étapes vers des abondances d'hélium nébulaire non paramétriques ! », *Astrophys. J.* 617, 29, 2004.
- [37] J. LINSKY, « Deutérium atomique/Hydrogène dans la Galaxie », *Space Sci. Rev.* 106, '49, 2003 ; HW MOOS et al., « Abondances de deutérium, d'oxygène et d'azote dans le milieu interstellaire local : aperçu des premiers résultats de la mission FUSE », *Astrophys. J. Suppl.* 140, 3, 2002.
- [38] TM BANIA, RT ROOO et DS BALSËR, 'La densité cosmologique des baryons à partir d'observations de ^3He dans la Voie Lactée', *Nature* 415, 54, 2002.
- [39] R. CYBURT et al., 'Nouveaux Jimits BBN sur la physique au-delà du mode standardJ de He^4 ', *Astropart. Phys.* 23, 313, 2005.
- [40] A. PENZIAS et R. WILSON, 'Une mesure de la température excessive de l'antenne à

4080 Mc/s', *Astrophys. J.* **142**, L419, 1965.

- [41] R. DICKE, P. PEEBLES, P. ROLL et D. WILKINSON, « Rayonnement du corps noir cosmique », *Astrophys. J.* 142, 383, 1965.
- [42] G. SMOOT, *The CMB Spectrum*, dans *The cosmic Microwave Background*, CH Lineweaver et al.(eds.), NATO ASI séries 502, Kluwer Academie Publishers, 1997.
- [43] F.R. BOUCHET , J.-L. PUGET et J.-M. LAMARRE, *Le fond cosmique des micro-ondes* , dans *'Univers primordial*, Springer, 1999, pp. 103.
- [44] RB PARTRIDGE, *3K : le fond cosmique des micro-ondes*, Cambridge University Press, 1999.
- [45] PJE PEEBLES, 'Recombinaison du plasma primitif', *Astrophys. J.* 153, 1, 1968.
- [46] BJ JONES et RF WiSE, « Ionisation du plasma primitif », *Astron. Astrophysique* . 149, 144, 1985.
- [47] JC MATHER, « Conception du calibrateur du spectrophotomètre absolu à infrarouge lointain COBE », *Astrophys. J.* 512, 511, 1999
- [48] GF SMOOT et D. SCOTT, « Rayonnement de fond cosmique », dans *La revue de la physique des particules*, S. Eidelman et coll., Phys. Lett. B 592, 1, 2004.
- [49] D. FIXSEN et coll., «Le spectre de fond cosmique des micro-ondes à partir de l'ensemble complet de données COBE FIRAS», *Astrophys. J.* 473, 576, 1996.
- [50] R. SRINAND, P. PETITJEAN et C. LEDOUX, «La température de fond des micro-ondes au redshift de 2,3371», *Nature* 408, 931, 2000.
- [51] GFR ELLIS, R. MAARTENS et SD NEL, 'L'expansion de l'Univers', *Mois. Pas. R. Astron. Soc.* 184, 439, 1978.
- [52] M. FUKUGITA et PJE PEEBLES, « L'inventaire de l'énergie cosmique », *Astrophys. J.* 616, 643, 2004.

5

L'Univers inhomogène : les perturbations et leur évolution

Les espaces-temps de Friedmann-Lemaître sont des approximations qui ne donnent une bonne description de notre Univers qu'à très grande échelle. En fait, notre Univers n'est pas à proprement parler homogène et isotrope puisqu'il contient des structures telles que des galaxies, des amas de galaxies, etc. Dans les années 1980, on a compris que la structure à grande échelle pouvait résulter de l'amplification gravitationnelle des fluctuations de densité d'une pression moindre, fluide, la matière noire froide, voir Réf. [1-3].

L'objectif de ce chapitre est d'étudier des Univers de géométrie « proche » d'un espace-temps de Friedmann-Lemaître et de comprendre l'évolution des perturbations de densité sous l'influence de la gravité dans un espace-temps en expansion. Pour ce faire, nous commencerons par rappeler la limite newtonienne dans la section 5.1. Ensuite, nous nous concentrerons sur le cas relativiste général dans la section 5.2 pour présenter la théorie des perturbations cosmologiques. Cette partie, assez technique, est l'une des pierres angulaires de la cosmologie moderne, et est essentielle pour aborder les propriétés de la structure à grande échelle de l'Univers. Dans la section 5-3, nous étudierons quelques solutions de ces équations de perturbation. Les échelles caractéristiques à prendre en compte dans le cas général ainsi que la forme du spectre de puissance sont décrites à la section 5.4. Nous terminerons dans la section 5.5 par une description des observations de ces structures à grande échelle.

Les références [4-9] peuvent compléter ce chapitre.

5.1 Perturbations newtoniennes

Avant de développer le cas général de l'évolution des perturbations dans le cadre relativiste, concentrons-nous sur le cas simplifié de l'évolution des perturbations d'un fluide initialement homogène, dans le régime newtonien.

En fait, comme nous le verrons dans la section 5.4, une telle approche newtonienne est suffisante pour décrire l'évolution tardive des perturbations de densité au cours de l'ère de la matière à des échelles inférieures à Hubble. Une description générale de la dynamique gravitationnelle dans le cadre newtonien peut être trouvée dans la réf. [4].

5.1.1 Cas d'un espace statique

Dans un espace euclidien statique, les équations hydrodynamiques prennent la forme usua) [1 û] d'une équation de continuité et de l'équation d'Euler

$$d_t p + \mathbf{V} \cdot (\mathbf{p} \mathbf{v}) = 0, \quad (5.1)$$

$$d_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla P}{\rho} - \nabla \Phi, \quad (5.2)$$

pour un fluide de densité ρ , pression P et champ de vitesse $\mathbf{v}$, évoluant dans un champ gravitationnel de potentiel Φ .

5.1.1.1 Sans gravité

Si l'on néglige la gravité et décompose la densité en termes d'une composante homogène et d'une perturbation comme $\rho = \bar{\rho} + \delta\rho$ et la pression de la même manière que $P = \bar{P} + \delta P$, (5.1)

et (5.2) réduire à une équation d'onde unique

$$\partial_t^2 \delta\rho - \nabla^2 \delta P = 0. \quad (5.3)$$

Introduisons $\chi = (dP/d\rho)_a / \bar{P}$, appelé coefficient de compressibilité isotherme ou adiabatique, où a représente soit la température (T), soit l'entropie (S). Lorsque le temps de propagation de la chaleur est bref, l'écoulement peut être considéré comme isotherme, alors qu'il sera adiabatique s'il n'y a pas eu suffisamment de temps pour atteindre l'équilibre, ce qui est le cas pour les grandes longueurs d'onde. Dans ce dernier cas, nous en déduisons que l'équation d'onde

(5.3) prend la forme

$$\partial_t^2 \delta\rho - c_s^2 \nabla^2 \delta\rho = 0, \quad c_s^2 = \rho \chi_S = \left(\frac{\delta P}{\delta \rho} \right)_S. \quad (5-4)$$

Ainsi, les perturbations hydrodynamiques se propagent avec une amplitude constante et une vitesse c_s , la vitesse du son du fluide donné.

$$\omega^2 = \frac{4\pi^2 c_s^2}{\lambda_J^2} \left(\frac{\lambda_J^2}{\lambda^2} - 1 \right), \quad \lambda_J \equiv c_s \sqrt{\frac{\pi}{G_N \bar{\rho}}}. \quad (5-7)$$

5 J. 1.2 Effet de la gravité

Intéressons-nous maintenant à la gravité. Le potentiel gravitationnel est déterminé par le Poisson

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G_N \bar{\rho} \delta\rho, \quad (5-5)$$

de sorte que l'équation d'évolution pour les fluctuations de densité a maintenant un terme supplémentaire et

prend la forme

$$\partial_t^2 \delta\rho + \frac{c_s^2}{\bar{P}} \nabla^2 \delta P - \frac{4\pi G_N \bar{\rho}}{c_s^2} \delta\rho = 0.$$

En décomposant les perturbations en ondes planes comme $\delta\rho \propto \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)]$, on obtient la relation de dispersion

λ_J est la longueur de Jeans au-dessus de laquelle toute perturbation est instable et croît de façon exponentielle à mesure que

$$\delta\rho \propto \exp \left[\sqrt{4\pi G_N \bar{\rho} \left(1 - \frac{\lambda_J^2}{\lambda^2} \right)} t \right]$$

Qualitativement, la longueur de Jeans caractérise le passage d'un régime pour lequel l'évolution des perturbations est dominée, aux grandes longueurs d'onde, par la gravité ($\lambda > \lambda_J$) vers une région ($\lambda < \lambda_J$) où la gravité est négligeable et dans laquelle on récupère des ondes sonores. La valeur de la longueur de Jeans peut effectivement être déduite en considérant les deux temps dynamiques du problème. Le temps associé aux ondes sonores (c'est-à-dire le temps que met cette onde pour se propager sur une distance égale à sa longueur d'onde λ) est donné par $t_{\text{sound}} \sim \lambda/c_s$. Le temps d'effondrement gravitationnel pris par une structure de densité ρ qui s'effondre n'est pas $t_{\text{grav}} \sim (C_N \rho)^{-1/2}$. Ainsi, aux petites longueurs d'onde, on a $t_{\text{sound}} < t_{\text{grav}}$ et la pression a le temps de compenser l'effondrement gravitationnel du fluide, qui reste ainsi quasi homogène. Lorsque λ devient plus grand que la longueur de Jeans, t_{sound} est plus grand que t_{grav} , la pression ne parvient plus à équilibrer la gravité et de grandes inhomogénéités peuvent se développer.

51.1.3 Aspects énergétiques

D'un point de vue énergétique, chaque point du fluide peut être vu comme un oscillateur d'harmonie dont le déplacement par rapport à sa position d'équilibre est noté s .

La vitesse de chaque élément du fluide est donc $\dot{s}$ et, en utilisant la conservation (5.1), la perturbation de densité est $\delta\rho = -\nabla \cdot \mathbf{V}$. L'équation de propagation (5.7) peut alors être intégrée pour donner, après moyenne sur un volume V , l'équation de conservation de l'énergie

$$\frac{d}{dt} \langle E \rangle = \langle E_K \rangle + \langle E_G \rangle + \langle E_{\text{el}} \rangle, \quad (5.8)$$

où $\langle E_K \rangle = \frac{1}{2} \langle \dot{s}^2 \rangle$ est l'énergie cinétique moyenne, $\langle E_G \rangle = -\frac{1}{2} \langle \nabla^2 s^2 \rangle$, la moyenne élastique de l'énergie, et $\langle E_{\text{el}} \rangle = -\frac{1}{2} \langle \nabla^2 s^2 \rangle$, l'énergie gravitationnelle moyenne. L'énergie cinétique prend la forme

$$\langle \dot{s}^2 \rangle = \langle \dot{b}^2 \rangle. \quad \text{un.}^2 = e^2 (t^2 - j_e^2),$$

On en déduit que l'énergie totale par unité de volume est

$$\langle E_M \rangle = \frac{1}{2} \langle \dot{s}^2 \rangle [\langle u^2 \rangle + \langle t^2 - q \rangle].$$

La relation de dispersion nous enseigne qu'il y a équipartition de l'énergie entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle (qui a deux contributions). L'énergie moyenne est donc donnée par

$$\langle E_M \rangle = \frac{1}{2} \langle \dot{s}^2 \rangle c^2 (k^2 - k_e^2), \quad (5-9)$$

et est, comme prévu, négatif pour les longueurs d'onde supérieures à la longueur de Jeans.

5.1.2 Cas d'un espace en expansion

Dans un espace en expansion, on peut introduire les coordonnées comobiles x par

$$\mathbf{r}(t) = a(t) \mathbf{x}, \quad (5.10)$$

où $a(t)$ est le facteur d'échelle. Le champ de vitesse est alors donné par

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}} = H \mathbf{r} + \dot{\mathbf{x}}, \quad (511)$$

où $u = H a$ est la vitesse appropriée.

5.1.2.1 Formulation eulérienne

Les équations (5-1) et (5.2) peuvent être réécrites en remarquant que, dans le cas précédent d'un espace-temps statique, les opérateurs dérivatifs temporels et spatiaux définis à partir de t et r étaient considérés comme indépendants. Ce n'est plus le cas ici, et il est pratique d'utiliser des dérivatives spatiales définies par rapport aux coordonnées comoving x . Par conséquent, le gradient $V_{,i}$ est remplacé par $V_{,i}/a$, et la dérivée temporelle $\dot{\rho}(r, t)$, qui supposait auparavant une constante r , devient $\dot{\rho}(x, t) - Hx V_{,i} \rho(x, t)$. Les deux équations sont ainsi réexprimées en coordonnées comobiles comme

$$\rho(x, t) + 3H\rho(x, t) + \frac{1}{a} \nabla \cdot [\rho(x, t)u(x, t)] = 0, \quad (5.12)$$

et

$$\ddot{u}(x, t) + Hu(x, t) - \frac{1}{a} \nabla \cdot (\rho u) = - \frac{1}{a} \nabla \cdot (\rho \dot{u}) - \frac{1}{a} \nabla \cdot (\rho \dot{u}) - \frac{1}{a} \nabla \cdot (\rho \dot{u}), \quad (5.13)$$

où nous avons utilisé que $x = ar$. Si le contraste de densité, δ , est défini par

$$\rho = \bar{\rho}(1 + \delta(x, t)), \quad (5.14)$$

alors la première équation peut être réécrite comme l'équation de continuité

$$\dot{\delta} + \nabla \cdot [(1 + \delta)u] = 0, \quad (5.15)$$

où désormais, sauf indication contraire, nous omettons la référence aux coordonnées comobiles qui est implicite dans ce qui suit. Après quelques manipulations, une équation d'évolution pour δ peut être déduite de ces équations

$$\ddot{\delta} + \frac{1}{a} \dot{\delta} = -\frac{4\pi G}{3} \bar{\rho} \delta + \frac{1}{a} \nabla \cdot (\rho \dot{u}) - \frac{1}{a} \nabla \cdot (\rho \dot{u}). \quad (5.16)$$

A noter que cette équation ne fait aucune hypothèse sur δ et en particulier elle ne suppose pas que δ soit petit par rapport à 1. Le potentiel gravitationnel est déterminé par l'équation de Poisson, qui prend alors la forme

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \bar{\rho} a^2 \delta. \quad (5.17)$$

En résolvant (517), on obtient que le potentiel gravitationnel est donné par

$$\Phi(x, t) = -\frac{4\pi G}{3} \bar{\rho} a^2 \delta(x, t). \quad (5.18)$$

Ces équations fournissent une description eulérienne de la dynamique.

5.1.2.2 Description lagrangienne

Une approche lagrangienne peut également être développée en suivant les trajectoires des particules ou des éléments fluides au lieu de considérer la dynamique des champs de densité et de vitesse.

La quantité centrale est alors le champ de déplacement $X(q,i)$, qui mappe la position initiale d'une particule étiquetée q dans sa position eulérienne au temps t selon

$$x(\mathbf{x}) = q + X(q,t).$$

L'équation du mouvement pour les trajectoires de particules $x(t)$ est alors

$$x + iHx = \text{un}^2$$

ou de manière équivalente en termes de temps conforme q

$$x'' + \dots = -V_x \mathbf{x}.$$

En prenant la divergence de cette équation, on obtient une équation pour le champ de déplacement

$$[X'' + \text{ft}X'] = |\mathbf{f}|_m [J(q,t) - 1], \quad (5.19)$$

où nous avons utilisé l'équation de Poisson et le fait que $\text{pd}^3 q = p[1 + J(x,i)]d^3 x$, ce qui implique que

$$1 + 6(x, j_e) - \frac{j_e}{\det(\wedge + X_{id}) J(q > ty)},$$

où $X_{ij} = dX J dq_i$ et $J(q, y, t)$ est le jacobien de la transformation de l'espace eulérien à l'espace lagrangien. Notez que le gradient en coordonnées eulériennes peut être transformé en un gradient en coordonnées lagrangiennes comme

Une telle description peut être utile pour certains problèmes et plus de détails peuvent être trouvés dans les réf. [11,12]. Notez cependant que lorsqu'il y a *she/1 traversant*, c'est-à-dire lorsque les éléments fluides avec des positions initiales différentes q se retrouvent à la même position eulérienne x , le jacobien disparaît et le champ de densité devient singulier. À ce stade, la description de la dynamique en termes de cartographie ne tient plus.

5.1.2.3 Systèmes linéarisés

Supposons maintenant que la densité du fluide ne soit que faiblement perturbée par rapport à la configuration homogène. Cela se traduit par les deux conditions

$$\left(\frac{ut}{d}\right)^2 \ll \delta$$

où u est la vitesse caractéristique du fluide et d la longueur de cohérence de la densité par - turbations. La deuxième condition implique que les gradients doivent être faibles. Rappelons que dans un Univers plat sans constante cosmologique, l'équation de Friedman implique que $\dot{a}/a = \sqrt{8\pi G \rho} = 1$ pendant l'ère dominée par la matière (depuis $a \propto t^{2/3}$).

En linéarisant (5.16), on obtient l'équation de propagation

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} = \frac{c_s^2}{a^2} \Delta \delta + 4\pi G_N \bar{\rho} \delta. \quad (5.20)$$

On récupère la longueur du Jeans définie par (5.7). Contrairement au cas d'un Univers statique, la longueur du Jeans dépend désormais du temps via p . Une perturbation de longueur d'onde donnée pourra ainsi passer d'un régime d'onde sonore à un régime d'effondrement gravitationnel, et ce à un instant dépendant de la valeur de la longueur d'onde.

5.1.2.4 Croissance des perturbations de densité

Pour un fluide de matière avec une pression négligeable, (5.20) est une équation différentielle linéaire du second ordre impliquant uniquement le temps. On peut donc chercher des solutions de la forme

$$d(\mathbf{x}, t) = D_+(t)s_+(\mathbf{x}) + D_-(t)e_-(\mathbf{x}),$$

où les fonctions $s(\mathbf{x})$ correspondent au champ de densité initial. Nous appellerons D_+ le mode de croissance et D_- le mode de décroissance. Les fonctions D sont des solutions de l'équation

$$\mathcal{L}D + 2H(\dot{D})Z - |w|^2(i)Q_m(t)D = 0, \quad (5.21)$$

où nous avons exprimé la densité moyenne de matière comme $4\pi G_N \bar{\rho}_m(t) = |H|^2 f_m(t)$. Pour un univers plat sans constante cosmologique ($\Omega_m = 1$, $a \propto t^{2/3}$), on peut vérifier que

$$D_+(t) \propto tV^3 \propto a(t), \quad D_-(t) \propto t^{-1} \propto a^{-3/2}(t). \quad (5.22)$$

Dans le cas général, cette équation doit être intégrée numériquement. Un moyen pratique de la résoudre consiste à utiliser le facteur d'échelle a comme coordonnée temporelle, de sorte que (5.21) prenne la

$$d^2 D / da^2 + 2\dot{D} / \dot{a} + 2\Omega_m / H^2 a^5 D = 0, \quad (5.23)$$

où nous avons utilisé le fait que $4\pi G_N \bar{\rho}_m = 3H^2 \Omega_m a^{-3}$ et supposons que $\Omega_0 = 1$.

On peut vérifier que $D_- = H$ est une solution. La deuxième solution peut alors être obtenue à partir de la méthode de variation des paramètres comme

$$D_+(a) = \frac{5H(a) \int^a da'}{2H_0 \int_0^a [a'E(a')]^3}, \quad (5.24)$$

où $E(a) = H(a)/H_0$ est donné en (3.39). La constante de normalisation a été choisie de telle sorte que dans un Univers dominé par la matière, nous récupérons $D_+ \propto a$.

A titre d'exemple, dans un Univers avec $\Omega_0 = 1$ et $f_m < 1$, on peut montrer que les modes de décroissance et de croissance sont donnés par

$$D_- = \sqrt{\frac{1+x}{x^3}}, \quad D_+ = 1 + \frac{3}{x} + 3D_-(x) \ln[\sqrt{1+x} - \sqrt{x}] \quad (5.25)$$

où $x = \frac{a}{a_0} - 1$. Notez que lorsque $x \rightarrow 0$, c'est-à-dire lorsque $x \gg 1$, $D_+ \rightarrow 1$ et $D_- \sim 1/x$ pour que les perturbations cessent de croître.

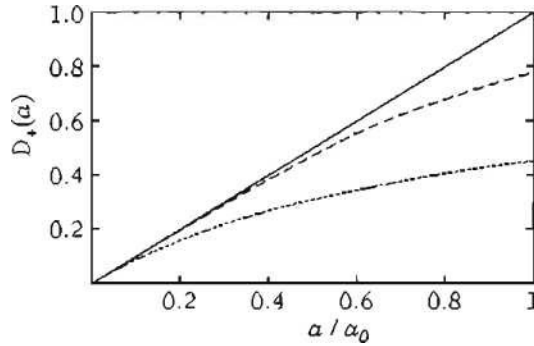


Fig. 5.1 Evolution of the growing mode of the density contrast, $D_+(a)$, as a function of the scale factor, a , for $Q_{m0} = 1$ [solid line], $(\Omega_{m0}, \Omega_{\Lambda 0}) = (0.3, 0.7)$ [dashed line] and $(n_{m0}, n_{\Lambda 0}) = (0.5, 0)$ [dotted line].

Dans des cas plus généraux, (5.24) pour D_+ doit être intégré numériquement, comme il est illustré sur la Fig. 5.1. Il a été montré [13] que pour un modèle Λ CDM, il est bien approximé par

$$D_+ \approx \frac{5}{\frac{1}{\Omega_{m0}} + (1 + \frac{\Omega_{\Lambda 0}}{\Omega_{m0}})^{1/3}} \quad (5.26)$$

En fait, lorsque $K = 0$, on peut vérifier [14], en utilisant la solution (3.46) des équations de Friedmann, que

$$D_+ = {}_2F_1 \left[1, \frac{1}{3}; \frac{11}{6}; -\sinh^2 \left(\frac{3\alpha t}{2} \right) \right] \sinh^{2/3} \left(\frac{3\alpha t}{2} \right),$$

where $\alpha = H_0 \sqrt{\Omega_{\Lambda 0}} = \sqrt{\Lambda/3}$ and ${}_2F_1$ is a hypergeometric function.

5.1.2.5 Le paramètre Hubble de la fonction de croissance

L'équation (5.23) peut également être vue comme une fonction de $E(a)$ une fois réécrite sous la forme

$$\frac{dE^2}{da} + 2 \frac{3}{5} \frac{d^2 B}{da^2} \frac{1}{a} = E^2 - 3 \frac{\Omega_{m0}}{a^5} D \left(\frac{dD}{da} \right)$$

Cette équation du premier ordre pour E^2 est facilement intégrable pour donner

$$E^2(z) = -3\Omega_{m0} (1+z)^2 \left(\frac{dD}{dz} \right)^{-2} \int_z^\infty \frac{D}{1+z} \frac{dD}{dz} dz, \quad (5.27)$$

en termes de redshift $1 + a = a^*/a$. Il s'ensuit que pour la classe des modèles Λ CDM, il existe une rigidité entre la dynamique de fond et la croissance d'une structure à grande échelle. Une telle fonctionnalité peut être utile pour tester ce modèle (voir Chapitre 12).

5.1.2.6 Relation densité-vitesse

Puisque $\delta a D(t)$, (5.15), implique que

$$\theta(x,t) = \frac{1}{2} u(x,t) = -\frac{1}{2} (Q_{m0,nA0}) < 5, \quad (5.28)$$

avec

$$\frac{1}{(n_{m0}, n_{A0})} = \frac{d}{dt} \wedge \left(\frac{a}{a_0} \right). \quad (5.29)$$

et Dans un

Il existe de nombreuses approximations analytiques pour cette fonction. Par exemple, Réf. [13] suggère

$$\frac{1}{2} (\theta_{m0} > \theta_{A0}) = \frac{1}{2} + 2^{\theta_{m0}}$$

Notez que θ représente les fluctuations locales de la constante de Hubble. Il s'agit d'une - grandeur observable, indépendante de la valeur de la constante de Hubble. En utilisant (5.13), il s'ensuit que le champ de vitesse a la forme générale

$$U = -\frac{2}{3} \frac{(\theta_{m0}, n_{A0})}{ci H J \pi i} \quad (5, 30)$$

où $es-tu$ est une fonction vectorielle arbitraire.

En reprenant l'exemple d'un Univers plat sans constante cosmologique, la solution (5.22) implique que

$$\frac{1}{2} = 1, u_+ = -t^{1/3} V < \hat{i} >, \quad u_- = t^{-1/3} V < \hat{i} >. \quad (5.31)$$

Ainsi, le mode croissant correspond à un champ de vitesse descendant vers le puits de potentiel, qui augmente effectivement δ . Le mode décroissant correspond à une configuration où le fluide s'échappe des puits de potentiel et tend à effacer les fluctuations initiales.

Le champ de vitesse étant désormais observable [15], il ouvre la possibilité de tester la dynamique gravitationnelle et fournit un moyen de mesurer les paramètres cosmologiques.

5.12.7 Potentiel gravitationnel

En régime linéaire, et dans l'approche newtonienne que nous avons suivie dans cette section, le potentiel gravitationnel peut être obtenu à partir de l'équation de Poisson (5.5) de sorte qu'il se comporte comme $\delta D_+(t)/a(t)$. Il est donc constant dans un espace-temps d'Einstein-de Sitter ($\Omega_m = 1, K = 0$ et $A = 0$) ; voir (5.22).

L'amplitude typique de la fluctuation de densité est généralement caractérisée par σ_{Φ} ; voir définition (5.45) ci-dessous. L'équation de Poisson (5.5) nous permet d'estimer l'amplitude typique du potentiel gravitationnel comme

$$\sigma_{\Phi} = \frac{3}{2} \Omega_{m0} \left(\frac{8 \text{ Mpc}}{H_0^{-1}} \right)^2 \sigma_8.$$

Il s'ensuit que $\langle \delta \rangle \sim 10^{-5}$ si $\langle \delta \rangle \sim 1$. Cette estimation a deux conséquences. Premièrement, cela implique que δ peut être traité au premier ordre dans les perturbations même si la densité

246 L'Univers inhomogène

le contraste est entré dans le régime non linéaire. Deuxièmement, si le spectre de puissance est (presque) invariant à l'échelle, comme le prédit l'inflation (voir chapitre 8), alors cette amplitude du potentiel gravitationnel est son amplitude typique à toutes les échelles.

5.1.3 Prédications et observables

Nous avons caractérisé les champs de densité et de vitesse du fluide de matière cosmique. Le champ de densité résulte de l'effondrement gravitationnel des perturbations primordiales de la

densité. Dans cet ouvrage, nous tenterons de présenter les modèles capables de générer ces fluctuations primordiales. Il est cependant important de discuter certains aspects de la comparaison des prédictions que nous ferons avec l'Univers observé.

5.1-3.1 La nécessité d'une approche statistique. I

Notons tout d'abord que les fluctuations primordiales ne sont pas directement observables. Seuls différents objets, observés à différentes époques de leur évolution, sont accessibles. Par exemple, bien que $\delta(x)$, le champ des fluctuations primordiales, ne soit pas directement accessible, on peut observer les grandes structures de l'Univers (galaxies, amas...), et pourtant on ne peut en mesurer qu'une quantité limitée ! ensemble de propriétés de ces objets distribution spatiale.

Comme nous le verrons plus loin, les modèles de l'Univers primordial permettent de prédire les propriétés statistiques des fluctuations primordiales dont nous pourrions déduire la distribution de certaines observables comme δ . Le champ de densité, ainsi que tous les autres champs, doivent donc désormais être considérés comme des variables stochastiques. Toute prédiction statistique dépendra donc des propriétés statistiques des perturbations initiales et de leur évolution dynamique. L'Univers est ainsi modélisé comme une réalisation stochastique d'un ensemble statistique de possibilités.

5.1.3.2 Description statistique J

Compte tenu de ce qui précède, nous traiterons donc de champs aléatoires classiques, comme le contraste de densité par exemple, et calculerons certaines de leurs propriétés statistiques comme la fonction de corrélation

$$\xi(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = \langle \delta(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle. \quad (5.32)$$

Tirons l'implication du principe copernicien lorsqu'il est appliqué statistiquement aux champs vivant dans un espace-temps de Friedmann-Lemaître.

L'homogénéité statistique signifie que tous les moments d'un champ aléatoire ou les probabilités de distribution conjointe $p[\delta(\mathbf{r}_1), \delta(\mathbf{r}_2), \dots]$ restent inchangés sous l'action de toute translation spatiale. Ces probabilités ne dépendent donc que des séparations relatives, telles que $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. L'isotropie statistique, par contre, exige que ces quantifications soient également invariantes sous l'action des rotations. Les probabilités ne dépendent donc finalement que du module des séparations relatives, à savoir par exemple $r_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$. Cette hypothèse peut être considérée comme la version statistique du principe cosmologique, mais ce n'est qu'une hypothèse et doit être testée (tout comme le principe copernicien lui-même).

En supposant une isotropie et une homogénéité statistiques, la fonction de corrélation (5.32) ne dépend alors que de $r = |\mathbf{r}|$, c'est-à-dire

$$\xi(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = \xi(r).$$

Il est pratique d'étendre $\delta(\mathbf{r})$ aux modes de Fourier comme

$$W = \int d^3x d^3r \delta(\mathbf{x} + \mathbf{r}) e^{-i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} \quad (5.33)$$

et puisque l'on considère un corps à valeurs réelles, les coefficients $\delta_{\mathbf{k}}$ satisfont la relation de conjugaison

$$\delta_{\mathbf{k}}^* = \delta_{-\mathbf{k}}. \quad (5.34)$$

propriétés statistiques des variables aléatoires $\delta_{\mathbf{k}}$. Par exemple

$$\langle \delta_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k}'} \rangle = \int d^3x d^3r \delta(\mathbf{x} + \mathbf{r}) e^{-i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} \quad (5.35)$$

ce qui, après intégration sur $\mathbf{x}$, donne

$$(U^M)^{(1)}(\mathbf{H}\mathbf{k}'\mathbf{W}), \quad (5.36)$$

δ^3 étant la distribution de Dirac, à ne pas confondre avec la perturbation de densité. Le spectre de puissance P_δ est lié à la fonction de corrélation par

$$P_\delta(\mathbf{k}) = \int d^3r \langle \delta(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} + \mathbf{r}') \rangle e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'} \quad (5.37)$$

une relation qui peut être inversée pour donner une expression de la fonction de corrélation, $\xi(\mathbf{r})$, en termes de spectre de puissance, à savoir

$$\xi(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} P_\delta(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi^2} k^2 P_\delta(k) \frac{\sin kr}{kr} \quad (5.38)$$

5.1 3.3 Lien avec les grandeurs observables et lissage

Des quantifications telles que $\xi(\mathbf{r})$ ne peuvent pas réellement être mesurées car nous n'observons qu'une partie finie d'une seule réalisation du processus stochastique. Ainsi, opérationnellement, seule la moyenne spatiale est accessible

$$\langle \delta(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r}') \rangle = \int d^3r' \delta_{\text{obs}}(\mathbf{r}') \delta_{\text{obs}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (5.39)$$

où δ_{obs} est la densité de champ observée. Pour tout observable statistique, disons O , il faut construire un estimateur, $\hat{O}$. La probabilité de mesurer la valeur O dans une étude cosmologique (par exemple un catalogue de galaxies) étant donné une théorie est appelée *fonction de distribution cosmique*, $P(O)$, et la moyenne d'ensemble de $\hat{O}$ est simplement

$$\langle \hat{O} \rangle = \int \hat{O} P(\hat{O}) d\hat{O}.$$

La plupart des estimateurs sont non linéaires et sont donc biaisés, dans le sens où leur moyenne d'ensemble diffère de la valeur réelle O . Le biais cosmique b_o , défini comme

$$\hat{\theta}_k - O_{\theta} \sim$$

ne s'annule en général que lorsque la taille de l'enquête tend vers l'infini, puisqu'on mesure alors la valeur réelle de l'observable. Un bon estimateur doit avoir un biais cosmique minimum et également minimiser l'erreur cosmique, qui est obtenue en calculant la variance de P .

Cette description est encore idéalisée et simpliste. En effet, que signifie mesurer $i_{\text{obs}}(r)$? Par exemple, un catalogue de galaxies peut nous donner accès à la mesure du nombre moyen de galaxies par volume V afin de déduire une estimation d'un champ continu à partir de l'observation du nombre d'objets dans un volume donné. Cela donne une estimation de la densité moyenne dans ce volume, à savoir

$$\langle 5_{\text{obs}}, f_i(x) = d^3 y \langle 5_{\text{obs}}(y) VFR(x - y), J \rangle \quad (5.40)$$

définissant ainsi la fonction de fenêtre (observatoire) W_R . Cette fonction doit satisfaire une condition de normalisation

$$(5.41) \quad \int W_R(x) d^3 x = 1,$$

as well as the condition

$$\int W_R(x) x^2 d^3 x = R^2, \quad (5.42)$$

qui garantit que son

les archétypes de ces

fonctions de « fenêtre » sont les filtres « haut-de-forme » et gaussiens. Notez que si les composantes de Fourier de ce filtre sont notées $W_R(k)$, alors les coefficients de Fourier du champ filtré sont donnés par

$$(5.43)$$

puisque (5.40) est une convolution.

L'erreur cosmique et le biais cosmique ont trois contributions principales (pour une discussion de ces effets, voir les réf. [12, 16]) :

- (1) *Effets en volume fini*, du fait qu'il y a environ $N \sim V/L^3$ volumes indépendants de taille L dans un relevé de volume V . En particulier, la valeur moyenne de la densité n'est pas toujours bien déterminée. Ces effets sont proportionnels à la moyenne de la fonction de corrélation à 2 points sur l'enquête et sont généralement désignés sous le nom de *variance cosmique*.
- (2) *Effets de bord*, liés à la géométrie du catalogue et au fait que les estimateurs en général accordent moins de poids aux données en bordure de l'enquête.
- (3) *Effets de discrétion*, liés au fait que le champ théorique est supposé continu alors que celui observé (par exemple les galaxies) est discret. Ces effets évoluent comme l'inverse du nombre d'objets dans l'enquête à une certaine puissance.

Ainsi, pour toute grandeur physique $\langle \theta(r) \rangle$ on voudrait prédire la fonction de distribution de probabilité $P(\theta)$ (PDF) de la grandeur filtrée $\langle \theta(r) \rangle$ (on se limite à la fonction à un point par souci de simplicité). Cette PDF, $p(\theta, R) d\theta$, représente le

probabilité d'être comprise entre Q et $Q + \Delta Q$. Par exemple, si Q est le nombre de galaxies et le filtre est un chapeau haut de forme, alors la PDF de Q_R donnera la probabilité de trouver N galaxies dans un volume de rayon R . Des modèles comme l'inflation prédisent que ces fluctuations initiales sont gaussiennes, c'est à dire

$$p(Q_i,R) = \left[-\frac{Q_{iR}^2}{2\sigma_i^2(R)} \right] \tag{5.44}$$

où $\sigma_i^2(R) = \langle Q_i^2 \rangle$ est la variance initiale. Le deuxième moment caractérise complètement cette distribution, que nous aimerions comparer avec celle de Q_R aujourd'hui. Il y a donc deux effets à considérer :

- l'évolution des modes peut modifier le spectre initial par une fonction de transfert qui peut dépendre de k ,
- une évolution non linéaire peut modifier les statistiques initiales.

Il existe un troisième effet qui ne sera pas abordé dans ce livre, qui vient du fait que seuls des objets lumineux sont observés. Il convient donc de vérifier que la matière lumineuse est un bon traqueur de la densité totale de matière. Ceci est à l'origine de la notion de *mesure biaisée* [12,17-19].

La suite de ce chapitre est consacrée au premier aspect qui nécessite une analyse détaillée de l'évolution des perturbations dans le cadre relativiste. Nous illustrons brièvement le deuxième aspect dans la section suivante.

5.1.4 Vers le régime non linéaire

La description newtonienne permet d'aborder le comportement des perturbations en régime non linéaire. Cet aspect ne peut être développé davantage dans cet ouvrage, mais nous renvoyons le lecteur à la revue [12] pour une étude très détaillée.

Quelle que soit sa valeur initiale, δ grandit et, avec suffisamment de temps, finit par devenir une unité d'ordre. Le moment où cela se produit dépend de l'amplitude initiale de la fluctuation et du facteur de croissance, c'est-à-dire des paramètres cosmologiques. Comme nous le verrons, la normalisation du spectre de puissance initial est telle que la variance (chapeau haut de forme) du champ de densité dans une sphère de rayon $R_8 = 8h^{-1} \text{ Mpc}$ est d'ordre unité

$$\sigma_8^2 \equiv \left\langle \left(\frac{3}{4\pi R_8^3} \int_{|x| \leq R_8} \delta(x) d^3x \right)^2 \right\rangle \sim 1$$

L'échelle de longueur R_8 caractérise donc l'échelle en dessous de laquelle les non-linéarités ne peuvent être négligées, c'est-à-dire l'échelle en dessous de laquelle le contraste de densité est trop grand pour que l'approximation linéaire soit applicable.

Pour prendre en compte l'évolution non linéaire, le champ de densité peut être étendu de manière perturbatrice comme

où le terme $\delta^{(n)}$ est de l'ordre de ϵ^n dans le champ de densité initial $\delta^{(0)}(x)$. Le premier ordre correspond aux solutions trouvées précédemment

$$\delta^{(1)}(t) = D(t)\delta^{(0)}(x), \tag{5.46}$$

alors qu'au second ordre, l'équation d'évolution (5.16) se réduit à

$$5^{\wedge})_+ = p(je)]^2 + +j_-d . d . J. \quad (5.47)$$

En utilisant les solutions du ^{premier} ordre, on peut résoudre cette équation pour obtenir [20]

with
$$\sigma^2 = \sigma_{ij} \sigma^{ij}, \quad \sigma_{ij} = \partial_i \partial_j \Phi - \frac{1}{3} \delta_{ij} \Delta \Phi. \quad (5.48)$$

The function $\kappa(t)$ is slowly varying, and to a good approximation is given by [21]

$$\kappa \simeq \frac{3}{14} \Omega_m^{-2/63},$$

when the cosmological constant vanishes.

5.1.4.1 Application : asymétrie

Afin d'illustrer l'effet de la dynamique non linéaire, considérons le moment du troisième ordre du champ de densité

$$(\hat{o}^2) = + \mathcal{L}(?),$$

où le premier terme de ce développement vaut pour les conditions initiales gaussiennes. On voit que l'évolution non linéaire induit une sortie de la gaussianité du champ de densité. Comme indiqué précédemment, il faut considérer le champ de densité lissé, et à l'ordre le plus bas, nous obtenons

$$I \ d^{\wedge} j t \ d^3 Z / \quad \text{---}$$

with

$$J(k,k') = \frac{1}{2} + \kappa + \frac{k'}{k} \left(\frac{k \cdot k'}{kk'} \right) + \left(\frac{1}{2} - \kappa \right) \left(\frac{k \cdot k'}{kk'} \right)^2$$

$$^{\wedge}_3\text{-P}_4\text{MP}_i(4-)^{\text{Mv}} \ll (\text{OW}'_{\text{R}}(\wedge) \text{W}'_{\text{R}}(1\text{fc} + \text{k-}^1) \text{J}(\text{k}, \text{k-}), \quad (5.49)$$

En négligeant le RJ ter et en supposant que le spectre se comporte comme une loi de puissance $P(c) \propto k^n$, on obtient [211

$$S_3(0) \equiv \frac{\langle \delta^3 \rangle}{\langle \delta^2 \rangle^2} = 4 + 4\kappa - (n+3) \simeq \frac{34}{17} \left(\Omega_m^{-2/63} - 1 \right) - (n+3). \quad (5.50)$$

Pour un filtre chapeau haut de forme, ce résultat est modifié [22] en

$$S_3(S) = S_3(0) + \text{lh}A^{\wedge}, \quad (5.51)$$

où $as(R)$ est la variance du champ de densité, filtrée à l'échelle R . Une telle relation peut être comparée aux observations (voir par exemple Réf. [23]), par exemple pour montrer que les structures à grande échelle sont compatibles avec des conditions initiales gaussiennes.

5.2 Théorie des perturbations cosmologiques invariantes de jauge

L'approche newtonienne est valable pour les perturbations sub-Hubble et est pertinente pour la description de l'évolution des perturbations dans l'Univers tardif. Cependant, la dynamique gravitationnelle doit être décrite dans un cadre relativiste, en particulier pour les modes de grande longueur d'onde. La section suivante est l'une des pierres angulaires de la

cosmologie théorique contemporaine. En particulier, nous présenterons une dérivation des équations généralisant (5.1), (5.2) et (5.5).

Il existe deux formalismes pour la théorie des perturbations cosmologiques. Nous choisissons de présenter une approche dans laquelle nous introduisons des paramétrisations arbitraires des perturbations à partir desquelles nous construirons ensuite des variables invariantes de jauge. Cette méthode, introduite par Bardeen [24,25], est la plus courante et ses différents aspects sont détaillés dans de nombreuses revues [26-29]. Pour l'approche que nous ne développons pas, Refs. [30-32] peuvent être consultés. Les deux approches conduisent à des résultats physiques équivalents.

5.2.1 Espace-temps perturbé

5.2.1.1 Métrique de l'espace-temps perturbé

En ordre linéaire, nous décomposons la métrique espace-temps selon

$$DS^2 = a^2(r) [-(1 + 2A)dt^2 + 2B_i dx^{i dr} + (g_{ij} + h_{ij})dx^i dx^j], \quad (5.52)$$

où les petits quantifiés A , B_i et h_{ij} sont des fonctions inconnues de l'espace et du temps à déterminer à partir des équations d'Einstein. Écrivant cette métrique comme

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (5.53)$$

où est la métrique de Friedmann-Lemaître, la métrique inverse est alors donnée par

$$g^{\mu\nu} = \bar{g}^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} \quad (5.54)$$

au premier ordre dans les perturbations. Dans ce qui suit, h dénotera la trace des perturbations spatiales

et on rappelle que ∇_μ est la dérivée covariante associée à $\bar{g}^{\mu\nu}$. Les symboles de Christoffel, les tenseurs de Riemann, Ricci et Einstein et la courbure scalaire associée à cette métrique sont donnés explicitement en Annexe C.

5.2.1.2 Dégradation TSV

Dans ce qui suit, nous effectuerons une décomposition dite scalaire-vecteur-tenseur [24] (notée SVT dans la suite) des variables de perturbation. Il s'agit, dans un contexte cosmologique, de la même décomposition que celle introduite au chapitre 1.

Cette décomposition est une généralisation du fait bien connu selon lequel tout champ vectoriel peut être décomposé comme la somme du gradient d'un scalaire et d'un vecteur sans divergence comme

$$B^i = -D^i B + B^i \text{ avec } D_i B^i = 0. \quad (5.55)$$

Pour un champ de vitesse, B sera le potentiel et B^i le tourbillon. On voit que les 3 composantes du vecteur ont été divisées en 1 composante scalaire (B) et 2 composantes vectorielles

(B,) .

De manière analogue, tout tenseur symétrique de rang 2 peut être décomposé comme

$$h_{ij} = 2C y_{ij} + 2Z \delta_{ij} + 2\epsilon_{ij} + 25^{\wedge} \text{ avec } D^{\wedge} E^{13} = 0, \ddot{E}^* = 0. \quad (5.56)$$

L'équation (5. 54) implique que les indices de ces quantités sont augmentés et diminués par rapport à la métrique spatiale non perturbée, γ_{ij} , par exemple, $B = y'^3 B_j$. Nous adoptons la convention selon laquelle toute quantité « barrée » est sans divergence (et sans trace si elle possède deux indices). Les 6 composantes de ϵ_{ij} ont ainsi été découpées en 2 composantes scalaires (C et E), 2 composantes vectorielles (E_j) et 2 tensorielles $E^{\wedge}$.

Notez que les quantités B et ϵ ne sont pas uniques. En fait, E est une solution de $AB = DtB^{-1}$ (le Laplacien étant défini par $A = \epsilon, \epsilon'$), dont la solution n'est unique que si certaines conditions aux limites sont imposées.

Les 10 degrés de liberté de la métrique ont ainsi été décomposés comme

- 4 scalaires. A, B, C et E , correspondant à 4 degrés de liberté,
- 2 vecteurs B' et $\ddot{E}''$ correspondant à $2 \times (3 - 1) = 4$ degrés de liberté,
- 1 tenseur : $E^{\wedge}$, correspondant à $3 \times 2 - 1 - 3 = 2$ degrés de liberté.

Les avantages de cette décomposition résident dans le fait que, dans l'ordre dominant, les trois types de perturbations sont découplés et peuvent ainsi être étudiés séparément.

52.1.3 *Le problème de la jauge*

Pour introduire la métrique de l'espace-temps perturbé, nous avons fait l'hypothèse (5.53) que la métrique $g^{\wedge}$ était « proche » de celle de la g^{fin} de Friedmann-Lemaître.

En théorie des champs, l'espace-temps est généralement fixe et une fois le système de coordonnées choisi, on peut définir la perturbation de toute quantité $Q(x, t)$ comme

$$\delta Q(x, t) = Q(r, t) - Q(x, t),$$

où $Q(x, t)$ représente la configuration non perturbée. En tout point de l'espace-temps, la quantité $Q(x, t)$ peut être comparée à $Q(x, t)$ au même point.

En relativité générale, il existe une différence importante avec cette approche standard. En effet, nous aimerions comparer deux espaces-temps différents et faire l'hypothèse qu'il est 'proche' d'un Univers de Friedmann-Lemaître ($A_4, g_{M, \dots}$).

Dans

Dans cette comparaison, il existe une certaine liberté arbitraire liée à la manière d'identifier les points de ces deux espaces-temps. En effet, un isomorphisme *if* doit être introduit pour relier les points des deux espaces-temps (voir Fig. 5.2). Il n'y a en réalité pas d'identification « naturelle » entre les deux espaces, et il existe donc une liberté de choix dans l'identification des points dans chaque espace. Cela implique qu'il existe des degrés de liberté non physiques liés au choix des systèmes de coordonnées sur les deux variétés.

La décomposition (5.52) suppose implicitement qu'un système de coordonnées a été choisi dans l'espace perturbé. Tout changement de coordonnées modifiera la forme des coefficients métriques. Pour illustrer l'effet d'un tel. changement de coordonnées,

considérons un espace-temps de Friedmann-Lemaître non perturbé , comme sur la Fig.5.2, et soit

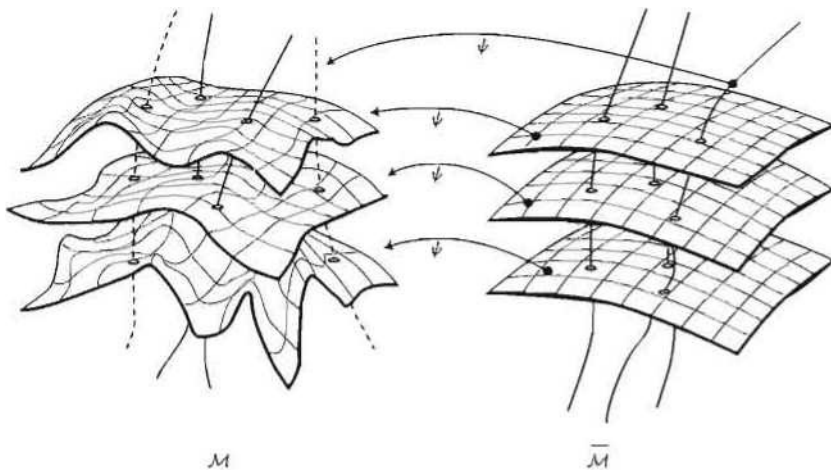


Fig. 5.2 Toute grandeur perturbée est définie via une cartographie entre l'espace-temps Friedmann-Lemaître, A4, et l'espace-temps perturbé A4.

effectuons un changement arbitraire des coordonnées en fonction de l'espace et du temps $x' \rightarrow y' - s$ - On obtient alors

$$DS^2 = \frac{1}{c^2} [-dr^2 + 2\frac{dr}{dt} dy' + (\frac{1}{c^2} + 2D_{(1)}) dy' dy'].$$

Il apparaît deux termes artificiels $2\frac{dr}{dt} dy'$ et E_1 = cela ne correspond pas à des fluctuations métriques, puisque cet espace est encore un espace de Friedman-Lemaître, mais à un choix du système de coordonnées. La dépendance des grandeurs intrinsèques à la variété dans laquelle évoluent les perturbations doit ainsi être séparée des dépendances artificielles, liées au choix arbitraire d'un système de coordonnées particulier.

5.2.1.4 Variables invariantes de jauge

Afin d'extraire les degrés de liberté physiques, considérons une transformation active du système de coordonnées défini par un champ vectoriel ξ . Les coordonnées de tout point changent en fonction

$$x^M \rightarrow x^M + \xi^M, \tag{5.57}$$

où le déplacement est décomposé en 2 degrés de liberté scalaires (T et L) et 2 degrés de liberté vectoriels (ξ' , qui est sans divergence $D^i L_i = 0$) comme

$$\xi^0 = T, \xi^i = D^i L + L^i. \tag{5.58}$$

Sous ce changement de coordonnées, la métrique se transforme comme [voir (1-57)]

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu}$$

Au premier ordre dans les perturbations, c'est

$$h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^{(0)} + h_{\mu\nu}^{(1)} \tag{5.59}$$

$$A \rightarrow A + T' + HT \quad (5.60)$$

$$B_i \rightarrow B_i - DT + L_i$$

$$h_{ij} \rightarrow h_{ij} - D_i L_j - D_j L_i + 2'HT'Y_{ij}. \quad (5.61)$$

En utilisant la décomposition scalaire-vecteur-tenseur (5.55) et (5.56) on obtient respectivement pour les modes S, V et T. Ces transformations sont similaires aux

$$\begin{aligned} A &\rightarrow A + T' + HT, & \bar{B}^i &\rightarrow \bar{B}^i + \bar{L}^i, & \bar{E}_{ij} &\rightarrow \bar{E}_{ij}, \\ B &\rightarrow B - T + L', & \bar{E}^i &\rightarrow \bar{E}^i + \bar{L}^i, \\ C &\rightarrow C + HT, \\ E &\rightarrow E + L, \end{aligned} \quad (5.62)$$

transformations de jauge rencontrées par exemple en électromagnétisme. On peut donc réduire l'arbitraire en imposant quelques conditions supplémentaires sur les variables : en d'autres termes, et toujours comme en électromagnétisme, il faut fixer la jauge avant de faire tout calcul réellement pertinent.

Comme souligné dans la section précédente, il est intéressant de définir des quantifications dépendantes de la jauge. Pour ce faire, notons que certaines combinaisons des quantifications précédentes ne dépendent pas de L^i et T , par exemple,

$$'P = -C - H(B - E'), \quad (5.63)$$

$$S = A + H(B - E') + (B - E'), \quad (5.64)$$

$$S^{14\ 15} = E^{je\ i} - B^{je\ }_{>}, \quad (5.65)$$

$$T^j. \quad (5.66)$$

Nous avons initialement 10 variables de perturbation ($A, B, C, E, E', E^{je\ i}, E^{*j}$) et 4 degrés de liberté multiples (T, L, B^j qui peuvent être absorbés dans la définition des variables invariantes de jauge, alors décrit par $10 - 4 = 6$ degrés de liberté paramétrés par exemple par $E, S^{>}$ et E^{1j} . Ces quantifications peuvent être considérées comme le 'réel'¹⁶ perturbations spatio-temporelles dans le sens où elles ne peuvent être supprimées par aucun changement de coordonnées.

¹³Pour plus de détails, donnez les expressions des dérivés de Lie. Ils s'obtiennent facilement à partir des expressions des symboles Christoffel de l'espace-temps de Friedmann-Lemaître et à partir de $4M$ —

L^j). Ils sont -> e donnés par

¹⁴ $E^{je\ i} = -\hat{u}^2(r + W),$

¹⁵ $= \hat{u}^2 HT + t^i).$

¹⁶ $+ DjLi + 'HTyij).$

$$X = A - C - \left(\frac{C}{\mathcal{H}} \right)' \quad (5.67)$$

mais ils peuvent toujours être exprimés en termes des deux fonctions $\mathcal{S}$ et $\mathcal{P}$. Par exemple, dans le cas de X défini juste ci-dessus,

$$X = \mathcal{P} + \mathcal{S} + \left(\frac{\Psi}{\mathcal{H}} \right) \quad (5.68)$$

comme cela peut être facilement vérifié.

5.2.15 Stewart-Walker Lemma

De même que la métrique se transforme comme (5.59) sous un changement de coordonnées de la forme (5.57), toute quantité scalaire $\mathcal{Q}$ se transforme au premier ordre en perturbations. Puisque chaque champ vectoriel ξ génère une transformation de jauge, nous pouvons conclure que les seules quantités invariantes de jauge sont celles pour lesquelles

$$\xi^\mu = 0 \quad \nabla_\mu \xi^\mu = 0.$$

Ce résultat est connu sous le nom du lemme de Stewart-Walker [33].

Notez un corollaire important de ce résultat. Puisque toutes les équations relativistes sont covariantes par définition, elles peuvent toujours s'écrire sous la forme $\mathcal{Q} = 0$, où $\mathcal{Q}$ est un champ tensoriel. Il est donc toujours possible, au premier ordre en perturbations, d'écrire toutes les équations pertinentes en termes de grandeurs invariantes de jauge uniquement. Un tel traitement garantirait que *rien* de jauge, c'est-à-dire un degré de liberté non physique, soit utilisé de manière trompeuse.

5.2.2 Description du sujet

Dans cette section, nous introduisons diverses quantités qui entrent dans la description d'un fluide parfait pour lequel le tenseur énergie-impulsion dans un espace non perturbé est de la forme

$$T_{\mu\nu} = (p + P)u_\mu u_\nu - P g_{\mu\nu},$$

comme on l'a vu au chapitre 3

5.2.2.1 Le tenseur énergie-impulsion d'un fluide perturbateur

Le tenseur énergie-impulsion de ce fluide perturbé prend la forme générale

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu} + 2p_{\langle\mu} u_{\nu\rangle} + P \delta_{\mu\nu} + a^2 P \pi_{\mu\nu}, \quad (5.69) \text{ où}$$

v^M est la vitesse de déplacement d'un observateur en mouvement,

satisfaisant $u^\mu u_\mu = -1$.

La condition de normalisation de (à l'ordre zéro) fournit la solution

et puisque la norme de δu^M devrait également être égale à -1 , nous en déduisons. $2u^M$
 $6u_M + 6p_{Alz\dot{u}} \dot{u}^{*/} = 0$, et donc que $\delta u_0 = -Aa$ On écrit alors $\delta u' = v'/a$, donc that

$$\delta u_{heures} = -1 \left(-UNE, v^* \right), = -1 \left(-A, V/k + BC \right), \quad (5.70)$$

et on décompose v , en une partie scalaire et une partie tensorielle selon

$$v_{je} = D_{je} v + \hat{u}_{je}. \quad (5.71)$$

Dans la décomposition (5.69), est le tenseur de contraintes anisotrope et caractérise la différence entre le fluide perturbé et un fluide parfait. Il peut être choisi sans trace $= 0$), puisque sa trace peut être absorbée dans une redéfinition du pression isotrope, $\hat{O}P$. Il est également symétrique, puisque le tenseur énergie-impulsion est et peut être choisi orthogonal à u , c'est-à-dire $u^M \gamma_{MU} = 0$ Cela implique que, sans manque de généralité, on peut poser $\gamma_{00} = \hat{\gamma}_{00} = 0$.

Le tenseur de contraintes anisotrope est alors constitué uniquement d'une partie spatiale, qui peut être décomposée en parties scalaire, vectorielle et tensorielle comme

$$n_{ij} = A_{0if} + + \quad rfy, \quad (5.72)$$

où l'opérateur A_u est défini comme

$$Un_v = D_i D_j - \quad (5.73)$$

Nous déduisons de (5.70), (5.71) et (5.72) que les composantes de la perturbation du tenseur énergie-impulsion (5.69) sont

$$\delta \gamma_{00} = -2\delta u^0 (\delta \gamma_{00} + 2\delta \gamma_{0i}), \quad (5.74)$$

$$\delta \gamma_{0i} = -\delta u^0 [(1 + w) (D_i u + v_i) + D_i B + B_i], \quad (5.75)$$

$$-P_0 \quad , \quad (5.76)$$

où l'on rappelle que $\delta = \delta p/p$ est le contraste de densité.

Il sera utile d'introduire la perturbation entropique, T , définie par la relation

$$\delta P = c^* \delta p + PT, \quad (5.77)$$

qui prend la forme

$$wT = - \frac{(6P - c^* \delta p)}{page} \quad (5.78)$$

Pour une perturbation adiabatique, $\hat{O}P/bp = c^*$ et donc $F = 0$ et nous introduisons la notation utilisée dans la littérature

$$\delta P_{nad} = Br, \quad (5.79)$$

où l'indice signifie non adiabatique.

5.2.2.2 Quantités invariantes du Gange

En effectuant un changement de coordonnées de la forme (5.57), les scalaires et les vecteurs se transforment comme

$$\delta Q \rightarrow \delta Q + \xi^\alpha Q, \quad \xi^\alpha = \zeta^\alpha d_\alpha Q = T Q^\alpha,$$

et

$$\langle \delta u^\mu \rangle \rightarrow \langle \delta u^\mu \rangle + Z^\mu \delta u^\alpha, \quad Z^\mu = -u^\alpha d_\alpha \delta u^\mu,$$

de sorte qu'il s'ensuit qu'après décomposition SVT, δP , δp , v et v_i se transforment comme

$$\begin{aligned} \delta p &\rightarrow \delta p + p' T, \\ \delta p^\alpha &\rightarrow \delta p^\alpha + p' T^\alpha, \end{aligned} \quad (5.80)$$

Les quantités δr , $\delta \theta$, et $\delta \tau_{,j}$ sont invariants de jauge par rapport au lemme de Stewart-Walker, puisque la partie non perturbée du tenseur de contraintes anisotrope doit disparaître pour être compatible avec l'hypothèse fluide parfaite imposée par les symétries de l'espace-temps de Friedmann-Lemaître. On peut également vérifier que, comme prévu à nouveau d'après le lemme de Stewart-Walker, T est invariant de jauge puisque $T \rightarrow T + (P' - c^2 p')T - T$.

Comme dans le cas des perturbations métriques, on peut également définir la jauge en grandeurs variantes associées aux quantités (5.80). Différents choix sont possibles, et nous définissons

$$\begin{aligned} \delta S^N &= \delta S + \frac{1}{P} (\xi^\alpha - \xi^\alpha), \\ \delta S^C &= \delta S + (v + B), \quad p \\ V &= v + Z, \\ V_i &= v_i + B_i, \\ W_i &= v_i + \xi_i. \end{aligned} \quad (5.81)$$

Les perturbations de pression δP^N , δP^F et δP^C sont définies de manière identique. Les différentes variables invariantes de jauge sont liées entre elles et on peut vérifier que

$$\delta P^F = \delta P^N + \frac{\rho'}{\rho} \frac{\Psi}{\mathcal{H}}, \quad \delta P^C = \delta P^N + \frac{1}{V} (V + B), \quad W_i = V_i + \xi_i. \quad (5.87)$$

Dans toutes ces relations, on rappelle que $\delta S =$

$\delta p/p$ est le contraste de densité.

5.2.3 Choisir une jauge

Grâce au lemme de Stewart-Walker, nous savons que toute équation de perturbation peut être écrite uniquement en termes de variables invariantes de jauge. En effet, une telle équation prend toujours la forme $Q = 0$ et est, par construction, linéaire dans les variables de perturbation du premier ordre. Une méthode pour obtenir ces équations invariantes de jauge est donc d'écrire

les équations dans une jauge arbitraire et de regrouper les termes pour faire apparaître les variables invariantes de jauge.

Une manière plus subtile consiste à travailler dans une jauge donnée depuis le début afin que les variables de cette jauge se réduisent à des variables invariantes de jauge. Par exemple, la jauge longitudinale est fixée par la condition $\mathcal{L} = B^{-1} = 0$, de sorte que $C = -ty$, $\dot{A} = \dots$. Les équations seront alors dérivées directement en termes de variables invariantes de jauge. Nous pouvons alors changer de jauge ou réexprimer les équations en termes de perturbations dépendantes de la jauge initiale en utilisant, par exemple, (5.63)-(5.66).

Soulignons un point important et souvent déroutant. Bien que les calculs puissent être effectués dans n'importe quelle jauge, il faut en général effectuer une transformation de jauge pour relier les résultats de ces calculs aux quantités observables. En fait, les grandeurs invariantes de jauge n'ont a priori aucune interprétation physique directe et il faut trouver une jauge où les variables de perturbation se réduisent aux grandeurs invariantes de jauge. Par exemple, il ne peut être interprété comme un contraste de densité que s'il est mesuré par un observateur utilisant cette jauge.

A noter également que localement, tous les systèmes de coordonnées sont équivalents. Par conséquent, nous nous attendons à trouver des différences entre les différentes jauges uniquement à grande échelle, ou, plus précisément, au-dessus d'une échelle caractéristique encore inconnue. Nous verrons bientôt que c'est bien le cas et que l'échelle en question est fixée par le rayon de Hubble.

Un dernier point d'avertissement à ce sujet : si, pour une raison quelconque, une quantité supposée petite (perturbatrice), calculée dans une jauge fixe, devient grande, alors que toutes les quantités calculées dans une jauge différente restent petites, cela ne signifie pas nécessairement que la théorie des perturbations du premier ordre s'effondre, mais cela ne signifie pas non plus le contraire ! En fait, cela implique simplement que le changement de coordonnées pour arriver à cette jauge n'est plus infinitésimal. Il faut alors passer au moins aux calculs du second ordre : si cette correction du second ordre s'avère être plus petite que le premier ordre dans toutes les jauges, alors il est probable que la jauge particulière utilisée au départ était pathologique à ce stade. Cependant, cela doit vraiment être vérifié avant de parvenir à une conclusion physique. Nous nous tournons maintenant vers la tâche extrêmement utile de présenter les différentes jauges fréquemment utilisées, avant de dériver les équations d'évolution pour les perturbations cosmologiques.

5.2.3.1 Jauge newtonienne ou *Jongjūdjal*

Cette jauge est celle où la partie scalaire de la métrique perturbée est diagonale, à savoir

$$B = 0 \text{ et } E = 0. \quad (5,88)$$

Dans ces conditions, la partie vectorielle ne peut pas être diagonale, et on peut arbitrairement choisir d'imposer la condition

$$B_i = 0, \quad (5,89)$$

ce qui fixe complètement la jauge puisqu'on peut passer d'une jauge arbitraire à celle-ci avec la transformation (5.58) à paramètres définis par

$$T = B - \mathcal{L}', L = -E \text{ et } -B, \quad (5,90)$$

Dans cette jauge, l'expansion est « considérée » comme une isotropie. La quantité représente la perturbation de courbure des hypersurfaces à temps constant [voir (C.31)] et c'est ce

potentiel

qui apparaît dans l'équation de Poisson, c'est à dire celui qui se réduit au potentiel newtonien) aux petites échelles, donc le nom de la jauge.

Dans cette jauge, on retrouve les grandeurs perturbées restantes

$$A = \mathcal{L}, C = \hat{C} = 5^N, 6P = \hat{O}P'', v = V \text{ et } \ddot{u} = V, \quad (5.91)$$

en termes de variables invariantes de jauge.

5.2.3.2 Jauge à trancher plate

La jauge à tranches plates est définie en imposant que la partie scalaire de la perturbation de courbure des sections spatiales disparaisse. En utilisant (C.31), cela impose que

$$\hat{C} = 0, E = 0 \text{ et } \ddot{E} = 0. \quad (5.92)$$

Comme la jauge longitudinale, la jauge à trancher à plat est également complètement fixe puisqu'on peut passer d'une jauge arbitraire à celle-ci avec la transformation (5.58) définie par

$$T = -\frac{1}{H}, L = -E \text{ et } L_t = -\dot{E}. \quad (5.93)$$

Dans cette jauge, les quantités perturbées restantes sont données en termes de variables invariantes de jauge par

$$A = A \setminus_{rt}, \hat{C} = \hat{C}^F, 5P = 8P^r, v = V \text{ et } v_t = W. \quad (5.94)$$

Le principal avantage de cette jauge est, comme nous le verrons, que les équations de conservation prennent la même forme que dans la version newtonienne des sections précédentes.

5.2.3 3 jauges Synchrones ou Gauss

Les jauges synchrones sont définies par les contraintes

$$UNE = 0 \text{ et } Bt = 0. \quad (5.95)$$

Dans un tel système de coordonnées, seules les sections spatiales sont perturbées, les lignes d'univers d'équation $x' = \text{const.}$ sont des géodésiques orthogonales aux hypersurfaces à temps constant et le temps propre d'un observateur en mouvement correspond au temps cosmique. Il s'agit donc d'un système de coordonnées dans lequel chaque point correspond à un observateur en chute libre.

Cette interprétation physique intuitive avait rendu cette jauge très populaire. Cependant, il souffre de pathologies, et notamment il n'est pas complètement réparé. En effet, on peut toujours effectuer des transformations de coordonnées de la forme $t \rightarrow t' = f(t)$ ou $x^* \rightarrow y' = f(x^*)$, impliquant uniquement le temps ou l'espace séparément et qui sont compatibles avec les contraintes (5.95). La transformation pour passer d'une jauge arbitraire à une jauge synchrone est donnée par

$$T = -\frac{1}{a} \int A a d\hat{\hat{r}}, L^I = j(TB)dr + C_L \text{ et } T = -Fdr + C^*_L, \quad (5.96)$$

où C_T et C_L sont quatre fonctions d'intégration pouvant dépendre des

coordonnées spatiales x' . Ces fonctions ont des interprétations physiques simples, à savoir

$C?$ représente la liberté résiduelle dans le choix de l'origine du temps propre de chaque observateur, tandis que correspond à un choix arbitraire du système de coordonnées sur chaque hypersurface à temps constant. L'existence de ce choix arbitraire dans la définition de la jauge conduit à la présence de modes de jauge lors de la résolution des équations d'évolution des perturbations. Ces modes de jauge ne sont pas physiques et correspondent à des solutions parasites qui peuvent conduire (et ont conduit) à confusion. De plus, comme la jauge n'est pas complètement fixe, une variable calculée dans cette jauge ne peut pas toujours être exprimée en termes de grandeurs invariantes de jauge.

Il est conventionnel de définir les perturbations métriques résiduelles dans cette jauge par

$$h_{\alpha\beta} = 6C + 2AE \text{ et } r) = -C. \quad (5,97)$$

5.2.3.4 Jauge mobile

La jauge comobile est une jauge qui, comme son nom l'indique, suit le mouvement global de la matière. Dans cette jauge, la vitesse du fluide matière est donc imposée pour s'annuler, c'est à dire

$$= 0. \quad (5,98)$$

Lorsque plusieurs fluides sont présents, une jauge comobile peut être définie par rapport à n'importe quel composant donné (baryons, photons, etc...) ou à la matière totale. Dans ce texte, sauf indication contraire, par « jauge comovante », nous entendons en réalité « jauge comovante par rapport à la matière totale ».

La condition (5.98) ci-dessus ne peut pas toujours être satisfaite, car elle implique que $V_i + Bi = 0$. Il est toujours possible de trouver un système de coordonnées pour lequel la partie scalaire de la vitesse disparaît (par exemple, dans un écoulement potentiel, le théorème de Stokes garantit que les lignes d'écoulement ne se coupent pas et on peut ainsi choisir un système de coordonnées qui suit ces lignes). Ce n'est pas le cas de la partie vectorielle qui correspond au tourbillon et il existe des tourbillons actuels qui ne peuvent être supprimés par un changement de coordonnées. De ce fait, les deux conditions suivantes doivent être ajoutées

$$5 = 0 \text{ et } 5 < = \hat{u}. \quad (5,99)$$

Cette jauge a la particularité, qui rappelle une des propriétés de la jauge à tranche plate, comme nous le verrons, que l'équation de Poisson qu'elle conduit à JS est identique à celle obtenue dans le cas newtonien des premières sections.

Après avoir examiné quelques jauges fréquemment utilisées, passons à la description dynamique réelle de l'évolution des perturbations, à savoir les équations d'Einstein étendues au premier ordre.

5-2 4 Équations d'Einstein : dérivation

Les équations d'Einstein pour les perturbations prennent la forme simple

$$= \kappa 6T?$$

A) les quantifications perturbées nécessaires sont rassemblées en Annexe C. Nous traiterons les modes tensoriels, suivis des modes vectoriels, qui sont mathématiquement plus simples, avant de terminer par les modes scalaires.

5.2.4.1 Décomposition de vecteurs et de tenseurs tridimensionnels

Vecteurs

Dans l'espace de Fourier, on a le dédoublement

$$V = k_{\perp} V_{\perp} + V_{\parallel}, \text{ avec } V_{\perp} \cdot V_{\parallel} = 0, \quad (5.100)$$

pour que V vit dans le sous-espace perpendiculaire à k' . Il s'agit d'un sous-espace bidimensionnel de sorte que $V_{\perp}$ a été divisé en 1 mode scalaire (V) et deux modes vectoriels ($V_{\perp}$) qui correspondent aux modes transversaux. Considérons maintenant la base $\{e^i\}$ du sous-espace perpendiculaire à k' . Par construction, il satisfait aux conditions d'orthonormalisation

$$e^i \cdot e^j = \delta^{ij},$$

avec $i, j \in \{1, 2\}$. Une telle base est définie à une rotation près autour de l'axe k' . Maintenant, les modes vectoriels peuvent être décomposés sur cette base comme

$$V_{\perp} = \sum_{i,j=1,2} V_{ij} e^i e^j. \quad (5.101)$$

Ceci définit les deux degrés de liberté, V_{ij} , qui dépendent de k' puisque la décomposition - diffère pour chaque numéro d'onde. Les deux vecteurs de base permettent de définir un opérateur de projection sur le sous-espace perpendiculaire à k' comme

$$P_{ij} = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \quad (5.102)$$

où $k_i = k \hat{e}_i$. Il satisfait trivialement $P^2 = P$ et $P \cdot k = 0$. C'est aussi le projecteur sur les modes vectoriels pour qu'on puisse toujours écrire V_j sous la forme

$$V_j = P_{ij} V_i \quad (5.103)$$

réalisant ainsi une décomposition scalaire-vecteur, similaire à celle SVT pour les tenseurs.

Tenseurs

De manière analogue, tout champ tensoriel symétrique (tridimensionnel). V_{ij} , peut être décomposé en SVT comme

$$V_{ij} = T_{ij} + \frac{1}{3} S \delta_{ij} + 2 D_{ij} \quad (5.104)$$

où l'on rappelle que $A_{ij} = D_{ij} - \frac{1}{3} A \delta_{ij}$ et

$$T_{ij} = V_{ij} - \frac{1}{3} V \delta_{ij} \quad (5.105)$$

tenseur symétrique V_{ij} est, selon notre convention, transversale et sans trace. Par conséquent, il n'a que deux composantes indépendantes et peut être décomposé comme

$$V_{ij} = \frac{1}{2} (W_{ij} + W_{ji}) \quad (5.106)$$

où les tenseurs de polarisation ont été définis comme

$$\varepsilon_{ij}^\lambda = \frac{e_i^1 e_j^1 - e_i^2 e_j^2}{\sqrt{2}} \delta_+^\lambda + \frac{e_i^1 e_j^2 + e_i^2 e_j^1}{\sqrt{2}} \delta_\times^\lambda. \quad (5.107)$$

On peut vérifier qu'ils sont bien sans trace $\varepsilon_{ij}^\lambda \delta^\lambda = 0$, transversal $\varepsilon_{ij}^\lambda \delta^\lambda = 0$,
et que les deux polarisations sont perpendiculaires. Cela définit les deux
degrés de liberté du tenseur.

Présentation à l'opérateur du projecteur des modes tenseurs en

et l'opérateur « d'extraction de traces »

$$T_{ij} = \delta_{ij} P -$$

les tenseurs S et T sont extraits comme suit

$$v_{,j} = Q \dot{W}^k \delta_{ij} + T_{ij} + 2i \dot{\sigma}_{ij} + A \ddot{y} \quad (5.108)$$

Dans cette expression, δ_{ij} a été divisé en 2 modes scalaires (T et S), deux modes vectoriels (V)
et deux modes tensoriels (V_{ij}). Ainsi, on peut toujours diviser n'importe quelle équation
vectorielle telle que $K = \hat{u}$ en la projetant selon V (scalaire) et P_j (vecteur), tandis que toute
équation tensorielle du genre $V_{ij} = 0$ peut être projetée selon γ (scalaire), δ_{ij} (scalaire),
(vecteur) et $\Lambda^{\hat{}}$ (tenseur).

Ces décompositions passées, passons à leur dynamique actuelle.

5.2.5 Équations d'Einstein : décomposition SVT

5.2.5.1 Modes tenseurs

Les modes tensoriels sont explicitement invariants par construction. Leur équation
d'évolution est obtenue en extrayant la partie tensorielle de l'équation d'Einstein comme

et ils se réduisent à a. équation d'évolution unique

$$+ \text{THE}'_M + (2X - A) E_w = \quad (5-109)$$

Au terme de courbure près et au terme d'amortissement dû à l'expansion près, cette équation
est analogue à (1.132) obtenue au chapitre 1 pour les ondes gravitationnelles dans un espace-
temps de Minkowski.

Il peut être intéressant de réécrire cette équation, en introduisant la quantité réduite $\tilde{f}$ définie en (3.36), sous la forme

$$X'Z + \dots + (2\tilde{A} - A)\ddot{E}_{ki} = 3\kappa^2 \tilde{f} w_{fe} \quad (5.110)$$

Il est également pratique de réécrire l'équation des ondes gravitationnelles pour ses deux polarisations en utilisant la quantité réduite

$$u_T = aEx \text{ et } E_{ij} = E^{ij} \quad \text{UN} \quad (5.111)$$

où e^* est le tenseur de polarisation (voir Fig. 1.9). L'équation (5.109) prend alors la forme

$$to'' + \dots - A - \dots - uT = Ka^{\wedge}P\ddot{r}x. \quad (5.112)$$

Dans le cas d'un Univers à sections spatiales euclidiennes ($K = 0$) le terme de gauche de cette équation est analogue à celui d'un champ évoluant dans un potentiel, ici dépendant du temps, donné par $a\dot{f}/a$. Notez que cette équation a également la même forme mathématique qu'une équation de Schrödinger unidimensionnelle indépendante du temps pour une particule dans un potentiel, cette dernière étant $d^2\psi/dx^2 + [E - V(x)]\psi = 0$. Cette formulation s'avérera utile lors de l'étude des ondes gravitationnelles lors de l'inflation (voir chapitre 8).

5.2.5.2 *Modes vectoriels*

Il existe deux équations d'Einstein pour les modes vectoriels qui découlent respectivement des composantes $(0i)$ et (ij) . En utilisant les résultats de l'Annexe C et les expressions (5.75) et (5.76) pour le tenseur énergie-impulsion perturbé, nous obtenons facilement les deux équations

$(A + 2K) \dots = -2/tpa^2 (l + w)V_{,,}$	(5.113)

$4\ddot{\gamma}^* + 27\ddot{\gamma}4>, = K.Pa^2 il$ $\%.$	(5.114)

Comme dans le cas de (5.110), il peut aussi être intéressant de réécrire ces deux équations, en introduisant la quantité réduite O , définie en (3.36), sous la forme

$$(A + 2/<)\$, = -6\ddot{\gamma}\ddot{\gamma}^2 Q(1 + w)V_i, \quad (5.115)$$

$$+ 27\ddot{\gamma}\$, = 37\ddot{\gamma}^2 QwTfi. \quad (5.116)$$

5.2.5.3 *Modes scalaires*

Pour dériver les équations d'Einstein pour les modes scalaires, nous considérerons les quatre combinaisons suivantes :

- $6G_Q + 37iD\sim^l SG^{\wedge},$
- la partie sans trace de $6G^l{}_j,$

$$- + 3c^{\wedge}Cg.$$

Tout d'abord, nous obtenons deux équations de contraintes.

$$(A + 3\mathcal{E}) \quad (5.117)$$

$$* - \mathcal{E} = \kappa Q \tilde{P} T \quad (5.118)$$

The first equation, as announced above, takes the classical form of the Poisson equation when expressed in terms of $\delta^{\mathcal{C}}$, using (5.87). The second equation tells us that the two gravitatio liai potentials are equal if the scalar component of the anisotropic stress tensor vanishes (most frequent case).

The other two equations are équations of évolution given by

$$\Psi' + \mathcal{H}\Phi = -\frac{\kappa}{2}a^2\rho(1+w)V, \quad (5.119)$$

$$\begin{aligned} \Psi'' + 3\mathcal{H}(1+c_s^2)\Psi' + [2\mathcal{H}' + (\mathcal{H}^2 - K)(1+3c_s^2)]\Psi - c_s^2\Delta\Psi = \\ -(\mathcal{H}^2 + 2\mathcal{H}' + K)\left[\frac{1}{2}\Gamma + (3\mathcal{H}^2 + 2\mathcal{H}')\bar{\pi} + \mathcal{H}\bar{\pi}' + \frac{1}{3}\Delta\bar{\pi}\right] \\ - 9c_s^2\mathcal{H}^2(\mathcal{H}^2 + K)\bar{\pi}, \end{aligned} \quad (5.120)$$

où nous avons utilisé, dans la deuxième équation, (5.118) pour remplacer par sa valeur en fonction de T et

5.2.5-4 Forme équivalente

Il peut être utile de donner des formes équivalentes des équations d'Einstein pour les perturbations scalaires, notamment en utilisant d'autres contrastes de densité invariants de jauge.

L'équation de Poisson (5.117) prend les deux formes suivantes selon que l'on utilise ou $\delta^{\mathcal{C}}$

$$(A + 3K)T = a^2p[5^N - 37^{\wedge}(14-w)V], \quad AT - 3H^2X = \delta^{\mathcal{C}}, \quad (5.121)$$

tandis que (5.120) peut être exprimé en termes de la seule variable X comme

$$T(X' - (H^2 - 27\tilde{t})X) - p \text{ fut } 4 - c^2 5^F 4 - \text{WATT}$$

5.2.6 Équation de conservation perturbée pour un fluide

(5.123)

Les équations de conservation fluid prennent la forme simple

$$\delta(V/\delta) = \dot{U}.$$

Encore une fois, toutes les quantifications perturbées requises sont rassemblées dans l'Annexe C. Nous traitons d'abord les modes vectoriels, puis les modes scalaires. Notez que, puisque les fluides sont décrits uniquement par des quantifications scalaires et vectorielles, il n'y a pas d'équation tensorielle.

5.2.6.1 Modes vectoriels

Il existe une équation de conservation unique pour les modes vectoriels et elle prend la forme

$$V' + H - 3c^* = 4\pi u; \quad (A + 2K)\delta^N \quad (5.124)$$

Cette forme est suffisamment simple pour qu'on puisse la résoudre explicitement dans la plupart des cas intéressants.

5.2.6.2 Modes scalaires

Pour les modes scalaires, les équations de conservation à 4 dimensions nous donneront deux équations analogues à l'équation de continuité et à l'équation d'Euler, obtenues respectivement à partir de la composante temporelle et spatiale.

En travaillant dans la jauge newtonienne, on obtient

$$J^N + 37i(c^* - \dot{u})h^N = -(1 + w)(AV - 3S) - 3WT, \quad (5.125)$$

$$V' + H(1 - 3c^*)V = -4\pi w \frac{c_s^2}{1 + w} \delta^N \quad (5.126)$$

L'équation de conservation (5.125) peut être réécrite sous la forme

$$\left(\frac{\delta^N}{1 + w} \right)' = - (AV - 3S) - 3W_T \quad \text{dans} \quad \mathbf{1} + \mathbf{w} \quad (5.127)$$

si l'on utilise l'expression (C.19) pour réexprimer w' . Il est également utile de donner l'expression de ces deux équations en termes de contrastes de densité δ^F et δ^N , à savoir

$$\delta^{F'} + 3H(c_s^2 - w)\delta^F = -(1 + w)\Delta V - 3Hw\Gamma, \quad (5.128)$$

$$V' + H(1 - 3c_s^2)V = -\Phi - 3c_s^2\Psi - \frac{c_s^2}{1 + w}\delta^F - \frac{w}{1 + w} \left[\Gamma + \frac{2}{3}(\Delta + 3K)\bar{\pi} \right], \quad (5.129)$$

$$V' + HV = -\Phi - \frac{c_s^2}{1 + w}\delta^C - \frac{w}{1 + w} \left[\Gamma + \frac{2}{3}(\Delta + 3K)\bar{\pi} \right]. \quad (5.130)$$

5.2.7 Interprétation of the perturbation équations

À première vue, les équations de conservation sont analogues à celles obtenues dans l'approximation new-tonienne. En particulier, comme annoncé précédemment, on récupère (5.1) et (5.2) si l'on se place dans un espace statique ($Tl = 0$) à matière non relativiste ($w = c^* = 0$ et $r = 0$) pour les perturbations adiabatiques ($F = 0$) si δ est identifié comme δ^F . Il existe cependant certaines différences importantes sur lesquelles nous devons insister.

1. Il existe des perturbations vectorielles et tensorielles en plus des perturbations scalaires.

2. Il existe deux potentiels, Φ et Ψ , pour décrire les perturbations scalaires de la métrique. Celles-ci doivent tendre vers la même valeur aux petites échelles pour être compatibles avec la limite newtonienne, dans laquelle le tenseur des contraintes anisotropes devient négligeable. C'est dans la jauge comobile que l'équation de Poisson est la plus proche de sa forme newtonienne mais notons qu'elle fait intervenir le potentiel Ψ plutôt que Φ .
3. À grande échelle, l'équation de Poisson diffère de son analogue newtonienne et les différents contrastes de densité peuvent avoir des valeurs très différentes.
4. L'équation de conservation de la densité d'énergie a un facteur supplémentaire $(1 + w)$ car c'est le flux d'énergie plutôt que le flux de matière qui entre au niveau relativiste.
5. L'équation d'Euler a un terme d'amortissement supplémentaire $-H(1 - 3c^2)$. Typiquement, ce terme aura pour effet de réduire la vitesse à a^{-1} pour toute matière non relativiste : le champ de vitesse a tendance à s'aligner sur le flux de Hubble. Pour une question ultrarelativiste, ce terme disparaît, ce qui peut être compris en remontant aux géodésiques et en remarquant que les géodésiques nulles de deux espaces-temps conformes sont identiques. Comme nous le verrons plus loin, une description appropriée du rayonnement doit être effectuée en termes de la théorie cinétique. La vitesse représente en fait le terme dipolaire de la distribution du rayonnement (voir chapitre 6).

5.3 Évolution

Les équations de perturbation dérivées dans les sections précédentes peuvent être résolues dans divers cas simples. De manière générale, il est utile d'étendre les perturbations aux modes de Fourier (voir Annexe B) et d'étudier l'évolution de chaque mode en fonction du temps. En effet, puisque les équations d'évolution font intervenir des dérivées spatiales uniquement par le biais du Laplacien, elles se réduiront à des équations différentielles d'ordre linéaire dans l'espace de Fourier.

Dans de nombreux cas, nous distinguerons deux régimes que nous introduisons maintenant

k	$\gg$	longueur d'onde du mode super-Hubble	supérieure au rayon de Hubble,
k	$\ll$	longueur d'onde du mode sous-Hubble	inférieure au rayon de Hubble.

Notez que dans la littérature, les modes super et sous-Hubble sont souvent, à tort (et prêtant à confusion), appelés sous et superhorizon. Cette utilisation abusive (fondée sur l'histoire) du langage peut être comprise comme dans le modèle standard du Big-Bang présenté au chapitre 4, le rayon de Hubble coïncide, à un facteur numérique non pertinent près, avec le rayon de l'horizon des particules. Cependant, ce n'est pas toujours le cas, en particulier s'il y a eu une période d'inflation, qui a justement pour objectif de résoudre le problème de l'horizon (voir chapitre 8) ! Le fait que les gradients spatiaux soient négligeables dans les équations d'évolution des perturbations n'est nullement lié à la causalité mais à la

comparaison entre le terme d'amortissement dû à l'expansion de l'Univers, et le temps caractéristique d'oscillation du mode k , *given* par τ_c^{-1} .

Notez que le comportement du mode de croissance aux échelles super-Hubble ne peut pas être déduit de manière intuitive à partir d'arguments de causalité, contrairement à ce qui est parfois affirmé.

en affirmant qu'aux échelles du superhorizon, les perturbations sont « gelées » (voir, par exemple, Réf. [34] pour une discussion détaillée).

5.3.1 Modes vectoriels et tenseurs

5.3.1.1 Modes vectoriels

Tant que disparaît ou est négligeable, (5.114) implique que

$$\propto a^{-2}, \quad (5.131)$$

et l'équation d'Euler implique que

$$V^* \propto a^{-(1-3c_s)}. \quad (5.132)$$

De sorte que les perturbations métriques vectorielles sont effacées par l'évolution cosmologique. Il en est de même pour le tourbillon du fluide cosmique si celui-ci est non relativiste. Ainsi, les modes vectoriels ont peu d'intérêt dans la formation des structures à grande échelle, même s'ils peuvent jouer un rôle, par exemple, si des champs magnétiques ou des défauts topologiques sont présents.

5.3 1.2 Modes tenseurs

se comporte comme un $d^2 \xi_i$, $2u dEa$ —
 ou r^2 alors
 $\int dz^{2+} x dz < 5133 >$

Supposons que tr_j disparaît ou soit négligeable et soit. écrivons (5.109) en Fourier espace pour un Univers à sections spatiales euclidiennes. En supposant que le facteur d'échelle

avec $x = kr$). La solution de cette équation peut être exprimée en termes de fonctions de Bessel) comme

$$\xi_{ij} = i\sqrt{2} - v J_{v-}(x) - h B_{je}(AU^x)] . \quad (5.134)$$

où A_{ij} et B_{TJ} sont deux tenseurs constants transversaux et sans trace. Ne garder que le mode qui ne diverge pas lorsque $x \rightarrow 0$ (le mode divergent correspondant à un mode décroissant lorsque r) les augmentations deviennent en effet négligeables) on obtient

$$= z^{1/2} * J_{v-}(z) A_i, = x^{-1} * J_{v-}(x) A_y. \quad (5.135)$$

En particulier, nous obtenons respectivement aux époques dominées par la matière et par le rayonnement

Matière	Radiation
un)	
$\xi_{ij}(n)$	$j_0(kr)$

E_{vj} est constant tant que $kr \ll 1$, c'est à dire tant que la longueur d'onde du mode considéré est supérieure au rayon de Hubble. Lorsque la longueur d'onde devient plus courte, le mode développe un comportement oscillatoire amorti (voir Fig. 5-3).

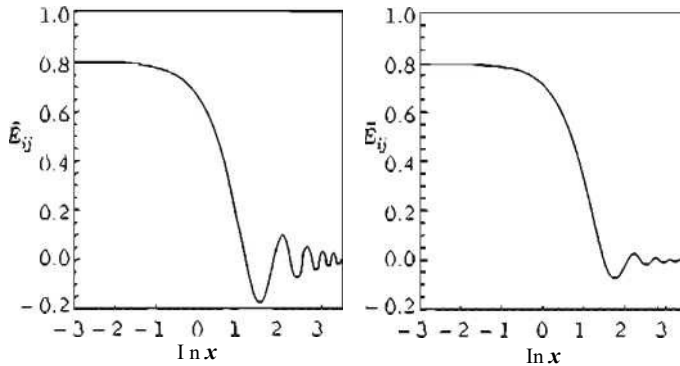


Fig. 5.3 Evolution of gravitational waves in a radiation-dominated Universe, i.e. $w = 1/3$, $v = 1$ (left) and pressureless matter, $w = 0$, $v = 2$ (right) in terms of $\ln x = \ln F_n$. The mode is constant as long as the wavelength is super-Hubble ($z < 1$) and develops a damped oscillatory behaviour as soon as it becomes sub-Hubble ($z > 1$).

5.3.1.3 Modes tensoriels dans un univers dominé par un mélange de matière et de rayonnement Supposons maintenant que l'Univers soit dominé par un mélange de matière sans pression ($w = 0, v = 2$) et de rayonnement ($w = 1/3, v = 1$). Présentation de la quantité

$$y = \frac{a}{a_{eq}} \quad (5.136)$$

où a_{eq} est la valeur du facteur d'échelle lorsque le rayonnement et la matière ont la même densité [$\rho_m(a_{eq}) = \rho_r(a_{eq})$], on en déduit que $y = \rho_m/\rho_r$, et que l'équation d'état du mélange des deux fluides est

$$w = \frac{1}{3} + \frac{1}{1+y} \quad (5.137)$$

L'évolution (5.109) des ondes gravitationnelles peut alors être réécrite comme

$$\frac{d^2 E_{ij}}{dy^2} + \frac{4 + 5/y}{2y(1+y)} \frac{dE_{ij}}{dy} + \left(\frac{k}{k_{eq}} \right)^2 \frac{2}{1+y} E_{ij} = 0 \quad (5.138)$$

où nous sommes passés à la variable y : pour obtenir cette équation, nous avons utilisé le fait que les dérivées par rapport à y sont données par $\frac{d}{dy} = y' \frac{d}{d \ln x}$, et que le paramètre de Hubble est donné par $H = y'/y$. L'équation de Friedmann, avec cette variable, prend la forme

$$M^2 = M_{eq}^2 \frac{1}{y^2} \quad (5.139)$$

où M_{eq} est la valeur de M à a_{eq} . Nous avons également introduit k_{eq} , la valeur du nombre d'onde correspondant au mode entrant dans le rayon de Hubble à égalité, défini par

$$k_{eq} = \mathcal{H}_{eq} = a_{eq} H_{eq} \quad (5.140)$$

L'équation (5.138) peut être intégrée numériquement et les solutions pour différentes valeurs de k/k_{eq} sont représentées sur la figure 5.4. Notez que plus le mode entre tôt dans le rayon de Hubble, plus il est amorti.

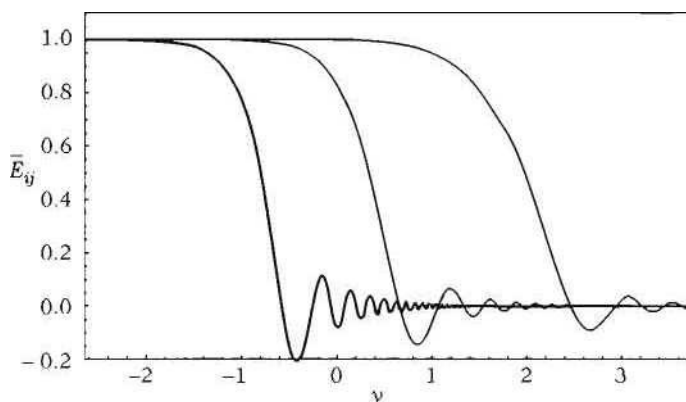


Fig. 5.4 Evolution des ondes gravitationnelles dans un Univers dominé par un mélange de matière et de rayonnement en termes de $y = a/a_{eq}$ ($y = 1$ à égalité) pour les modes de valeur $k/k^{\wedge} = 10, 1$ et $0,1$.

5.3.1.4 Solutions générales pour les modes de longueur d'onde longue

Dans un Univers plat ($TC = 0$), la forme (5.112) de l'équation d'évolution des ondes

$$u_T(q,fc) = a(q) \left[A_1(k) + A_2(k) \int^{\eta} \frac{d\bar{\eta}}{a^2(\bar{\eta})} + k^2 \int^{\eta} \frac{d\bar{\eta}}{a^2(\bar{\eta})} \int^{\bar{\eta}} d\bar{\eta} a^2(\bar{\eta}) u_T(\bar{\eta}, k) \right]. \quad (5.14)$$

For long wavelength modes, that is satisfying $k < S \cdot a''/a$, it reduces to gravitationnelles admet la solution intégrale (formelle)

$$u_T(q,fc) = a(q) \hat{A}_1(fc) + \int l_2(fc) a(\eta) y \quad (5.142)$$

où les deux constantes d'intégration $\hat{A}_i$ et A_i peuvent dépendre a priori de k . Notez, par analogie avec l'équation de Schrödinger, qu'il s'agit simplement du premier terme d'un développement de Born pour décrire la déviation d'une particule dans un potentiel.

5.3.2 Evolution du potentiel gravitationnel

Nous nous intéressons à l'évolution du potentiel gravitationnel, réécrivons donc son équation d'évolution sous la forme

$$\langle \delta'' + 3\tilde{\Gamma} (1 + c^2) + [27f + (H^2 - TC) (1 + 3c^2)] \langle \delta \rangle - c^2 A \langle I \rangle = \gamma a^2 P T \rangle \quad (5.143)$$

lorsqu'on néglige les contributions de la contrainte anisotrope ($s_i = 0$).

5.3.2.1 Another formulation of the évolution équation

A reduced form of this évolution équation can be obtained. First, we introduce the auxiliary fonction

$$e = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{2} \dot{a}^2 - \frac{1}{2} \right) \quad (5.144)$$

which can be rewritten as

$$e = - \left[f(H^2 - w + \kappa) a^3 \right]^{1/2} \quad (5.145)$$

We then défini ne the auxiliary variable

$$u_s = \frac{2}{3} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \quad (5.146)$$

thanks to which, and after a tedious, but straightforward, computation, one can show that (5.120) eventually takes the form

$$u_s'' - \left(\frac{\theta''}{\theta} + c_s^2 \Delta \right) u_s = \frac{\kappa}{3} \frac{\theta}{\mathcal{H}} a^4 \mathcal{P}\Gamma, \quad (5.147)$$

qui partage de nombreuses fonctionnalités avec le formulaire (5.112) et peut donc être analysé à l'aide d'outils similaires.

5.3.2.2 Solution Integra) pour les modes de longueur d'onde longue

La partie homogène de cette équation peut être intégrée pour n'importe quel mode de grande longueur d'onde en remarquant que $u = \dot{a}$ est une solution. Dans l'espace de Fourier, on obtient

$$u_s(M) = X(k)^{\wedge} + B(kWr)) p + O \quad \blacksquare \quad (5.148)$$

Cette solution est valable pour tous les modes à l'ère de la matière tant que la perturbation d'entropie T est négligeable. Comme discuté ci-dessus, il peut être comparé à (5.142) en remplaçant a par $\dot{O}$.

5.3.2.3 Première intégrale

L'équation (5.143) admet une première intégrale pour l'évolution adiabatique des modes super-Hubble [35]. En effet, en introduisant la quantité [36]

L'évolution ($F = 0$) des modes super-Hubble ($k/H \ll 1$) a ζ comme premier intégral, à savoir que l'approximation

$$\zeta = \frac{2}{3} \frac{\delta}{1+w} \quad (5.149)$$

(5.143) takes the form

$$\zeta' = \frac{2}{3} \frac{\mathcal{H}}{1+w} \left\{ \frac{K}{\mathcal{H}^2} \left[\frac{1+3w}{2\mathcal{H}} \Phi' + 3(c_s^2 - w) \Phi \right] + \frac{\kappa}{2} \frac{a^2}{\mathcal{H}^2} \rho \Gamma - c_s^2 \left(\frac{k}{\mathcal{H}} \right)^2 \Phi \right\}, \quad (5.150)$$

where we have used (C.19) and (C.22) to evaluate w' and h' . We infer that as long as the curvature is negligible, i.e. in the regime for which $K/7 - \dot{F}$ the adiabatic

$$\dot{\zeta} = 0 \quad (5.151)$$

est valable sous ces hypothèses. Notons que si l'évolution n'est pas adiabatique, alors (5.150) prend la forme

$$= \quad (5.152)$$

donc la conservation de ξ n'est pas assurée si des perturbations d'entropie se produisent. La grandeur ξ , s'avère avoir une interprétation géométrique très simple : en considérant l'expression (C.31) de la courbure spatiale, on remarque que ζ est exactement cette courbure dans la jauge comobile.

Introduisons également la perturbation de courbure dans la jauge à tranche plate comme

$$\equiv -C + \frac{1}{3} \frac{\delta \rho}{\rho + P} = -C + \frac{1}{3} \frac{\delta}{1+w}. \quad (5.153)$$

La variable ξ_{asT} , étant invariante de jauge, peut être exprimée en termes de potentiel gravitationnel comme

$$\xi = \Phi - \frac{2}{3} \frac{\mathcal{H}}{(1+w)(\mathcal{H}^2 + K)} \left\{ \Phi' + \frac{1}{3} \left[\frac{K}{\mathcal{H}^2} + \left(\frac{k}{\mathcal{H}} \right)^2 \right] \mathcal{H} \Phi \right\} \quad (5.154)$$

Nous en déduisons que ξ_{BST} satisfait donc

$$\frac{2}{3} \frac{-H^2}{(1+w)(H^2 + K)} \quad (5.155)$$

Notez que contrairement à (5.150), le terme de droite de cette équation n'implique pas la courbure spatiale K . Ainsi, ξ_{BST} reste constant dans le temps pour les modes adiabatique ($F = 0$) et super-Hubble ($k/H \ll 1$) à condition que $\delta' + 2Y\dot{\xi}$ ne diverge pas lorsque $k/H \rightarrow 0$, ce qui est le cas si le mode décroissant est négligeable.

Il est facile de voir que les deux quantités ne diffèrent qu'à des échelles inférieures à Hubble et qu'elles sont liées par

(5.156)

Il convient de noter à ce stade que la conservation de ξ_{BST} , bien que dérivée dans le cadre des équations d'Einstein, ne dépend en fait pas de la théorie de la gravité sous-jacente, mais uniquement de $\dot{\xi} = 0$, c'est-à-dire du fait que le tenseur des contraintes est conservé [37].

Cette hypothèse est beaucoup plus faible et rend cette variable utile dans des cadres plus

5.3.2.4 Effet d'une variation de l'équation d'état cosmique fl uid

A titre illustratif, considérons l'évolution du potentiel gravitationnel lors d'un changement de l'équation d' état. On suppose donc que w varie de $u > 1$ pour $t) < q$ » (époque 1) à $u > 2$ pour $q > q$, (époque 2) et nous supposons que $K = 0$ et $T = 0$.

Dans chaque phase, le facteur d'échelle évolue comme $a \propto t^{p_i}$, avec $n_i = -p_i$ et $1 + w_i = 2/(3p_i)$.

La solution générale (5.148) pour les modes de longueur d'onde longue implique

$$\Phi = \frac{\mathcal{H}}{a^2} \left[A_- + A_+ \int a(1+w) d\eta \right] \quad (5.157)$$

où A_+ et A_- sont deux constantes qui caractérisent les modes de croissance et de décroissance. Si l'on suppose que le mode décroissant à l'ère I a eu suffisamment de temps pour devenir négligeable, alors, avant la transition, le seul mode qui reste est le mode constant, à savoir $\Phi(77 < p_*) \sim A_+ (1 + w_j) p_i / (p_i + 1) = 24 \text{ }_4 \text{ }_- / [3(Hp_1)L]$ alors qu'à un temps suffisamment long après la transition, lorsque le terme décroissant est également négligeable, on se retrouve de la même manière avec $\Phi(?) \gg 77*) \sim 2A_+ / [3(1 + P_2)]$. On a alors

$$\frac{\Phi(p_*)}{\Phi(77 < p_*)} = \frac{1 + P_i}{1 + P_2} \quad (5.158)$$

Dans le cas particulier d'une transition entre une ère dominée par les radiations ($p_1 = -1$) et une ère dominée par la matière ($p_2 = -1/3$), cela conduit à

$$\frac{\Phi(\eta \gg \eta_*)}{\Phi(\eta < \eta_*)} = \frac{9}{10} \quad (5.159)$$

pour les modes à grande longueur d'onde.

Notons qu'on aurait pu arriver à la même conclusion du fait que $\mathcal{H}$ est constant au cours de l'évolution, puisque d'après (5.149), $(\sim (1 + 2/[3(1+w)]))^{1/2}$ pour le mode croissant, à chaque époque. Il s'avère que dans ce cas particulier, la relation (5.159) peut

also be obtained by using the analytical solution for the scale factor [27].

5.3.3 Modes scalaires en régime adiabatique

Nous supposons dans les exemples suivants que l'influence du tenseur de contraintes anisotrope et de la perturbation entropique sont négligeables ($T_f = 0$ et $T = 0$). En particulier, cela implique que les deux potentiels gravitationnels sont égaux, $\Phi = \Psi$. Ainsi, ce chapitre se concentrera principalement sur l'étude de l'équation d'évolution (5.143) avec $F = 0$. À noter que ces hypothèses sont valables dans la plupart des évolutions de l'Univers.

5.3.3.1 Univers dominé par un fluide d'équation d'état $w \neq 0$

Considérons un Univers fiduciaire ($K = 0$) dominé par un fluide avec une équation d'état constante w . En particulier, cela implique que $c\mathcal{H} = w$. Le facteur d'échelle d'un tel Univers évolue comme un $a \propto t^u$ avec $u = 2/(1 + 3w)$, de sorte que dans l'espace de Fourier, l'équation d'évolution (5.143) prend la forme après introduction de la fonction $f = x^{-u} \langle f \rangle$ et $x = krp$. La solution générale de cette équation est connue et donne le potentiel gravitationnel. Cette dernière peut être exprimée en termes de fonctions de Bessel comme

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{df}{dx} + \left[w - \frac{\nu(\nu + 1)}{x^2} \right] f = 0, \quad (5.160)$$

$$\delta = -x^{-\nu} [Aju(c_s x) + Bn''(c_s x)] = -x^{-\nu} Z_u(c_s x), \quad (5.161)$$

où et n_u sont des fonctions de Bessel sphériques définies dans l'Annexe B, et où la deuxième égalité définit Z_v . L'équation de Poisson (5.117) permet de déduire que le contraste de densité est donné par

$$(5.162)$$

et (5.119) implique alors que

$$kV = -\frac{3}{4}x^{1-\nu} \quad (5.163)$$

En utilisant le comportement asymptotique des fonctions de Bessel (voir Annexe B), nous obtenons le comportement suivant dans les deux régimes limites

	$c_s x \ll 1$	$c_s x \gg 1$
δ	$2(\frac{1}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}x^{1-2\nu}) / (3i^{1/2})$	$24^{1/2} x^{1/2} \cos(c_s x - \frac{1}{2}\pi)$
$-kV$	$2[t' + x - 4] / (1 + \nu) x^{-2\nu} / [3\nu(1 + w)]$	$24^{1/2} x^{1/2} \cos(c_s x - \frac{1}{2}\pi) / [3\nu(1 + w)]$

La phase est donnée par $\phi = \dots + 1/2$. Pour des longueurs d'onde beaucoup plus courtes que la

rayon acoustique ($c_s \ll 1$), δ se comporte comme une onde sonore amortie si $w < 1$. Radiation ($w = 1$) est le cas limite où l'amplitude de la perturbation de densité reste constante (Fig. 5.5). En dehors du rayon acoustique ($c_s \gg 1$), le mode de croissance du potentiel gravitationnel) reste constant.

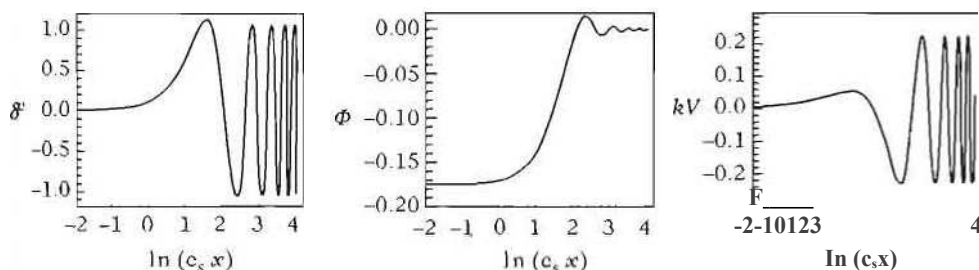


Fig. 5.5 Evolution of the density contrast (left), of the gravitational potential (middle) and of the velocity perturbation (right) for the scalar modes of a radiation fluid ($w = c^2 = j$) in a radiation-dominated Universe ($u = 1$) in terms of $c_s x = c_3 k r$. The mode is constant as long as the wavelength is larger than the Sound radius ($c_s x < 1$) and it starts a damped oscillatory behaviour as soon as it is smaller ($c_s x > 1$).

Nous déduisons également de ces calculs qu'au cours de l'ère des radiations, les fluctuations de densité super-Hubble du fluide radiant augmentent comme le carré du facteur d'échelle,

$$\frac{d^2 \delta}{d \ln a} \propto a. \quad (5.164)$$

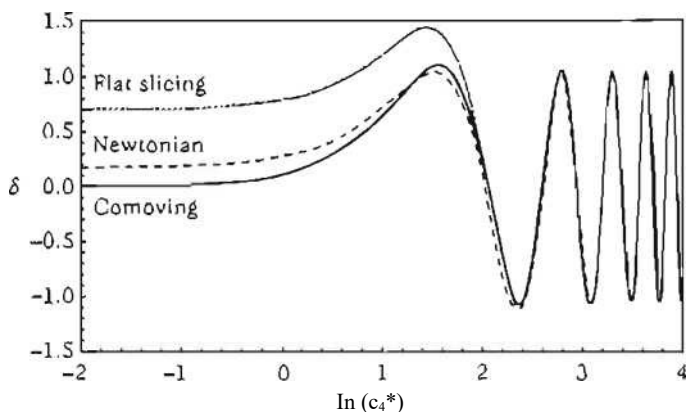


Fig. 5.6 Evolution of the density contrasts $\hat{O}^c$ (solid line), (dashed) and $\langle \delta^p \rangle$ (dotted) in terms of $c_s x \sim c_s k r$. As long as the wavelength is larger than the sound radius ($c_s x < 1$) there is a difference between these three quantities that converge rapidly as soon as they become smaller than the sound radius ($c_s x > 1$). This illustrates the effect of the gauge choice.

5.3.3.2 La matière fluide dans un univers dominé par la matière

Dans le cas d'un Univers dominé par la poussière ($w = \frac{1}{3}$ et $v = 2$), et en utilisant le même

Les notations comme dans la section précédente, (5.160) prend la forme,

$$dx^2 x dz \quad \frac{6}{x^2} f = 0 \quad (5.165)$$

dont la solution générale fournit le potentiel, le contraste de densité et la vitesse, à savoir

$$3^* = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{x} + 3 \right) x^{-5}, \quad \phi^0 = -\frac{72}{6} \ln x - \frac{1}{3} k V = \frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{4} \quad (5.166)$$

Nous concluons (puisque $a \propto x^2$) que le contraste de densité de la matière δ_m augmente (5.167)

indépendamment de la longueur d'onde, ce qui est la conclusion à laquelle nous étions parvenus de l'analyse newtonienne pour les modes sous-Hubble voir (5.22)]. La constance du potentiel gravitationnel dans un Univers dominé par la matière et le fait que le contraste de densité ne peut pas croître (au-delà du facteur d'échelle) ont conduit Landau en 1946 à la conclusion que l'instabilité gravitationnelle dans un espace-temps en expansion ne pouvait pas expliquer le phénomène. structures à grande échelle observées dans l'Univers [38]. En effet, si les fluctuations initiales sont de simples fluctuations thermiques, elles ne peuvent croître, selon (5.167), que d'un simple facteur 10^{-4} au cours de l'ère dominée par la matière, ce qui est beaucoup trop faible pour expliquer l'existence des fluctuations actuelles. Il faut donc trouver un mécanisme capable de générer des perturbations de l'ordre de 10^{-4} au début de l'ère dominée par la matière afin que celles-ci aient suffisamment de temps pour croître de manière non linéaire à l'époque actuelle.

5.3.3.3 Effet de courbure

La courbure, se comportant comme un κ^{-2} , ne peut dominer qu'à des moments tardifs, c'est-à-dire à un moment où le rayonnement est négligeable, c'est-à-dire pendant l'époque dominée par la matière que nous considérons ici. La solution pour l'évolution du facteur d'échelle dans un tel univers de matière et de courbure a été obtenue auparavant, dans la section 3.2.1. Si l'on considère uniquement la transition matière-courbure (c'est-à-dire le cas $a = 5$), on peut intégrer (5.143) analytiquement pour obtenir

$$\frac{V}{V_0} = \frac{\sinh^6(r\zeta/2)}{\sinh^6(r/2)} \quad (5.168)$$

où nous avons supposé $K = -1$. Notons que dès que la courbure domine ($q > 1$) alors $\sim B(k)e^{-\eta}$ et le contraste de densité peut être trouvé à l'aide de (5.117), soit

$$\overline{\rho_0} \quad (5.169)$$

Ainsi, dès que la courbure domine, le potentiel gravitationnel décroît de façon exponentielle et le contraste de densité se fige.

Pour une courbure positive, soit $K = +1$, la solution de (5.143) devient

$$\frac{\sin^6(r/2)}{\sin^6(T/2)} \quad (5.170)$$

et nous avons maintenant deux comportements distincts. Lorsque $r \rightarrow \pi/2$, on s'approche du maximum du cycle d'expansion, H devient extrêmement petit, et $\sim 8B(k)$. L'Univers entre alors dans une phase ultérieure de contraction, au cours de laquelle il convient de noter que les deux modes divergent : la contraction amplifie l'effondrement gravitationnel. Juste avant le gros crunch à $T = 2\pi - \pi/2$, le potentiel est $\Phi \sim 2(6\pi/5)B - 1/4 \sin^6(r\zeta/2)$ et le contraste de densité évolue comme

$$\frac{1}{\rho_0} \sim \frac{2.67rB(\dot{A})}{\rho_{\text{peché}} \left(\frac{A(k)}{q/2} \right)^{1/2}} \frac{Q_0}{dm/2} \quad (5.171)$$

5.3.3.4 Effet de la constante cosmologique

Une constante cosmologique ne peut également dominer qu'à des époques tardives, c'est-à-dire à une époque où le rayonnement est négligeable. Présentation de $\dot{A}/A = \dot{U}/U = (A/fcp)^{1/3}$, on constate facilement que la transition entre l'ère dominée par la matière et l'ère dominée par la constante cosmologique se produit au redshift

$$1 + Z_A =$$

et l'équation de Friedmann prend la forme

$$77^2$$

L'équation (5.143) prend alors la forme

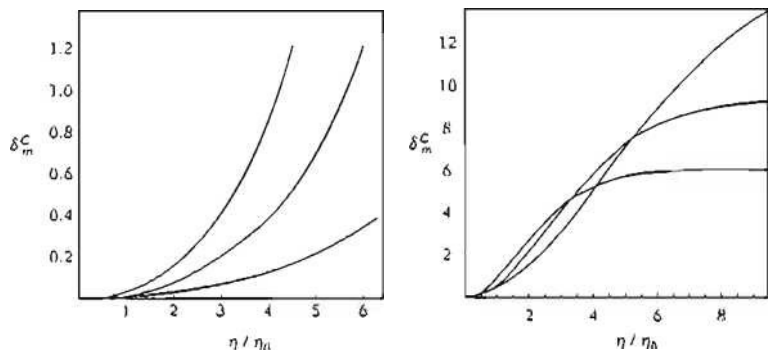


Fig. 5.7 Evolution of the density contrast δ_m^c in a Universe with spherical spatial section (left) for $f_0 = 1.2, 1.3, 1.4$ and a Universe with hyperbolic spatial sections (right) for $Q_0 = 0.2, 0.3, 0.4$.

$$\ddot{\Phi} + \frac{1}{2y_\Lambda} \frac{7 + 10y_\Lambda^3}{1 + y_\Lambda^3} \dot{\Phi} + \frac{3y_\Lambda}{y_\Lambda^3 + 1} \Phi = 0. \tag{5.172}$$

Le contraste de densité est alors donné par

$$\delta_m^c = -\frac{2}{3} \left(\frac{k}{\mathcal{H}_\Lambda} \right)^2 y_\Lambda \Phi \tag{5.173}$$

Dès que $y \ll 1$, le potentiel décroît comme $1/y$ et le contraste de densité atteint une valeur constante (voir Fig. 5.8). Dans un tel Univers, la formation de structures à grande échelle s'arrête à un redshift de l'ordre de $z \sim 1$.

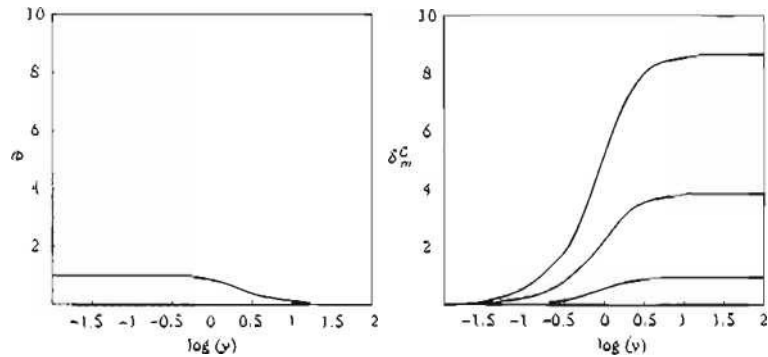


Fig. 5.8 Evolution of the gravitational potential (left) and of the density contrast (right) in a Universe dominated by a cosmological constant, on the right, we have shown the three modes $k/TL^\Lambda = 1, 2, 3$.

5.3.3.5 Cas d' un Univers dominé par un mélange de matière et de rayonnement

Considérons maintenant le cas d' un Univers fiat ($K = 0$) dominé par un mélange de matière ($w = 0$) et de rayonnement ($w = 1/3$). On introduit à nouveau la variable y , le facteur d'échelle (5.136) normalisé à égalité et on a

$$w = \frac{1}{3} (1 + y)^{-1} \quad \text{and} \quad c_s^2 = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{3}{4} y \right)^{-1} \quad (5.174)$$

Utilisation de $\langle h' = 7iyd\langle \rangle/dy, 4 \rangle = \frac{1}{2} y^2 d^2 \langle \rangle/dy^2 + y'' d\langle \rangle/dy$ et la forme (5.139) de l'équation de Friedmann, on peut réécrire l'évolution (5.143) comme

$$\frac{d^2 \Phi}{dy^2} + \frac{1}{1+y} \frac{d\Phi}{dy} + \frac{8}{3} \frac{d^2 \langle \rangle}{dy^2} + \frac{1}{(1+y)(4+3a)} = \frac{2}{3} \frac{w}{f_c} J, \quad (5.175)$$

où k_{eq} est défini par (5.140). Dans le cas $F = 0$, nous avons intégré cette équation pour obtenir les solutions représentées sur la Fig. 5.9.

Pour une perturbation d'entropie non nulle, il faut connaître le comportement réel de T afin de résoudre (5.140). Comme nous le montrerons plus tard, pour les grandes longueurs d'onde, F reste essentiellement constant, de sorte que les résultats de la Fig. 5.9 sont alors une bonne approximation de ces modes dans le cas adiabatique.

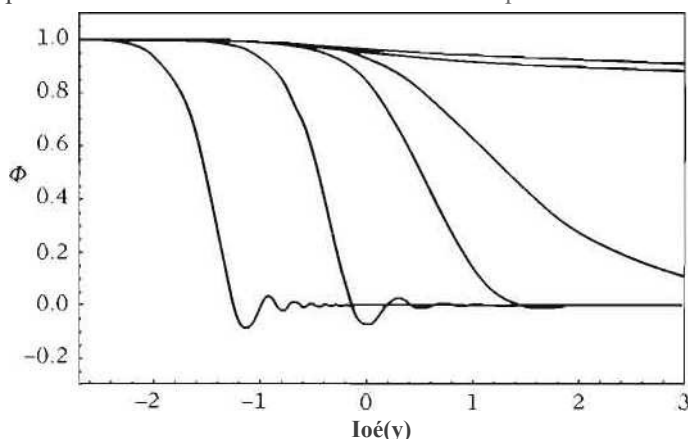


Fig. 5.9 Evolution of the gravitational potential in a Universe dominated by a mixture of matter and radiation, assuming that $F = 0$ for $\ln(a/a_i) = 0$, 0.1, 1, 2, 10, 100. This figure should be compared with Fig. 5.12 where the time variation of the entropy is taken into account

Il est intéressant de noter que dans le régime $F \gg 1$, cette équation peut être résolue analytiquement. En effet, en mettant $\langle \rangle = y^3 \Phi / (1+y)$, on obtient facilement $d\langle \rangle/dy \propto y^2 / (4+3y)(1+y)^{3/2}$ qui peut être intégrée pour donner

$$S = 1 \wedge 5 \left(\frac{16v}{\wedge} + 9y3 + 2\tilde{y}2\_8i + \_16 \right) \quad (5.176)$$

Pour un mode super-Hubble, on récupère $S(y - 1)/S_Q = 9/\hat{u}$, ce qui est un cas particulier du résultat (5.159).

5.3.4 Mélange de plusieurs fluides

Dans le contexte actuel) cosmologique, il faut considérer plusieurs fluides, par exemple les baryons, la matière noire, les radiations, etc. Ces différents fluides interagissent par la gravité, mais peuvent également être couplés par des forces non gravitationnelles. La figure 5.10 résume les principaux composants à prendre en compte ainsi que leurs interactions potentielles.

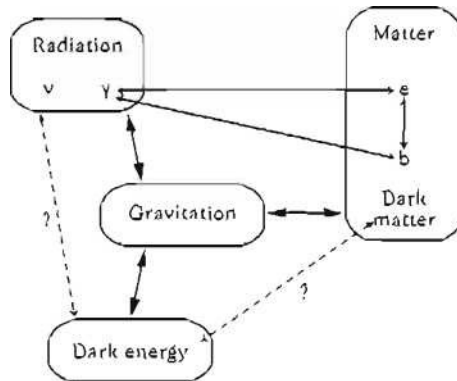


Fig. 5.10 Les différents fluides cosmologiques et leurs interactions. Les électrons et les baryons sont couplés via la force coulombienne et les photons interagissent avec la matière chargée via la diffusion Compton. La matière noire n'interagit que gravitationnellement avec la matière ordinaire. Il n'est pas exclu que l'énergie noire interagisse avec la matière ordinaire ou avec la matière noire d'une manière encore inconnue.

5.3.4.1 Description des interactions

Dans le cas couplé le plus général, la conservation du tenseur énergie-impulsion n'est valable que pour l'énergie-impulsion totale, alors que les tenseurs énergie-impulsion individuels satisfont aux équations de conservation de la forme

$$= Q_a \quad (5.177)$$

où Q_a représente les forces agissant sur le composant a du fluide. Ces termes doivent satisfaire la contrainte

$$\mathcal{L}X = \dot{U} \quad (5.178)$$

qui est simplement la loi action-réaction. Il peut être dérivé des identifications de Bianchi qui impliquent la conservation du tenseur énergie-impulsion totale.

À l'ordre le plus bas, les symétries espace-temps impliquent que

$$Q := (-aQ_0, 0), \quad (5.179)$$

de sorte que $Q^\wedge Q_i g^\wedge \sim Q_a$ - Notez que $(p_{||z} + \ddot{u}_M \hat{u}_z) < Q_0 = 0$, de sorte que les symétries de l'espace-temps de fond impliquent qu'il ne peut exister aucune force entre les fluides, au niveau du fond. Compte tenu des couplages, les équations de conservation se généralisent à

$$p; + 3W(1 + w_a)p_a = aQ_a, \quad (5.180)$$

et nous trouvons

$$w'_a = 32i(1 + w_a) - \ddot{u}_z \cdot \hat{u}_z (c_a^2 - w_a) \quad (5.181)$$

où w_0 et c_a sont respectivement l'équation d'état et la vitesse du son de la composante a .

À l'ordre linéaire des perturbations, Q_a peut être décomposé comme

$$Q^\wedge Q_a u^\wedge + F^\wedge \text{ avec } = 0. \quad (5.182)$$

Nous définissons $afg = (6\{f + u^\wedge u_v\})F^\wedge$, de sorte que $/\square = 0$ et $/$ peuvent, comme d'habitude, être décomposés en un scalaire et un vecteur comme $/\mathcal{E} = /_a + D^I f_a$. Sous une transformation de jauge de la forme (5.57), ces quantités se transforment comme

$$6Q_{un} - 6Q_{un}4 - Q'_{un}T, \quad (5.183)$$

et $/_{un}$ est invariant par rapport à la jauge, puisqu'il disparaît au niveau de l'arrière-plan. Ainsi, nous pouvons définir la quantité

$$<5Q^N_a = \hat{O}Q_a + Q'_a(B - \mathcal{E}'), \quad (5.184)$$

qui est invariant par rapport à la jauge. Avec ces notations, l'équation de continuité (5.125) et l'équation d'Euler (5.126) pour la composante a généralisent comme

$$1 + w_n/ = -(\Delta V_a - 3\Psi') - 3\mathcal{H} \frac{w_a}{1 + w_a} \Gamma_a + \frac{a}{\rho_a + P_a} [\delta Q^N_a + Q_a (\Phi - \delta^N_a)], \quad (5.185)$$

and

$$v; + w_0 = -\mathcal{E} - \frac{C_a r^c \cdot M'_a 1}{1 + w_a 1 + w_a} \left[\Gamma_a + \frac{2}{3} (\Delta + 3K) \bar{\pi}_a \right] + \frac{a}{\rho_a + P_a} (f_a - Q_a c_a^2 V_a). \quad (5.186)$$

5.3.4 2 Système de fluides interagissant gravitationnellement

Nous considérons le cas simplifié dans lequel un ensemble de fluides interagissent uniquement par gravitation. Dans ce cas, $= 0$ pour chaque fluide et le tenseur énergie-impulsion est donc la somme des tenseurs

énergie-impulsion

Chaque tenseur énergie-impulsion peut être décomposé comme dans (5.69) de sorte que la densité et la pression totales puissent être définies comme

$$p = \frac{1}{2} p_{00}, (p + w = \frac{1}{2} (p_{aa} + p_{00})) \quad (5.187)$$

We have

$$flw = \quad (5.188)$$

et

$$s = \frac{z}{un} \frac{J}{1+w} \quad (5.189)$$

Par souci de simplicité, Jet considérons un système à deux fluides. Il sera décrit par deux contrastes de densité, δ_a et δ_b , et deux champs de vitesse, u^* et v'_b . Il est pratique de transformer ces variables en un ensemble de variables, δ et v , décrivant les propriétés du liquide total et en un ensemble de variables S_{ab} et $V^{\wedge}$, décrivant leurs propriétés relatives. Les définitions (5.187) impliquent que

$$Q\delta = \frac{1}{2} \frac{1}{\delta_a} \delta_a + 0(1+w)u = O_{\mathcal{A}}(1+w_a)u_a, a \quad \hat{u} \quad (5.190)$$

pour les modes scalaires. Ces quantités satisfont l'équation de continuité (5.125) et l'équation d'Euler. (5.126). La perturbation entropique, F , est définie comme précédemment par la relation (5.78), de sorte que, pour un tel mélange de fluides, elle prend la forme

$$\frac{dw}{dt} = w_0 \frac{dr_a}{dt} + (s'' \quad A \quad 's) \quad (5.191)$$

Le premier terme correspond à la contribution entropique des composants du mélange et le deuxième terme, qui ne s'annule pas même si $F_a = 0$ pour chaque composant, représente l'entropie du mélange. On peut vérifier que cette seconde contribution est invariante de jauge.

Les équations d'Einstein prennent la forme générale obtenue précédemment mais pour les quantifications décrivant le fluide total. En particulier, (5.117) et (5.118) peuvent être réécrits sous la forme

$$- \mathcal{S} = 37-t^2 y^{\wedge} n_a W_n 7T_a. a \quad (5.193)$$

Novu, S_{ab} et V_{at} sont définis respectivement par

$$c = \frac{\langle 5Z \rangle}{1 + W_{une} 1 + W_b} \text{ et } V_{\hat{u}b} = v_a - \quad (5.194)$$

qui sont, par construction, invariants de jauge. A l'aide des relations (5.190), obtenir facilement la relation inverse

$$(5.195)$$

et l'expression analogue pour ϕ_b est obtenue en échangeant a et b .

Les équations d'évolution pour les quantités S_{ab} et V_{ab} sont obtenues en combinant l'équation de continuité sous la forme (5.127) et l'équation d'Euler (5.130) pour chaque fluide. On a

$$S'_{ab} = -4V_{ab} - 3W_{ab}, \quad (5.196)$$

$$V'_{ab} = -\mathcal{H}V_{ab} - (c_a^2 - c_b^2) \frac{\delta^c}{1+w} - \left[\frac{2}{3} (\Delta + 3K) \bar{\pi}_{ab} + \Gamma_{ab} \right] \quad (5.197)$$

avec les définitions

$$\frac{U_a}{1+w_a} \quad \frac{W_b}{1+w_b} \quad (5.198)$$

$$ab - \frac{1}{1+w_o} \bar{\pi}_a \quad \frac{W_b}{1+w} \gamma T \quad (5.199)$$

Pour résoudre complètement l'évolution d'un système de deux fluides en interaction, nous devons donc résoudre l'évolution (5.143) du potentiel gravitationnel, où P est maintenant donné par la relation (5.191), ainsi que la paire d'équations (5.196) et (5.197) : la relation (5.192) donne alors A .

5.3.4.3 Modes adiabatiques et isocourbures

Deux types différents de conditions initiales peuvent être distinguées pour un système de deux fluides : on peut décider que la perturbation d'entropie disparaît initialement (conditions initiales adiabatiques), ou au contraire faire en sorte que le potentiel gravitationnel s'annule initialement, c'est à dire « équilibre ». les perturbations de densité pour que $S=0$ (conditions initiales d'isocourbure). On définit ainsi les deux régimes limites

- *adiabatique*. il est assuré que $P = S_{ab} = 0$, d'où on déduit que

$$(5.200)$$

- *isocourbure* : dans ce cas, on impose que $\phi = 0$ et on a donc

$$\phi = 0, \text{ si } \phi_o + \phi_b = 0. \quad (5.201)$$

Les équations d'évolution étant linéaires, tout système peut toujours être décomposé en une

combinaison linéaire d'un système initialement adiabatique et d'un système initialement isocourbure.

0, 3.4.4 Mélange de deux fluides parfaits

La discussion dans la section précédente est très générale. En pratique, nous nous intéressons à des cas particuliers plus simples. Considérons celui d'un mélange de deux fluides parfaits ($\mathcal{I} = \hat{u}$, $7r_a = \hat{u}$) avec des interactions purement gravitationnelles. En utilisant (5.188) et (5-189), la relation (5.191) se réduit à

$$w\Gamma = -\frac{\Omega_a\Omega_b(1+w_a)(1+w_b)}{\Omega^2(1+w)}(c_a^2 - c_b^2)S_{ab},$$

so that a closed system can be written for δ^c and S_{ab} , namely

$$\Phi'' + 3\mathcal{H}(1 + c_s^2)\Phi' + [2\mathcal{H}' + (\mathcal{H}^2 - K)(1 + 3c_s^2)]\Phi - c_s^2\Delta\Phi = \frac{3}{2}\mathcal{H}^2\frac{\Omega_a\Omega_b(1+w_a)(1+w_b)}{\Omega(1+w)}(c_a^2 - c_b^2)S_{ab}, \quad (5.202)$$

$$(\Delta + 3K)\Phi = \frac{3}{2}\mathcal{H}^2\Omega\delta^c, \quad (5.203)$$

$$S_{ab}'' + \mathcal{H}S_{ab}' - \frac{\Omega_a(1+w_a)c_b^2 + \Omega_b(1+w_b)c_a^2}{\Omega(1+w)}\Delta S_{ab} = (c_a^2 - c_b^2)\frac{\Delta\delta^c}{1+w}. \quad (5.204)$$

Ce système se réduit à un système de deux équations différentielles du second ordre couplées si le potentiel gravitationnel est éliminé de (5.202) par différenciation (5.203).

5.4 Spectre de puissance des fluctuations de densité

Nous allons maintenant nous intéresser au spectre de puissance des fluctuations de densité de matière noire. Pour cela, et par souci de simplicité, nous supposons que toute matière est sombre (c'est-à-dire $O_b \ll 1$). De plus, nous nous limitons à $a = 1$ (l'univers ne contient donc, par construction, que de la matière noire et des radiations. On choisit la normalisation $f_0 = 1$).

Comme précédemment, nous introduisons le facteur d'échelle y normalisé à égalité [voir (5.136)] pour que la loi de Hubble prenne la forme (5.139). La valeur de y aujourd'hui est

$$y = \frac{1}{1+w} = 14^{-1} \approx 2,4 \times 10^{-4} \text{ hein ?}$$

[voir (4.8)]. L'équation de Friedmann évaluée aujourd'hui permet de calculer la valeur numérique du mode entrant dans le rayon de Hubble au moment de l'égalité matière-radiation (5.140), soit

$$k_{\text{eq}} = 0,072 \text{ h Mpc}^{-1}, \quad (5.205)$$

correspondant à une longueur d'onde

$$\lambda = \frac{1}{k_{\text{eq}}} = 14 \text{ h Mpc} \quad (5.206)$$

En général, un mode k donné entre dans le rayon de Hubble lorsque $k \rightarrow H$, et l'équation de Friedmann (5.139) nous permet de déterminer que cela se produit à un redshift

$$V^*(F) = \frac{1}{4Jt} \left(\frac{1}{y} + z \right) \quad (5-207)$$

où nous avons introduit le nombre d'onde réduit

$$k = \frac{\omega}{c} \quad (5-208)$$

pour plus de commodité de notation.

5.4.1 Deux approches équivalentes

Nous pouvons suivre deux approches pour étudier ce système physique. La première consiste à considérer les 4 équations d'évolution pour les contrastes de densité et les perturbations de vitesse de chaque fluide, ainsi que l'équation de Poisson. La seconde consiste à utiliser les résultats de la section précédente pour le contraste de densité totale et les perturbations d'entropie. Nous utiliserons l'une ou l'autre formulation selon la situation.

5.4.1.1 Evolution des contrastes de densité

Notre système est composé d'un mélange de rayonnement et de matière qui interagissent uniquement gravitationnellement, de sorte que le système d'équations est déduit de (5.125) et (5.126). Dans les modes de Fourier, ils se réduisent à

$$\delta'' = f c^2 V_m + 3\delta', \quad (5.209)$$

$$S''' = 1 f c^2 K + 4\delta', \quad (5.210)$$

$$(5.211)$$

$$V_r' = -\frac{1}{3} \delta - \frac{1}{3} f t f, \quad (5.212)$$

où nous avons utilisé ce « ! » = $\langle \delta \rangle$ puisque $\nabla \cdot \mathbf{r} = 0$. Une autre équation doit être ajoutée pour déterminer le potentiel gravitationnel et nous choisissons d'utiliser l'équation de Poisson

$$-\nabla^2 \Phi = \frac{3}{2} \mathcal{H}^2 \quad (5.213)$$

ou (5.119) sous la forme

$$\Phi' + \mathcal{H}\Phi = -\frac{3\mathcal{H}^2}{2} \left(\Omega_m V_m + \frac{4}{3} Q_r V_r J \right) \quad (5.214)$$

Ces deux équations peuvent également être utilisées de manière combinée pour exprimer δ en termes de δ et δ' seulement.

5.4.1.2 Evolution du potentiel gravitationnel et de l'entropie

En utilisant les expressions (5.174) pour exprimer δ^c et w , le Système (5.202)-(5.204) se réduit à

$$\ddot{\Phi} + \left(7 - \frac{1}{1+y} + \frac{8}{4+3y}\right) \frac{\dot{\Phi}}{2y} + \frac{\Phi}{y(1+y)(4+3y)} = \frac{2}{(4+3y)y^2} \left(\delta^c - \frac{yS}{1+y}\right), \quad (5.215)$$

$$\delta^c = -\frac{4}{3} \left(\frac{k}{k_{eq}}\right)^2 \frac{y^2}{1+y} \Phi, \quad (5.216)$$

$$\ddot{S} + \frac{3y+2}{2y(1+y)} \dot{S} = \frac{2}{4+3y} \left(\frac{k}{k_{eq}}\right)^2 \left(\delta^c - \frac{y}{1+y} S\right), \quad (5.217)$$

avec $S = 6m$ - Nous avons également supposé que pour un Univers avec des sections spatiales euclidiennes et une constante cosmologique nulle ($\Lambda = A = 0$), les paramètres de densité de matière et de rayonnement peuvent être réécrits simplement en termes de facteur d'échelle rééchelonné y comme

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{1+y} \quad \text{et} \quad \frac{p}{p_0} = \frac{1}{4+y}. \quad (5.218)$$

Ce système généralise (5.175) au cas où la perturbation d'entropie n'est plus négligée. Le contraste de densité δ^N est alors donné par

$$\delta^N = \delta^c - 2 \left(\Phi + y \dot{\Phi} \right) \quad (5.219)$$

et le contraste de densité de chaque fluide sont

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{3(1+4y)/5}{1+3y/4} \frac{S}{4-y}, \quad \frac{p}{p_0} = \frac{6-yS}{1+4-3y/4} \quad \text{et ou} \quad (5.220)$$

5.4.1.3 Conditions initiales

Pour résoudre les systèmes (5.215)-(5.217), des conditions initiales pour les perturbations doivent être imposées (voir, par exemple, Réf. [39]). Ces conditions initiales sont profondément ancrées dans l'ère des radiations ($y \rightarrow 1$) et pour les modes super-Hubble ($k/H_0 \ll 1$).

Comme vu précédemment, on peut distinguer deux types de conditions initiales :

- *adiabatique* : les modes super-Hubble sont supposés constants (autrement dit le mode en décroissance a eu suffisamment de temps pour se désintégrer) et, par définition, on a,

$$\delta^c = 0, \quad S = 0, \quad S' = 0,$$

qui corrige tout pour le système (5.215)-(5.217). L'équation de Poisson implique que

$$\delta^c = -\frac{4}{3} \left(\frac{k}{k_{eq}}\right)^2 \frac{y^2}{1+y} \Phi, \quad A = \frac{1}{4+y} \quad (5.221)$$

où $x_x = k/ldi$ - (5.214) implique alors que

$$kV_i = -\frac{1}{2}x_i\Phi \qquad V_{r,i} \qquad V_{m,i} = V_i, \tag{5.222}$$

and (5.219) that

$$\delta_i^N = -2\Phi_i, \qquad \delta_{r,i}^N = \delta_i^N, \qquad \delta_{m,i}^N = \frac{3}{4}\delta_i^N, \tag{5.223}$$

qui fixe complètement les conditions initiales du Système (5.209)-(5.212)
- *isocourbe* , nous supposons toujours que les modes super-Hubble sont constants et la définition donne

$$\mathcal{S} = 0, \qquad \mathcal{E}'=0, \qquad S = S_x, \qquad S' = 0.$$

L'équation de Poisson
implique que

$$\frac{-c}{\langle S, i \rangle} = \langle S, i \rangle = -JhS \rangle. \langle S, i \rangle = Si, \tag{5.224}$$

de sorte que (5.214) implique
alors

$$V_{i,j} = V_m . i = V, = 0, \tag{5,225}$$

tandis que (5.219) fournit

$$(5,226)$$

ce qui fixe encore une fois complètement les conditions initiales du système (5.215)-(5.217).

5.4.2 Différents régimes

Le comportement des solutions de ces systèmes dépend principalement de la valeur du nombre d'onde *k* qui détermine l'instant auquel le mode devient sous-Hubble.

Afin d'avoir une idée des ordres de grandeur, le tableau suivant donne les valeurs de *y* et du redshift au moment où un mode donné devient sous-Hubble pour plusieurs valeurs sélectionnées de *k*.

t (h /)	MP (γ)	10 ⁻³	10 ⁻² 10 ⁻¹	0,1	10 ⁻¹ 2	$\hat{O}^{-3}$
		5 x 10 ⁻³	5x10 ⁻⁴ 5x10 ⁻³ 5x10 ⁻²	6,4x10 ⁻¹	26	2,5 x 10 ⁻³
		4,75 x 10 ⁰	4 75 x 10 ⁻⁴ 4 74 x 10 ⁻⁶ 4,63 x 10 ⁻⁵	3,7 x 10 ⁻⁴	9,05 x 10 ⁻²	8.4

Nous avons donc quatre types de comportement à prendre en compte, selon que le mode est (i) super-Hubble aujourd'hui, (ii) est devenu sous-Hubble à l'époque dominée par la matière, ou (iii) à l'époque dominée par les radiations. époque, ou (iv) s'il a toujours été sous-Hubble.

5.4.2.1 Modes Super-Hubble

Considérons d'abord les modes de grande longueur d'onde. En pratique, on peut négliger tous les termes faisant intervenir un Laplacien, qui sont proportionnels à *k*². L'équation (5.196) nous dit alors que l'entropie reste constante. En fait, on peut aussi arriver à cette conclusion en notant que (5.216) implique que $\delta^o \propto k^{-2}$. Dans l'ensemble des équations (5.215)^(5.217), les termes *k*² 4 ? et *k*² *S* sont négligeables par rapport respectivement à *S* et

S . Nous en déduisons alors que dans (5.217), $k^4/b/k^4 S$, ce qui implique que S est constant.

Notons alors qu'en utilisant la transformation (5.87) à introduire qui est de l'ordre de δ à $\delta \ll 1$ à l'ère des radiations, les deux équations (5.211) et (5.212) impliquent que

$$K'_m = -W''^* - \text{et donc ce}$$

K_m est $\propto a^{-1}$ pendant l'ère des radiations.

Dans le cas de conditions initiales adiabatiques, $S = 0$ et la solution peut être obtenue analytiquement sous la forme (5.176). Assez profondément dans l'ère des radiations, le potentiel gravitationnel et le contraste de densité totale sont constants. En particulier,

$$S''(\gamma) = \delta(\gamma),$$

peu importe γ . À l'ère des radiations, on obtient

$$S' = -2\delta(\gamma \ll 1), \quad \delta(\gamma) = -\delta(\gamma \ll 1),$$

et à l'époque de la matière ($\gamma \gg 1$)

$$\begin{aligned} \delta(\gamma) &= Y S' \delta(\gamma) \\ &= \text{FAIRE} \quad \delta(\gamma \gg 1) = -7\delta(\gamma \ll 1). \end{aligned} \quad (5.227)$$

Pour illustrer l'effet des conditions initiales, considérons maintenant quelques conditions initiales d'isocourbure et supposons qu'initialement $S = S_i$ et $\delta = 0$. Comme nous l'avons vu, S reste constant. Au plus profond de l'ère des radiations, ($\gamma \ll 1$), $\delta \sim \delta_i$ et donc $S' = S_i$. Notons alors que pour les modes super-Hubble, puisque $\delta \gg 1$ et S sont constants, $-2S$ est une solution particulière de (5.215). La solution générale satisfait la condition initiale $\delta = 0$ et est donc obtenue en ajoutant cette solution particulière à la solution générale (5.176) où la constante δ_Q doit être prise égale à $\delta_i - 2S_i$,

$$\begin{aligned} \delta(\gamma) &= \delta_i - 2S_i + 2J_2(\gamma) \\ &= \delta_i - 2S_i + 2J_2(\gamma) \end{aligned} \quad (5.228)$$

À l'ère dominée par la matière ($\gamma \gg 1$), $\delta^{\text{TM}} \sim \delta_i$ et $\delta(\gamma \gg 1) = -\delta_i/5$. Nous concluons que, pour $\gamma > 1$

$$\delta(\gamma) \sim \delta_i - \delta_i/5 = 4\delta_i/5 \quad (5.229)$$

5.4.2.2 Mode entre dans le rayon Hubble à l'ère de la matière

Comme on peut le voir sur la figure 5.11, même si le mode est sous-Hubble à partir d'un redshift de l'ordre de $z \approx 8,5$, il est toujours constant. En fait, pour établir ce résultat, nous avons dû

supposer que le terme laplacien était négligeable dans l'équation d'évolution du potentiel gravitationnel. Ceci est légitime tant que $c^2 k^2 < g 7Y^2$, c'est à dire si

$$\frac{2\ddot{\gamma}^2 \tau^2}{3(1+A)(1+3J/4)} \ll 1. \quad (5.230)$$

Foi les modes représentés m Fig. 5.11, $k = 10^{-3}$ et ce rapport est encore aujourd'hui égal à $1,7 \times 10^{-4}$. On peut vérifier que ce rapport est d'ordre unité pour $k \sim k^*$ de sorte que pour tous les modes entrant dans le rayon de Hubble à l'ère dominée par la matière, le potentiel gravitationnel reste constant, mis à part la petite variation due au saut de l'équation d'état de $|$ à 0 (voir Fig. 5.12). L'équation de Poisson nous dit alors que

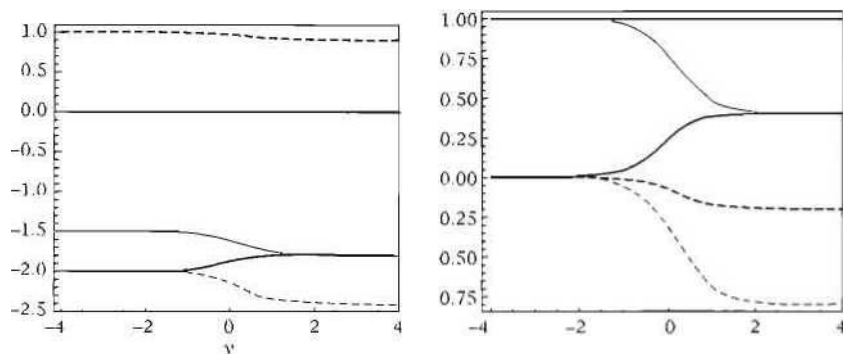


Fig. 5.11 Evolution of the total density contrast δ^N (thick solid line), the entropy S (thick dotted line) and gravitational potential (thick dashed line) as well as the two contrasts δ_5 (thin dashed line) and δ^* (thin solid line) for a mode $k = 10^{-3}$ assuming either adiabatic initial conditions ($\delta^* = 1, S = 0$) [left] or isocurvature initial conditions ($\delta^* = 0, S = -1$) [right].

$$\text{un } a. \quad (5.231)$$

5.4.2.3 Modes entrant dans le rayon de Hubble à l'ère dominée par les radiations

Lorsque l'Univers est dominé par le rayonnement, le potentiel gravitationnel est déterminé par les fluctuations de densité du rayonnement. Elle est donc donnée par la solution générale (5.161) et son évolution est représentée sur la Fig. 5.5. Ainsi, dès que les modes deviennent inférieurs à ceux de Hubble pendant l'ère dominée par les radiations, le potentiel gravitationnel est sujet à des oscillations amorties et tend rapidement vers 0.

Les perturbations de la densité du fluide de matière noire sont ensuite obtenues en résolvant leurs équations d'évolution avec le potentiel gravitationnel déterminé par la solution (5.161),

$$\delta'' + \dots = 3\delta'' + 3W - k^2 I \quad (5.232)$$

où le paramètre Hubble est donné par $H = \dot{a}/a$ assez profondément dans l'ère des radiations. La solution de cette équation est de la forme

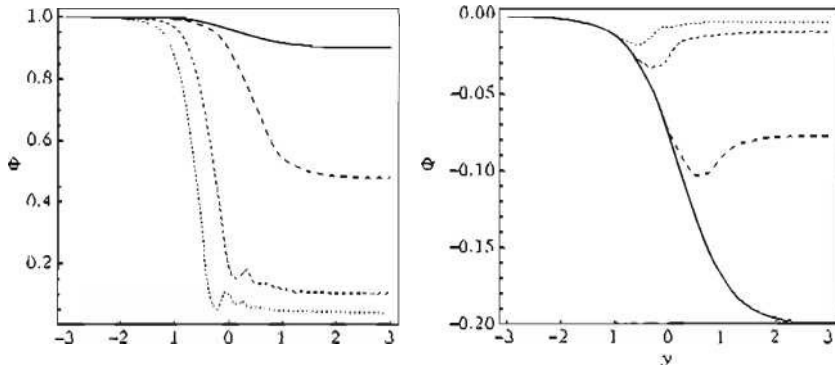


Fig. 5-12 Evolution of the gravitational potential for $\kappa = 10^{-5}$, $\hat{u}_1, \hat{U}_5, 1 \text{ Mpc}^{-1}$ for adiabatic (left) and isocurvature (right) initial conditions. These figures should be compared with Fig. 5.9 for which the entropy was neglected.

$$\langle 5^* = A + B \ln(\wedge) + \quad (5.233)$$

where the particular solution is obtained in the integral form

$$\delta_{\text{part}}^N(k, \eta) = \int_0^\eta d\eta' [3\Phi''(k, \eta') + 3\mathcal{H}\Phi'(k, \eta') - k^2\Phi(k, \eta')] \eta' \ln\left(\frac{\eta'}{\eta}\right). \quad (5.234)$$

When $y \ll 1$ and $6r \sim 2 \ll j$. Assuming initial adiabatic conditions ($6m \sim 36r/4$) then $6m \sim 3^{72}$. It turns out that the contribution of the particular solution is negligible, so that we are left with $A = 3^{72}$ and $B = 0$.

As shown by the solution (5.161), the gravitational potential decreases rapidly as the mode becomes sub-Hubble and is constant before. The integrand does not vary significantly around $r/l = 1/fc$, so that the upper limit of the integral can be extended to infinity in the particular solution. This means that what precedes is integrated! It can be performed to give

$$6p_{a,}(M = A + B \ln(fc z)) \quad (5.235)$$

where the constants

$$A = \int_0^{\text{ACO}} f(kq''kr)'dkr]' \text{ et } B = - \int_{\text{faire}}^{\text{ACO}} j(kr''kr) dhy \quad (5.236)$$

depends on the function f , itself given explicitly by the solution (5.161). Numerically, one obtains $A \approx -6$ and $B \approx 9$ so that the general solution takes the form

$$f(u) = 9\Phi_i u^{-5} \left[u(2u^2 - 27) \cos \frac{u}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}(27 - 5u^2) \sin \frac{u}{\sqrt{3}} \right], \quad (5.237)$$

Obtenir la valeur exacte de ces coefficients nécessiterait bien entendu un calcul plus minutieux. Pour conclure, rappelons que

$$\delta_m \sim \delta_{\text{millions}} \propto \ln a(kr)^3; \quad \delta^0 \propto a^0 \text{ (fcc; } \delta : 1) \quad (5.238)$$

à l'ère des radiations (voir Fig. 5.13 pour une intégration numérique).

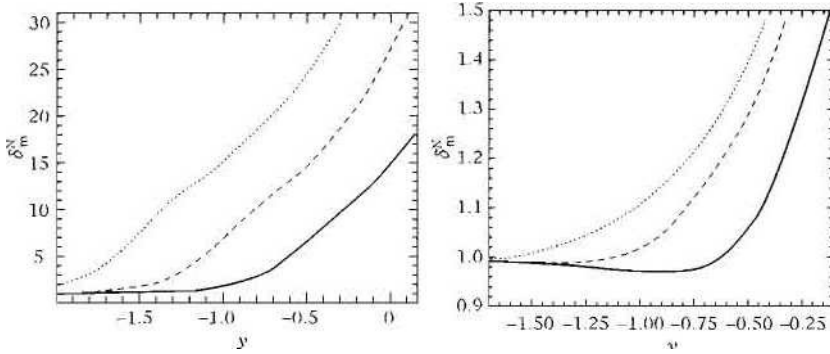


Fig. 5.13 Evolution of the matter density contrast δ_m , for $k = 1/h^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ (solid line), $k = 5/h^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ (dashed line) and $k = 10/h^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ for adiabatic (left) and isocurvature (right) initial conditions. These modes become sub-Hubble during the radiation-dominated era.

5.4.2.4 Modes sous-Hubble

Considérons maintenant les modes qui étaient sous-Hubble à l'ère des radiations et essayons d'évaluer comment les perturbations du la matière fluide sont affectées par la transition rayonnement-matière. Pour ces modes, nous avons vu (Fig. 5.6) que les contrastes de densité étaient les mêmes quelle que soit la jauge.

Pour tout mode sub-Hubble pendant l'ère des radiations, nous avons déterminé que δ_r est à peu près constant, alors que d'après la section précédente, nous savons que $\delta_m \sim \ln a$. Même si p_m est faible par rapport à p_r , la contribution des fluctuations de densité de matière peut dominer sur celles du rayonnement dans l'équation de Poisson, puisque $\delta_m \propto \ln a$.

Nous nous concentrerons donc sur le régime où $\delta_r \ll \delta_m$. Le contraste de densité totale est alors donné par

$$\delta \approx \delta_m$$

et l'équation de Poisson prend la forme

$$\nabla^2 \delta = -4\pi G \rho_m \delta_m \quad (5.239)$$

tant que les contributions à la vitesse peuvent être négligées. Nous utilisons maintenant les deux équations (5.209)-(5.210) réécrites en fonction de y . Après avoir différencié (5.209) et éliminé

en utilisant l'équation (5.211) et V_m encore avec (5.209), on obtient une équation du second ordre pour δ impliquant δ et ses dérivées, qui peuvent ensuite être éliminées avec (5.239).

Pour simplifier cette équation, remarquons que nous nous intéressons aux modes de longueur d'onde courte, et donc $k/H \gg 1$, ce qui implique que $k^2 y \gg 1$. En négligeant tous ces termes,

on obtient l'équation, connue sous le nom d' *équation de Mészáros* [40],

$$\frac{d^2 \delta}{dy^2} + \frac{2}{y} \frac{d\delta}{dy} = 0 \quad (5.240)$$

Cette équation a une solution affine et la deuxième solution peut être obtenue en utilisant la méthode de variation du paramètre. On peut vérifier que deux solutions indépendantes sont

$$D_+(y) = y + \frac{1}{2} \text{ et } D_-(y) = \frac{1}{y}$$

($y \gg 1$) dominé par la matière, ils correspondent respectivement à un mode croissant et un mode décroissant puisque

$$D_+(y) \propto y \text{ et } D_-(y) \propto y^{-1}$$

Cette solution peut être adaptée à la solution (5.233)–(5.235) au moment où le mode entre dans le rayon de Hubble en $y^*(k)$ (voir Fig. 5.14 pour une intégration numérique).

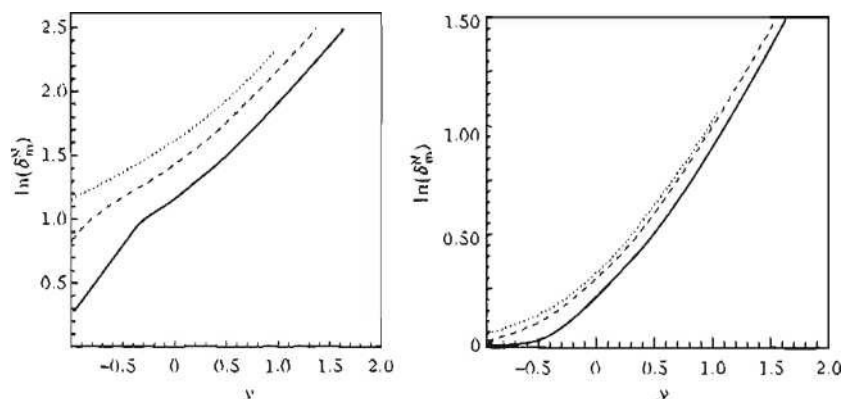


Fig. 5.14 Evolution of the matter-density contrast for $k^* = 10 \text{ Mpc}^{-1}$ (solid line), $k^* = 5 \text{ Mpc}^{-1}$ (dashed) and $k^* = 10 \text{ Mpc}^{-1}$ for adiabatic (left) and isocurvature (right) conditions.

5.4.2.5 Résumé

Dans l'exemple simplifié d'un Univers ne contenant que de la matière noire et des rayonnements interagissant gravitationnellement, l'étude précédente montre que le comportement de δ et

dépend de la valeur du mode k , et sur l'époque à laquelle le mode devient sous-Hubble.

Cependant, cette analyse néglige quatre effets importants :

1. La matière contient des baryons qui sont couplés au rayonnement par diffusion Compton. Nous décrivons ce couplage et ses effets sur les perturbations au chapitre 6.
2. Nous avons décrit le rayonnement en utilisant une approximation fluide. Cette description est très grossière et devrait en fait être étendue en utilisant une approche cinétique et le rayonnement devrait être décrit par une équation de Boltzmann. Une telle description implique une hiérarchie d'équations, dont les équations fluides sont les deux premiers moments. Ceci sera décrit en détail dans le chapitre 6 consacré à l'étude du fond diffus cosmologique.
3. L'évolution récente des perturbations peut être affectée par l'existence d'une courbure ou d'une constante cosmologique. Ces effets ont été illustrés sur les Figs. 5.7 et 5.8.
4. En raison de la présence de neutrinos, $\langle f \rangle$ qui modifie, par exemple, le rapport 9/10 pour la variation du potentiel gravitationnel à grande échelle.

5.4.2.6 Fonction de transfert

Cette étude simplifiée nous permet néanmoins de comprendre la forme générale du spectre de puissance des structures à grande échelle. Pour voir cela, définissez la fonction de transfert

$$\delta(k, a) = D_+(a) \delta(k, a_i) \quad (5.242)$$

où a_i est un temps initial et $D_+(a)$ la fonction de croissance (5.24). Notez que a_i est arbitraire tant qu'il correspond à un temps avant qu'une échelle d'intérêt ne devienne inférieure à Hubble. Cette fonction de transfert caractérise la modification du spectre initial de puissance de la matière au cours de l'évolution et dépend des paramètres cosmologiques et du contenu en matière de l'Univers. Le terme D_+ a été ajouté à la main car à l'époque de la matière

$$\Delta\Phi = \frac{3}{2} H_0^2 \Omega_{m0} \frac{D_+(a)}{a} \frac{\delta}{D_+(a)}$$

et le facteur $D_+(a)/a$ est approximativement égal à l'unité à l'ère de la matière (Fig. 5.1). La définition (5.242) implique que

$$\delta(k, a) = T(k, a) \delta(k, a_i).$$

Les modes observables aujourd'hui étaient initialement super-Hubble et les modèles théoriques de l'Univers primordial nous permettent de prédire le spectre de puissance matière de ces modes. Cela implique que la jauge dans laquelle le contraste de densité initial $\delta(k, a_i)$ est considéré soit clairement précisée. En effet, puisque pour ces modes δ est constant, on aura la même fonction de transfert si l'on utilise δ dans la définition (5.242) puisque les deux contrastes de densité sont liés au potentiel gravitationnel par la même équation de Poisson et on a donc

$$P_{\delta}(k, a_0) = P_{\delta}(k, a_i) T^2(k, a_0), \quad (5.243)$$

et

$$W(a_0) = F_6(I) T^2 (M_0 \quad L < 2 + (a_0) J) \quad (5.244)$$

puisque $P_i(p_{\alpha i}) = k_{et}^{P \wedge} (k_{lat})$.

La forme approximative de la fonction de transfert peut être déduite de notre analyse précédente (voir Fig. 5.15). En effet, en négligeant la croissance logarithmique au cours de l'ère des radiations, les modes qui sont devenus sous-Hubble au cours de cette ère sont figés et n'ont pas augmenté entre le moment où ils sont entrés dans le rayon de Hubble et l'égalité. Leur amplitude relative par rapport aux modes de grande longueur d'onde (soit $k < k_{eq}$) est ainsi diminuée d'un facteur $(k_{eq}/A)^2$. Nous nous attendons donc à ce que le comportement limitant soit

$$T(k, a_0) \sim 1 \quad (k \ll k_{eq}), \quad T(k, a_0) \sim \left(\frac{k}{k_{eq}} \right)^2 (k \gg k_{ensemble}). \quad (5.245)$$

Ce résultat est à comparer avec la Fig. 5.16 obtenu à partir d'un calcul numérique incluant notamment les baryons et leur couplage au rayonnement. Notez également que la fonction de transfert dépendra du type de conditions initiales dans l'Univers primordial (adiabatique ou isocourbure). Différentes approximations de cette fonction existent dans la littérature [19]. A titre d'exemple, pour un modèle de matière noire froide, on a

$$T(q) = \ln(1 + 3.89 r_7 + (16.1 r_7)^2 + (5.46 q)^3 + (6.71 z_7)^4)^{1/4}, \quad (5.246)$$

$$T(q) = (5.6 q)^{2H} + [16.9 + (0.9 q)^{1/2} + (5.6 q)^2]^{1/4} \quad (5.247)$$

avec $q = k/(Mpc^{-1})$ et $\tilde{u} = 0$, respectivement, pour les conditions initiales adiabatiques et d'isocourbure.

5.4.3 Quelques améliorations

Pour clôturer ce chapitre, nous donnons l'ensemble complet des équations, en approximation fluide, pour un Univers contenant des photons, des neutrinos, de la matière noire et des baryons. Nous encourageons le lecteur à écrire un programme pour ce Système et à essayer de reproduire les courbes de ce chapitre et de comprendre les différents effets négligés dans la présentation précédente. 5. 4.31 Matière noire

La matière noire est régie par les équations utilisées tout au long de ce chapitre,

$$\dot{\rho}_c = -3H\rho_c, \quad (5.248)$$

$$\dot{V} = -W_c V, \quad (5.249)$$

où nous avons maintenu la distinction entre ρ et T .

5.4.3 2 baryons

Les électrons et les noyaux ont le même contraste de densité puisque les forces électromagnétiques exigent que la densité de charge soit extrêmement proche de zéro. Leurs équations de conservation

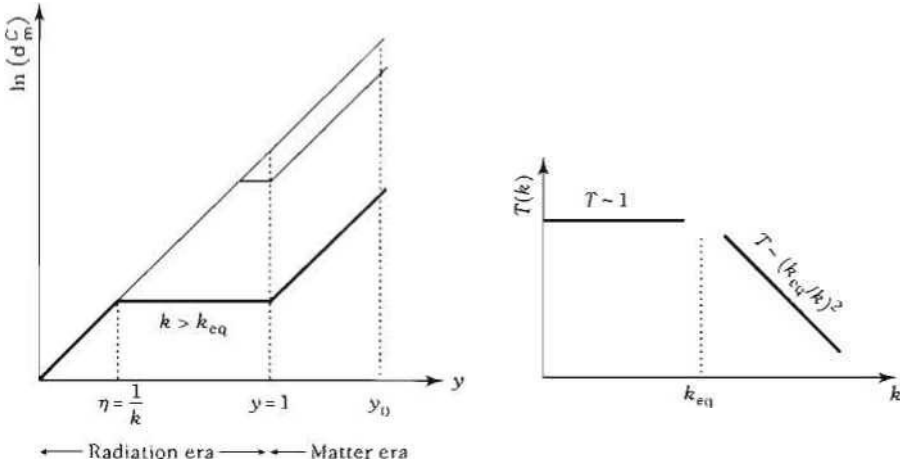


Fig. 5.15 (à gauche) : Les modes qui deviennent sub-Hubble pendant l'ère des radiations ($k > k_{eq}$) restent presque constants (en négligeant la croissance logarithmique) à partir de $p \sim 1/\rho_c$ à $r) \sim 1/\rho_{eq}$. (droite); L'amplitude du contraste de densité sur ces échelles souffre d'un manque de growth de l'ordre de $(\rho_{eq}/\rho_c)^2$. Pour $\rho_c > \rho_{eq}$ nous nous attendons donc à ce que la fonction de transfert se comporte comme $T \propto (k_{eq}/k)^2$, alors qu'il reste d'ordre unité pour $k < k_{eq}$.

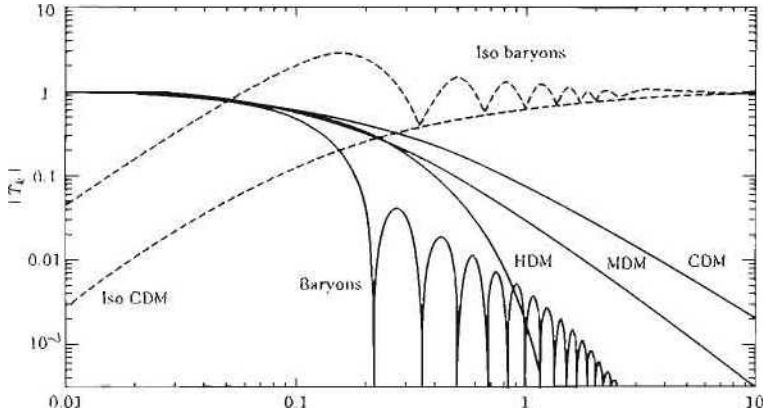


Fig. 5.16 Fonction de transfert pour différents scénarios. La forme générale de cette fonction de transfert peut être comprise à partir de l'étude analytique que nous avons réalisée, cf. (5,245). De la Réf. [8], sont les mêmes que pour la matière noire mais leur équation d'Euler sera différente car la diffusion de Thomson les couple aux photons. L'échange de rhomentum entre le baryon et les fluides photoniques doit donc être pris en compte. On peut montrer [41] que la force qui entre dans l'équation d'Euler est

$$\frac{1}{Pb} + \frac{1}{3Pb} n_e O_T - \frac{1}{3} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{Pb} \right) \quad (5.250)$$

où a_T est la section efficace de diffusion de Thomson et n_e la densité d'électrons libres.

La vitesse du son ne s'annule pas et peut être calculée en supposant que nous disposons d'un gaz monoatomique de masse moléculaire moyenne p (c'est en fait la masse moyenne des électrons, des protons et des atomes d'hélium) à une température T_b .

$$2 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{Pb} \right) = \frac{1}{3} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{Pb} \right) \quad (5.251)$$

en négligeant la variation temporelle de p (en fait p n'est important que pendant la période de recombinaison pendant laquelle les baryons contribuent très peu à la pression du fluide photon-baryon, cela s'avère donc être une bonne approximation). Pour obtenir l'équation d'évolution de la température, partons de la première loi des thermodynamiques (voir Réf. [42]) $6Q = 3a'(\frac{1}{Pb}) + 7\% \leq 5(l/pb)$ avec le taux de variation thermique donné par $Q' = 4(p - \frac{1}{pb}) a_n e a_T (7 - \text{tuberculose})$. Nous concluons que l'évolution de la température du baryon est régie par

$$T'_{\gamma} = -Wb + \frac{1}{3} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{Pb} \right) (T_{\gamma} - T_b) \quad (5.252)$$

Depuis $7^{\wedge} Pb$ on peut négliger wv_{δ} et $c\mathcal{E}$ dans les équations d'évolution en dehors du terme $c^{\wedge}A^{\wedge}$. On obtient finalement

$$= f_c^2 Vb + 3\mathcal{E}', \quad (5.253)$$

$$Vb = -HVb - \mathcal{E} - \frac{1}{3} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{Pb} \right) (T_{\gamma} - T_b) \quad (5.254)$$

5.4.3.3 Photons

Comme nous le verrons dans le prochain chapitre, le rayonnement devra être décrit à l'aide d'une équation de Boltzmann, ce qui aura pour effet de remplacer les équations de propagation des photons et des neutrinos par deux hiérarchies d'équations. Ici, nous affinons uniquement notre description du fluide en ajoutant un terme de pression anisotrope, ir_{yt} et le couplage au fluide baryon

$$5''' = \frac{1}{3} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{Pb} \right) + 4\mathcal{E}', \quad (5.255)$$

$$= \frac{1}{3} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{Pb} \right) + f_c^2 \text{ et suiv } \gamma + \frac{1}{3} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{Pb} \right) (T_{\gamma} - T_b). \quad (5.256)$$

Nous disposons maintenant d'un terme de force résultant de l'effet du fluide baryonique et $o_y = n_y/5$. Nous devons accepter sans preuve à ce stade que l'équation d'évolution pour a_y est

$$oh = -\frac{4}{1} V_y - \frac{9}{O} \frac{1}{O} a_y a_y. \quad (5.257)$$

En fait, (5.256) contient la contribution des autres multipôles de la hiérarchie de Boltzmann et la version fluide n'est donc qu'une troncature de cette hiérarchie.

5.4.3.4 Neutrinos

Comme indiqué ci-dessus, les neutrinos devraient également être décrits par une équation de Boltzmann. Ils suivent des équations identiques à celles décrivant les photons mis à part l'absence de couplage avec les baryons. Nous avons donc

$$(5.258)$$

$$(5.259)$$

avec $\sigma'_\nu = -\frac{4}{15}V_\nu$ Quant au photon, on admet sans preuve que l'équation d'évolution de est

$$\sigma'_\nu = -\frac{4}{15}V_\nu \quad (5.260)$$

cas plus général des neutrinos massifs est décrit en détail dans la Réf. [44],

5.4.3.5 Équations d'Einstein

Les équations d'Einstein se réduisent à

$$\Psi - \Phi = 6 \frac{\mathcal{H}^2}{k^2} (\Omega_\gamma \sigma_\gamma + \Omega_\nu \sigma_\nu) \quad (5.261)$$

and

$$-k^2 \Psi = \frac{3}{2} \mathcal{H}^2 \quad (5.262)$$

5.4.3.6 Conditions initiales

Tout comme dans les sections précédentes, nous devons fixer les conditions initiales pour les modes super-Hubble à l'ère des radiations. Pour les conditions initiales adiabatiques, nous obtenons (voir, par exemple, Réf. [39])

$$= {}^\wedge('b) = {}^\wedge b(T)i) = {}^\wedge(71.)$$

$$\text{and } v,w = y,,(n.) = Vb({}^\wedge) = VcM-$$

$$(5.263)$$

As before, we have

$${}^\wedge_{(zt)} = -2{}^\wedge(77.), \quad (5.264)$$

d'où on déduit que

$$\sigma_\nu(\eta_i) = \frac{1}{15} (k\eta_i)^2 \Phi, \quad \sigma_\gamma(\eta_i) = 0, \quad (5.265)$$

and

$$\Psi = \left(1 + \frac{2}{5}R_\nu\right) \Phi, \quad (5.266)$$

avec $R_u = Pu!{pu} 4-_{p7})$.

5.4.3.7 approximation de couplage étroit

Notez qu'avant découplage, $V_b = V_\gamma$ car la diffusion Compton couple fortement les deux espèces. Après découplage, l'Univers devient presque neutre et les deux Raids sont découplés. Ce système peut ainsi être résolu dans le « couplage étroit » où l'on passe d'un régime à l'autre presque instantanément (voir, par exemple, Réf. [43]). Avant le découplage on a donc

$$V_b = V_\gamma = V, \quad V' = -\frac{3\Omega_b}{4\Omega_\gamma + 3\Omega_b} \mathcal{H}V - \frac{\Omega_\gamma}{4\Omega_\gamma + 3\Omega_b} \delta_\gamma^N - \Phi. \quad (5.267)$$

5.4.3.S Conclusions

Le système d'équations donné en détail dans cette section conduit à une image plus réaliste de l'évolution des perturbations cosmologiques. Tout en restant dans le cadre d'une description des fluides, elle prend désormais en compte les écarts d'un fluide parfait pour les photons et les neutrinos via l'introduction de leur pression anisotrope. Les deux potentiels gravitationnels ne sont donc plus égaux. Le couplage entre baxions et photons a été intégré, mais sa dérivation nécessite une approche cinétique.

Cette description cinétique du rayonnement sera discutée dans le prochain chapitre dans lequel nous justifierons non seulement les équations non prouvées mais fournirons également une version plus détaillée de ces équations. Il faudrait également décrire la dynamique de la recombinaison pour avoir accès à la variation temporelle de la densité électronique et dépasser l'hypothèse du couplage fort.

La résolution d'un tel système nous permet d'obtenir la fonction de transfert de la figure 5.16 avec une bonne précision pour une large classe de modèles cosmologiques.

5.5 La structure à grande échelle de l'Uniuerse

Jusqu'à présent, ce chapitre était essentiellement axé sur le régime linéaire. Dans la section 5.1.4, nous avons fait allusion au régime légèrement non linéaire. Nous décrivons maintenant brièvement ce que les observations nous disent sur le spectre de puissance de la matière.

5.5.1 Observer la structure à grande échelle

5.5.1.1 Catalogues Galaxie

La mesure du spectre de puissance de la matière repose principalement sur la construction de grands catalogues de galaxies. Récemment, deux grands catalogues, SDSS (Sloan Digital Sky Survey) [45] et 2dfGRS (2-degree field Galaxy Redshift Survey) [46], ont considérablement augmenté à la fois le nombre d'objets observés et la couverture du ciel. SDSS couvre environ un quart du ciel et mesure la position et la luminosité absolue d'environ 100 millions d'objets célestes ainsi que la distance de plus d'un million de galaxies ; 2dfGRS détermine la position et le redshift de plus de 250 000 galaxies. Ces catalogues sondent la structure de l'Univers jusqu'à un redshift d'environ 0,3. Un exemple du catalogue construit par 2dfGRS est présenté dans la Fig. 5.17.

Le lien entre ces observations et le spectre de puissance tridimensionnel de la matière noire n'est pas direct. En effet, seule la matière lumineuse, c'est-à-dire le baryomc, peut être observée. Afin de tirer toute conclusion pertinente quant à la distribution totale de la matière, nous

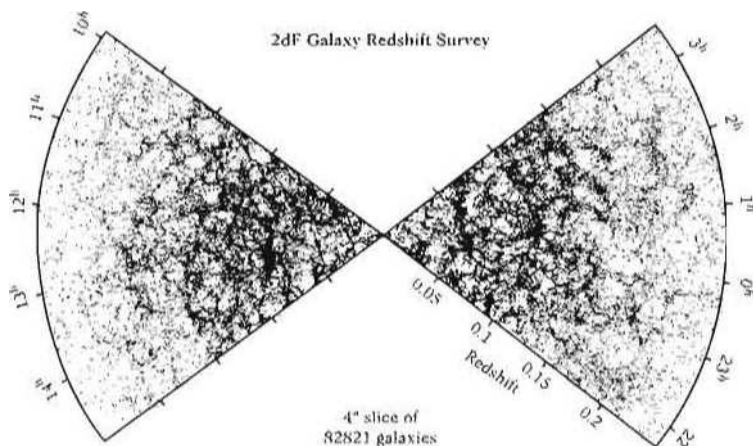


Fig. 5.17 La distribution des galaxies dans une plage de 4° du catalogue 2dfGRS. Ces observations de la structure à grande échelle de l'Univers sont à la base des mesures du spectre de puissance de la matière.

Il faudrait se convaincre que cette matière lumineuse est un bon traqueur de la répartition de la matière noire. Cela implique que le contraste de densité de la matière lumineuse doit être proportionnel à celui de la matière noire. Ce coefficient de proportionnalité, b , est appelé paramètre de biais [12,18],

$$\rho_{\text{lumineux}} = b \rho_{\text{c}} . \quad (5,268)$$

La validité de cette hypothèse, la possibilité que b peut dépendre de l'échelle et de nombreux autres problèmes ont été étudiés numériquement et par observation [12]. Un autre problème réside dans le fait que les observations déterminent avec une grande précision la position des objets dans le ciel et leur redshift. Dans l'espace redshift, la séparation radiale inclut des informations non seulement sur la position de la galaxie mais aussi sur sa vitesse. Ainsi, à petite échelle, une structure sphérique en effondrement gravitationnel apparaîtrait, dans l'espace redshift, comme une ellipse aplatie dans la direction radiale. Cette distorsion dans l'espace redshift due à un mouvement propre doit être corrigée.

55.1.2 Contraintes sur le spectre de puissance

Les grands catalogues de galaxies permettent de reconstruire le spectre de puissance de la matière sur environ deux ordres de grandeur. Le spectre linéaire peut être obtenu à partir des anisotropies du fond cosmique des micro-ondes (Chapitre 6).

À plus petite échelle, de nouvelles techniques, comme la lentille gravitationnelle faible (chapitre 7) et l'étude des forêts de Lyman- α qui permettent de reconstituer la distribution du gaz extragalactique, permettent d'étendre la mesure de près de deux ordres de grandeur en longueur d'onde. A noter que l'utilisation de lentilles gravitationnelles présente l'avantage d'éviter le problème de biais. En effet, cette méthode mesure directement la distribution du potentiel gravitationnel (voir le chapitre 7 pour plus de détails).

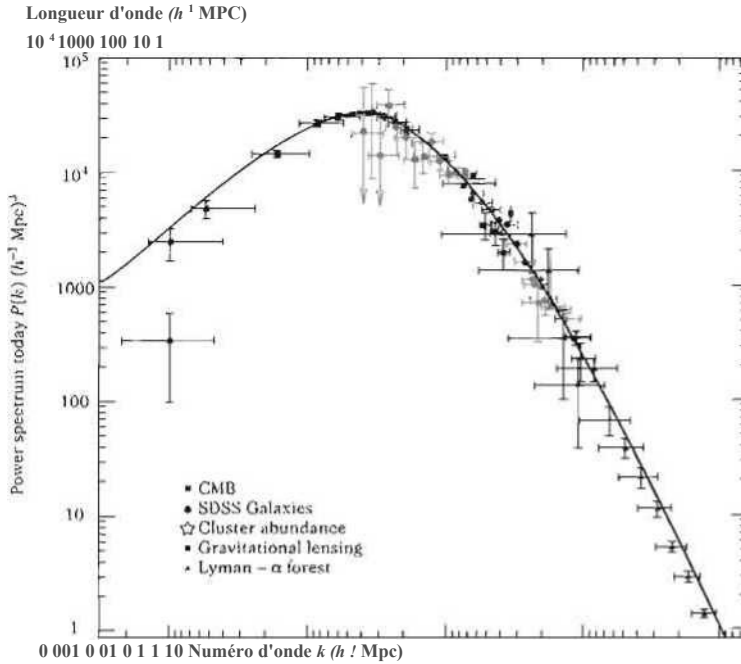


Fig. 5.18 Le spectre de puissance de la matière comparé à diverses observations allant des échelles linéaires (fond micro-ondes cosmique) aux échelles non linéaires (catalogues de galaxies, ici SDSS), lentilles gravitationnelles et forêts de Lyman-cu. De la réf [47]

En conclusion, le spectre de puissance de la matière peut être reconstruit sur environ cinq ordres de grandeur. La figure 5.18 résume l'état des observations et la reconstruction du spectre de puissance réalisées à l'aide de ces différentes méthodes. Notons cependant que, bien qu'impressionnant à première vue, ce chiffre ne peut pas être directement déduit des observations. En effet, pour les petites échelles ($k > 0.1 h/\text{Mpc}$), seul le spectre de puissance en régime non linéaire est observé. La reconstruction linéaire dépend donc d'une « cartographie » entre les régimes linéaire et non linéaire (voir Fig. 5-19). De plus, la reconstruction du spectre de puissance des forêts de Lyman- α n'est pas non plus directe et, jusqu'à ce que des données supplémentaires soient collectées, elle doit être prise avec prudence.

5.5.1 . 3 oscillations acoustiques Baryon

Comme nous l'avons déjà expliqué, à l'ère des radiations, les photons et les baryons sont couplés. Cela implique que le plasma photons-baryons subit des oscillations acoustiques. La pression de rayonnement entre en compétition avec la gravitation et provoque des oscillations dans le fluide photonique (voir Fig. 5.5). Le couplage étroit entre électrons, baryons et photons dû à la diffusion Compton fait alors osciller les baryons en phase avec le rayonnement. Ainsi, tout le plasma oscille à cause de ces ondes sonores.

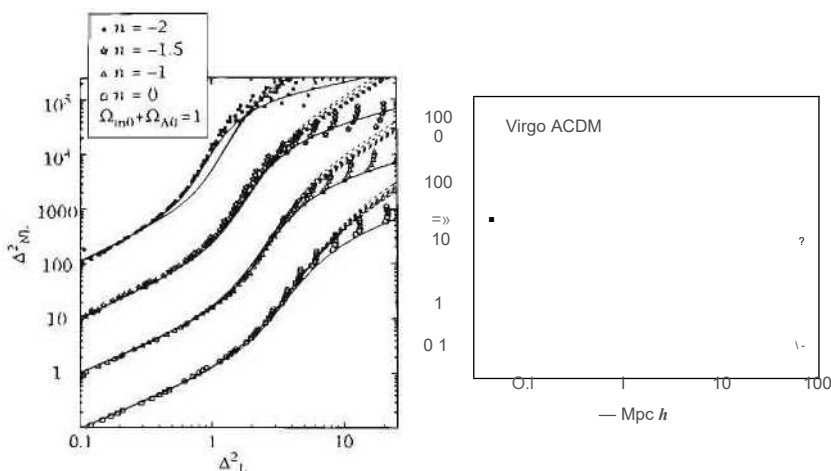


Fig. 5.19 (left): Comparison between the analytic mapping proposed by Ref. [51] and numerical simulations [53]. For each mode, five epochs are represented. From bottom to top, $1/(1+z) = 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1$. (right): The power spectrum in the non-linear régime at five epochs, $z = 0, 0.5, 1.0, 2.0, 3.0$ from bottom to top. The solid line corresponds to the mapping of Ref. [53] and the dotted line to that of Ref. [52]. From Ref. [53].

Comme nous le verrons dans le chapitre suivant, l'empreinte de ces ondes sonores sur le fond diffus cosmologique a été détectée. Ces ondes sont liées à une échelle caractéristique qui correspond à l'horizon sonore.

Ces oscillations sont également imprimées dans le spectre de puissance des galaxies. De plus, leur amplitude est supprimée d'un facteur d'ordre ~ 0.05 puisqu'ils sont imprimés uniquement dans le fluide baryonique et non dans la matière noire. Il a été récemment détecté [48] dans la fonction de corrélation des galaxies rouges lumineuses du levé SDSS. Cette corrélation présente un pic à une échelle d'ordre 100 Mpc avec un redshift d'environ $z \sim 0.35$.

5.5.2 Structures en régime non linéaire

Les équations d'évolution de la matière sont non linéaires et nous ne les avons résolues qu'en régime linéaire. Pour terminer ce chapitre, nous présentons quelques approches d'étude de ce régime qui complètent l'analyse de la section 5.1.4.

5.5.2.1 Modèle hiérarchique de formation de structure

Pour comprendre le régime non linéaire, il est crucial de déterminer quand une balance entre dans ce régime. Si le contraste de densité était complètement gelé à l'ère du rayonnement, alors tous les modes deviendraient non linéaires en même temps puisque la croissance des perturbations à l'ère de la matière est indépendante de la longueur d'onde. Cependant, il y a une légère croissance des perturbations au cours de l'ère des radiations (Fig. 5, 13 et 5.14). Plus une longueur d'onde devient inférieure à Hubble tôt, plus elle est amplifiée, de sorte que les petites échelles seront les premières à devenir non linéaires. Les plus petites structures sont donc les plus anciennes. C'est ce qu'on appelle un *mécanisme de hiérarchie*.

A égalité matière-rayonnement, l'amplitude des perturbations est typiquement de l'ordre de l_u^{-5} . Les petites longueurs d'onde entrent dans le régime non linéaire lorsque $\delta_c(k^*t) \sim 1$ et commencent à former des structures. Si, à cette époque, l'Univers avait été observé avec une résolution supérieure à ces échelles, il semblerait très homogène, le champ de densité peut donc toujours être décrit par un champ continu en régime linéaire.

Le processus se poursuit et des longueurs d'onde de plus en plus grandes entrent dans le régime non linéaire. Ainsi, les petites régions surdenses (protogalaxies) se forment d'abord avant de fusionner pour former des galaxies de plus en plus grandes puis des amas. L'échelle de non-linéarité est aujourd'hui de l'ordre de 20 à 40 Mpc, soit seulement un ordre de grandeur supérieur à la taille des amas de galaxies (environ 2 Mpc). Les amas ne sont donc pas répartis de manière homogène et forment de grandes structures, comme des filaments, séparés par des vides dont la taille caractéristique est de l'ordre de l'échelle de non-linéarité. A cette échelle, la structure de l'Univers a la morphologie d'une éponge, mais lissée à une plus grande échelle, elle est à nouveau homogène.

5.5.2.2 Mode effondrement sphérique

Un mode analytique simple de l'évolution non linéaire d'une structure peut être construit en considérant une région sphérique surdense. Pour étudier son évolution globale, il n'est pas nécessaire de connaître le profil exact de la densité puisque grâce au théorème de Gauss, seule la densité moyenne contenue dans une sphère de rayon donné est nécessaire pour déterminer l'évolution de cette sphère.

Dans un Univers dominé par la matière, l'évolution temporelle du rayon de la sphère prend la forme paramétrique

$$r = A(1 - \cos\xi), \text{ et } t = \frac{A}{H_0} (\xi - \sin\xi), \quad (5.269)$$

et l'équation newtonienne du mouvement, $r = A(1 - \cos\xi)$ implique que $A^3 =$

La sphère s'effondre en un point ($r \rightarrow 0$) après un temps $t_c = t_0 - 27r =$ La densité moyenne dans la sphère est $\rho = 3M/4\pi r^3$, alors que celle dans l'espace-temps extérieur est $\rho_{ext} =$

univers d'Einstein-de Sitter. Le rapport entre ces deux densités donne le contraste de densité $\delta = \rho / \rho_{ext} - 1$.

Au début de l'effondrement, $\delta \ll 1$ pour que

$$r(t) \simeq \frac{A}{2} \left(\frac{6t}{B} \right)^{2/3} \left[1 - \frac{1}{20} \left(\frac{6t}{B} \right)^{2/3} \right].$$

Initialement, le contraste de densité de sphère croît comme $\delta \propto t^{2/3}$, en accord avec notre analyse précédente (5.22) en régime linéaire.

Ce mode I montre les étapes suivantes de l'effondrement gravitationnel. Si l'on compare l'évolution extérieure à l'évolution linéaire dans un Univers plat avec $\Omega = 1$, trois époques peuvent être distinguées.

1. *Le découplage de l'expansion.* La surdensité est un système lié gravitationnellement. Son expansion atteint son maximum à $\delta = 1$ et est alors découplée de l'expansion globale de l'Univers. Le contraste de densité atteint alors la valeur $\delta = [A(6t/19)^{2/3}/2]/r^3 = \dot{\sigma}^2/16 \sim 5,55$ alors que le régime linéaire prédit $\delta = (3/20)(6tT)^{2/3} \sim 1$. $\hat{U}6$.

2. *Effondrement gravitationnel* Si aucun autre mécanisme n'entre en jeu, la sphère s'effondre en une singularité à $\theta = 2-n$ et $6 - \bullet$ ouh. Le contraste de densité déduit de l'analyse linéaire extrapolé jusqu'à t_c est égal à $5 = 1,69$.
3. *Virialisation*. Certains mécanismes dissipatifs convertissent l'énergie cinétique en mouvement thermique. La sphère atteint alors un régime stationnaire et stabilise son rayon.

Cette analyse de base montre que l'analyse linéaire n'est plus valable dès que $\langle 5 \rangle > 1$. Une approche plus réaliste de l'effondrement gravitationnel dans un espace-temps en expansion est obtenue à partir des solutions des équations d'Einstein pour une distribution de matière à symétrie sphérique, connu sous le nom de Lemaître-Tolman-Bondi [49] (voir chapitre 3).

5.5.2.3 *Le spectre de puissance non linéaire*

Une analyse plus précise peut être obtenue par des simulations numériques à N corps. Ces simulations tentent de résoudre les équations newtoniennes (5.15) et (5.16) ainsi que l'équation de Poisson (5.5). Une description détaillée des différentes méthodes, problèmes et de l'état de l'art de ces simulations peut être obtenue dans la Réf. [12]. Divers codes [50] de simulations de corps en V sont disponibles gratuitement

A partir de ces simulations, diverses cartographies ont été établies [51-53] entre le spectre de puissance de la matière en régime linéaire et le spectre de puissance en régime non linéaire. Ces cartographies permettent de discuter qualitativement de la déformation du spectre de puissance en régime non linéaire.

Une hypothèse féconde est la suivante. de *cJustering stable* qui postule [54] que, dans le régime non linéaire, les régions de très hautes densités se virialisent, tout en gardant la densité moyenne fixe. La fonction de corrélation de la densité de ces Systèmes évoluerait alors comme $\xi(r, t) \propto 1/\rho a^3$. On peut alors montrer [54] que, dans un Univers plat, si le spectre initial est de la forme $P \propto k^n$, alors cette hypothèse implique que

$$\langle \delta^2(r, t) \rangle \propto r^{-\gamma}, \text{ avec } \gamma = \dots \quad (5.270)$$

Le spectre en régime non linéaire garderait alors une mémoire du spectre initial.

On peut ainsi postuler que les effets non-linéaires peuvent être décrits par une application universelle f_{NL} . En effet, la fonction de corrélation, moyennée sur un grand volume,

$$\xi(r) = \frac{3}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{dk}{k} P(k) j_0(kr) \quad (5.271)$$

mesurée par simulations numériques peut être paramétrée par une fonction de la fonction du régime de corrélation linéaire [51]. La transformation d'échelle entre les deux régimes peut être déduite en considérant un halo sphérique qui s'effondre. Ce halo est constitué de coquilles sphériques atteignant chacune une expansion maximale avant de s'effondrer. S'il n'y a pas de croisement d'obus, la masse à l'intérieur de chacun d'eux est conservée, de sorte que

$$M(r) \propto r^3 \rho(r) \quad (5.272)$$

où $\rho(r)$ est la distribution de masse initiale dans une sphère de rayon r (en régime linéaire). Si nous identifions $1 + \delta(r)$ avec le facteur d'amplification de la densité, alors

$$x^3 [1 + \Delta_{nl}(z, t)] =$$

où x représente l'échelle non linéaire et l celle associée dans le régime linéaire. Après cette transformation d'échelle, on suppose que $\zeta_{nl}(x, t) = f_{nl}[\xi_{nl}(f > <)]$.

Cette procédure se transpose facilement dans l'espace de Fourier. Si l'on définit

$$A^2(k) = 4\pi k^3 P(k), \tag{5.271}$$

then the function f_{nl} is given by

$$\Delta_{nl}^2(k_{nl}) = f_{nl}[\Delta_{lin}^2(k)], \quad \text{with} \quad k^3 = \frac{k_{nl}^3}{1 + \Delta_{nl}^2(k_{nl})}. \tag{5.27}$$

Sous l'hypothèse d'un clustering stable, on peut montrer [51] que cette fonction doit se comporter asymptotiquement, pour $x \gg 1$, comme

$$M(x) \sim x g^{-3} W x^{-3/2}, \quad \zeta(Q) = \frac{D^+(Q)}{un}, \tag{5,273}$$

où ξ_+ est le mode croissant (5.22) du régime linéaire. Une forme analytique de f_{nl} a été proposée ; il est calibré sur des simulations numériques de corps 7V pour les modèles Λ CDM [51-53]. L'existence d'une telle fonction universelle peut également être justifiée théoriquement [55].

La figure 5.20 représente le résultat des simulations numériques, tandis que la figure 5.19 compare cette cartographie analytique aux résultats des simulations numériques et son effet sur le spectre de puissance. Ces cartographies seront utiles lors de l'examen de la lentille gravitationnelle par les grandes structures au chapitre 7.

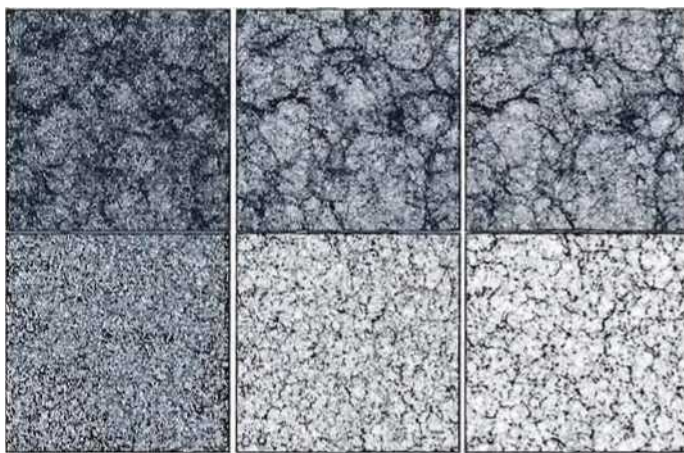


Fig. 5.20 Résultats des simulations numériques (en haut) pour $n = -2$ à $1/(1+z) = 0,2, 0,45$ et $0,55$ de droite à gauche et (en bas) pour $n = 0$ à $1/(1+z) = 0,25, 0,63$ et $0,83$. L'influence du spectre sur la morphologie des grandes structures (plus de filaments pour $n = -2$ et des structures plus petites pour $n = 0$) est visible à l'œil nu. De la Réf. [531].

Les références

- [1] PJE PEEBLES, ' Température de fond à grande échelle et fluctuations de masse dues à des perturbations primitives invariantes d'échelle ', *Astrophys. J.* 263, L1, 1982.
- [2] G. R. BLUMENTHAL *et al.*, « Formation de galaxies et de structures à grande échelle avec de la matière noire froide », *Nature* 311, 517, 1984.
- [3] M. DAVIS *et al.*, 'La fin de la matière noire froide ?'. *Nature* 358. 480, 1992.
- [4] S. WEINBERG, *Gravitation et cosmologie : principes et applications de la théorie de la relativité générale* , John Wiley et fils, 1972.
- [5] T. PADMANABHAN, *Formation de structures dans l'Univers*, Presse de l'Universite de Cambridge , 1993
- [6] S. DODELSON, *Cosmologie moderne* , Académie Press, 2003
- [7] PJE PEEBLES, *La structure à grande échelle de l'Univers*, Princeton University Press, 1980.
- [8] JA Peacock , *Cosmological Physics*, Cambridge University Press, 1999.
- [9] A. R. Liddle *et* DH LYTH, *Inflation cosmologique et structure à grande échelle*, Cambridge University Press, 2000.
- [10] L. LANDAU *et* E. LIFCHITZ, *Mécanique des fluides*, MIR, 1964.
- [11] T. BuCHERT, « Une classe de solutions en cosmologie newtonienne et théorie des crêpes », *Astron. Astrophysique.* 223, 9, 1989.
- [12] F. BERNARDEAU *et al.*, « Structure à grande échelle de l'Univers et théorie des perturbations cosmologiques », *Phys. représentant* 367, 1, 2002
- [13] O LAHAV *et al.*, 'Effets dynamiques de la constante cosmologique', *Mois. Pas. R Astron. Soc.* 251, 128, 1991.
- [14] F. BERNARDEAU. *Cosmologie*, EDP Sciences, Paris, 2007.
- [15] A. DEKEL, *Flux à grande échelle et implications cosmologiques*, dans *Formation de la structure dans l'Univers*, A. Dekel *et* J. Ostriker (éd.), Cambridge University Press, 1999
- [16] F. BERNARDEAU *et* JP. UZAN, « EFFETS DE VOLUMES FINIS POUR LES MODÈLES inflationnistes multi-champs non gaussiens », *Phys. Rév. D* 70, 043533, 2004.
- [17] F. SYLOS-LABINI, M. MONTUORI *et* L. PIETRONERO, « Invariance d'échelle du regroupement de galaxies », *Phys. représentant* 293, 61, 1998.
- [18] N. KAISER, « Sur les corrélations spatiales des amas d'Abell », *Astrophys. J.* 284, L9, 1984.
- [19] JM BARDEEN *et al.*, «Les statistiques des pics des champs aléatoires gaussiens », *Astrophys. J.* 304, 15, 1986.
- [20] J. FRY, « La hiérarchie des corrélations des galaxies dans la théorie des perturbations », *Astrophys. J.* 279, 499, 1984.
- [21] F. BOUCHET *et al.*, ' Instabilité gravitationnelle faiblement non linéaire ' pour D arbitraire', *Astrophys. J.* 394, L5, 1992

- [22] F. BERNARDEAU, « ASYMÉTRIE ET APLATISSEMENT DANS les champs cosmiques à grande échelle », *Astrophys. J.* 433.1 , 1994.
- [23] F. BERNARDEAU, « Les effets du lissage sur les propriétés statistiques des champs cosmiques à grande échelle », *Astron. Astrophysique.* 291, 697, 1994.
- [24] JM BARDEEN, «Évaluez les perturbations cosmologiques invariantes», *Phys. Rév.D* 22, 1882, 1981.
- [25] U. GERLACH et U- SENGUPTA, « Équations relativistes pour l'effondrement gravitationnel asphérique », *Phys. Rév.D* 18, 1789, 1978 .
- [26] H. KODAMA et M. SASAKI, « Théorie des perturbations cosmologiques », *Prog. Théorique. Phys. Supplément.* 78, 1, 1984.
- [27] VF. MOUKHANOV, H. A FELDMAN et RH BRANDENBERGER, « Théorie des perturbations cosmologiques », *Phys. Représentant* 5, 203, 1992.
- [28] A. R. LIDDLE et DH LYTH, « La perturbation froide de la densité de matière noire », *Phys. représentant* 231, 1, 1993.
- [29] R. DURRER, « Théorie des perturbations cosmologiques invariantes de jauge », *Fund. Cosme. Phys.* 15, 209, 1994.
- [30] S. HAWKING, « Perturbations d'un univers en expansion », *Astrophys. J.* 145, 544, 1966.
- [31] GFR ELUS et M. BRUNI, « Approche covariante et invariante de jauge des fluctuations cosmologiques de densité », *Phys. Rév. D* 40, 1804, 1989.
- [32] GFR ELUS, *Cosmologie relativiste*, Proc. Aéroport international. École de physique Enrico Fermi, Corso XLVII, RK Sachs (éd.) (Academie Press, 1971).
- [33] JM STEWART et M. WALKER, « Perturbations de l'espace-temps en relativité générale », *Proc. R Soc. Londres A* 341, 49, 1974.
- [34] J. MARTIN et P. PETER, « Sur l' argument de la causalité dans les cosmologies rebondissantes », *Phys. Révérend Lett.* 92, 061301, 2004.
- [35] JM BARDEEN, PJ STEINHARDT et MS TURNER, « Création spontanée de perturbations de densité presque sans échelle dans un univers inflationniste », *Phys. Rév.D* 28, 679, 1983
- [36] DH LYTH, « Perturbations de la densité énergétique à grande échelle et inflation », *Phys. Rév.D* 31, 1792, 1985.
- [37] D. BAGUETTES, K.A. Malik , DH LYTH et AR LIDDLE, « Nouvelle approche de l'évolution des perturbations cosmologiques à grande échelle », *Phys. Rév.D* 62 , 043527, 2000.
- [38] L. LANDAU, *soviétique J. Phys. (JETP)* 10, 116, 1946.
- [39] CP MA et E. BERTSCHINGER, «Théorie des perturbations cosmologiques dans la jauge synchrone et conforme », *Astrophys. J.* 455, 7, 1995.
- [40] P. MÉSZÁROS, « Le comportement des masses ponctuelles dans un substrat cosmologique en expansion », *Astron. Astrophysique.* 37, 225, 1974.
- [41] J -P. OUZAN, « Dynamique des gaz en interaction relativiste : d'une description cinétique à une description fluide », *Classe. Quant. Grav.* 15, 1063, 1998
- [42] PJE PEEBLES, *Principes de cosmologie physique*, (Princeton Dniversity Press, 1993.
- [43] W. Hu et N SUGYIAMA, «Anisotropies dans le fond cosmique des micro-ondes.» une approche analytique', *Astrophys. J.* 444, 489, 1995.

- [44] J. LESGOURGUES et S. PASTOR « Neutrinos massifs et cosmologie », *Phys. Rep.* 49 , 307, 2006.
- [45] SDSS : [http : //www . sdss . org](http://www.sdss.org).
- [46] 2dFGRS : <http://www.aao.gov.au/2df/> .
- [47] M. TEGMARK , A. HAMILTON et Y. Hu, « Le spectre de puissance des galaxies dans une enquête redshift 2dF 100k », *Mois. Pas. R. Astron. Soc.* 335, 887, 2002.
- [48] D. EISENSTEIN *et al.*, « Détection du pic acoustique du baryon dans la fonction de corrélation à grande échelle des galaxies rouges lumineuses SDSS¹ », *Astrophys. J.* 633, 560, 2005.
- [49] RC TOI. HOMME, *Proc. Natl Acad. Sci.* 20. 169, 1934.
- [50] GADGET. Code en C décrit dans V. SPRINGEL *et al.*, 'GADGET: A code for collisionless and gasdynamical cosmological simulations', *New. Astron.* 6, 79, 2001, disponible sur <http://www.ropa-garching.mpg.de/gadget/right.html> ;
HYDRA : décrit dans H. COUCHMAN *et al.*, 'Hydra Code Release', *Astrophys. J.* 452, 797, 1995, disponible sur <http://coho.roemaster.ca/hydra/hydra/hydra.html> ;
TPM : décrit dans P. BODE *et al.*, 'The Tree-Particle-Mesh N-body Gravity Solver', *Astrophys. J. Suppl.* 128, 561, 2000, disponible sur [http : //www . astro . Princeton . edu/~bode/TPH/](http://www.astro.Princeton.edu/~bode/TPH/).
- [51] A. HAMILTON *et al.*, 'Reconstruire le spectre primordial des fluctuations de l'Univers à partir de l'agrégation non linéaire observée des galaxies', *Astrophys. J. Lett.* 374, L1, 1991.
- [52] JA PEACOCK et SJ DODOS, 'Évolution non linéaire des spectres de puissance cosmologique', *Mois. Pas. R. Astron. Soc.* 280, L19, 1996.
- [53] RE SMITH *et al.*, 'Stable clustering, the halo model and non-linear cosmological power spectra', *Month Not. R. Astron. Soc.* 341, 1311, 2003.
- [54] PJE PEETERS, « La nature de l'instabilité gravitationnelle et la nature de la distribution - des galaxies », *Astrophys. J.* 189, L51, 1974.
- [55] JS BAGLA et T. PADMANABHAN, 'Indice critique et point fixe dans le transfert de puissance dans le regroupement gravitationnel non linéaire', *Mois. Pas. R. Astron. Soc.*, 286, 1023, 1997.

6

Le fond cosmique des micro-ondes

L'objectif de ce chapitre est de fournir les bases de la compréhension actuelle de la physique du fond diffus cosmologique (CMB) et de détailler le calcul des signatures attendues à partir de différents scénarios.

Nous commençons par présenter dans la section 6.1 une version simplifiée du calcul du spectre de puissance angulaire des anisotropies de température afin de discuter des différentes contributions à ce spectre. L'origine des anisotropies de température du fond diffus cosmologique ainsi que la relation entre les fluctuations de température observées aujourd'hui et celles au découplage sont données en détail. Cela nous permettra de comprendre et de discuter dans la section 6.2 de la forme du spectre de puissance angulaire.

Nous présentons ensuite la description moderne de la théorie du fond micro-onde dans la section 6.3. Cette description s'appuie sur une approche cinétique, qui nécessitera l'étude de la version perturbée de l'équation de Boltzmann dans un espace-temps en expansion.

Enfin, nous discutons des effets de divers paramètres sur le spectre de puissance angulaire dans la section 6.5, à la fois pour les paramètres cosmologiques (par exemple les différents contrastes de densité, la constante de Hubble, etc.) et les paramètres décrivant la physique primordiale.

Pour des critiques générales sur ce sujet, voir Réf. [1-4].

6.1 Origine des anisotropies du fond diffus cosmologique

Après découplage, les photons n'interagissent plus avec la matière et on peut supposer, en première approximation, qu'ils suivent des géodésiques nulles. Une approche simplifiée de la physique du fond diffus cosmologique peut alors être obtenue en calculant le redshift total (entre le découplage et aujourd'hui) d'un photon se propageant dans un espace-temps cosmologique perturbé.

Dans cette approche simplifiée, nous adoptons une description fluide de la matière et supposons que la surface de la dernière diffusion est infiniment mince, c'est-à-dire que le découplage s'est produit instantanément (voir Section 4.4.1, Chapitre 4). Cette présentation simplifiée a l'avantage de garder la physique transparente et un formalisme plus rigoureux, basé sur l'approche cinétique, sera présenté plus tard dans la section 6.3.

6.1.1 Formule Sachs-Wolfe

La formule de Sachs-Wolfe relie l'énergie actuelle d'un photon à son énergie au découplage - [5,6].

6.1.1.1 Propagation of a photon in a perturbed space-time

Let us start by studying the propagation of a photon in a space-time with a metric

$g^{\alpha\beta}$ de la forme (5.52). La géodésie de ce photon est une ligne d'univers $z^{\mu}(A)$ où A est un paramètre affine. Le vecteur tangent à cette ligne de mot satisfait les deux équations (voir chapitre 1)

Notez que deux espaces-temps conformes ont la même structure causale de sorte que leurs géodésiques nulles seront identiques (puisque ces géodésiques définissent les cônes de lumière). En définissant la métrique via $g^{\alpha\beta} = \Omega^2 \eta^{\alpha\beta}$ on peut facilement vérifier que si $\hat{e}^{\alpha}$ est la tangente

vecteur d'une géodésique nulle de la métrique g , alors $k^{\alpha} = a^2 \hat{e}^{\alpha}$ sera le vecteur tangent d'une géodésique nulle de la métrique g , soit

$$g^{\alpha\beta} k_{\beta} = 0, \quad k^{\alpha} \nabla_{\alpha} k^{\mu} = 0,$$

où est la dérivée covariante associée à $g^{\alpha\beta}$.

Décomposons le vecteur k^{α} comme

$$\hat{e}^{\alpha} = 5(1 + M\hat{e}^i + 6\hat{e}^i) \quad (6.1)$$

E is a constant¹ and the four components of $\delta\hat{k}^{\mu}$ reduce to $(M, \delta\hat{e}^i)$. Only three of these four components are independent, since $\hat{k}^{\mu}\hat{k}_{\mu} = 0$ implies that

$$\hat{e}^i \hat{e}^j = 1 \quad \hat{e}_j \delta\hat{e}^j = A + M - B_i \hat{e}^i - \frac{1}{2} h_{ij} \hat{e}^i \hat{e}^j \quad (6.2)$$

Au premier ordre en perturbations, l'équation géodésie pour k^{α} prend la forme simplifiée

$$(6.3)$$

En utilisant la décomposition (6-1), sa composante temporelle ($i = 0$) donne

$$\frac{dM}{ds} = -A' - 2\hat{e}^i \partial_i A - \frac{1}{2} h'_{ij} \hat{e}^i \hat{e}^j + D_i B_j \hat{e}^i \hat{e}^j \quad (6.4)$$

où nous avons posé $dM/ds = \hat{e}^{\alpha} \partial_{\alpha} M + d_0 M$.

6.1.1.2 Formule de Sachs-Wolfe

Comme vu au chapitre 1, voir (1.122), la fréquence, ou de manière équivalente l'énergie, d'un photon mesuré par un observateur se déplaçant avec la vitesse maintenue est liée à sa fréquence au moment de son émission par

$$\frac{E_{\text{obs}}(g)}{E_{\text{em}}(g)} = \frac{(f_{\text{em}}^{\mu} U_{\mu})_o}{(f_{\text{em}}^{\mu} U_{\mu})_e} \quad (6.5)$$

¹ Comme un simple chasseur, rappelons que dans un espace-temps Friedmann-Lemaître, $\nabla_{\alpha} E = 0$ pour que of a photon scales as $1/c^2 V_p = k^{\alpha} U_{\alpha} = (f^{\alpha}/\dot{a}^2) a_1$ that is as $1/a$ since $E = \dot{a}^0$ is constant. l'énergie

où est le champ de vitesse du baryon. Les points d'émission et de réception sont reliés par

$$x_E = x_0 + \langle (h_0 - \%) , \quad (6.6)$$

où $e = -\hat{e}$ représente la direction d'observation. Cette trajectoire est une géodésie dans l'espace-temps non perturbé. Dans ce qui suit, nous travaillerons dans l'approximation de Born dans laquelle toutes les quantifications perturbées sont évaluées le long d'une trajectoire non perturbée.

Nous déduisons de (6.5) que la température observée dans une direction e est liée à la température à l'émission par

$$\frac{T_0(e)}{T_E(x_E)} = \frac{a(\eta_E)}{a(\eta_0)} \left\{ 1 + [M + A + e^i (v_{bi} + B_i)]_E^0 \right\} \quad (6.7)$$

où nous avons utilisé $\langle -1 - A, V_k + B_k \rangle$ et V_{bi} est la perturbation de vitesse du fluide baryonique (voir chapitre 5).

Puisque la recombinaison est dictée par l'interaction photon-électron, elle-même régie par le coefficient arn_e (voir Chapitre 4, Section 4.1), nous pouvons modéliser la surface de dernière diffusion comme une surface de densité électronique constante, $n_e = \text{const.}$ En raison des fluctuations de densité, la recombinaison ne se produit pas au même moment en chaque point de l'Univers (voir Fig. 6.1). Le temps d'émission se décompose alors comme

Les deux températures peuvent être décomposées respectivement comme

$$T_E(x_E, T_E) = T_E(\langle T_E \rangle) [1 + \langle \delta T_E \rangle / \langle T_E \rangle].$$

où T_E est la moyenne spatiale du champ de température à l'instant T_E , et

$$T_0(e) = T_0 M [1 + \langle \delta T_0 \rangle / T_0].$$

Où $\langle \delta T_0 \rangle$ représente les fluctuations de densité dans une direction e par rapport à la moyenne de la température sur l'ascension, $T_0(T_0)$.

En insérant ces deux décompositions dans (6.7), on obtient qu'à l'ordre le plus bas dans les perturbations

$$(6.8) \quad \frac{T_0}{T_E} = \frac{a(\eta_E)}{a(\eta_0)} [1 + \langle \delta T_E \rangle / T_E + \langle \delta T_0 \rangle / T_0 + \dots]$$

qui est simplement la mise à l'échelle de la température d'un corps noir en termes de redshift dans un espace-temps homogène et isotrope en expansion [voir chapitre 4].

En utilisant cela, au premier ordre dans les perturbations, $T_E^{\wedge E \wedge E} = \hat{E}(hE)[H - (T/T) \langle 5r \rangle] a(hE)[1 + (a'/\dot{a}) \langle 57 \rangle E] = T_E^{\wedge E} \hat{U}^{\wedge E}(\hat{J}_E)$ nous en déduisons que le contraste de température observé dans la direction e est donné par

$$\langle \delta T_0 \rangle / T_0 = \langle \delta T_E \rangle / T_E + [M + A + e^i (v_{bi} + B_i)]_E \quad (6.9)$$

Encore une fois, dans l'approximation de Born, le terme entre parenthèses étant du premier ordre dans les perturbations, il peut être évalué soit en $\hat{f}_E$, soit en Q_R -

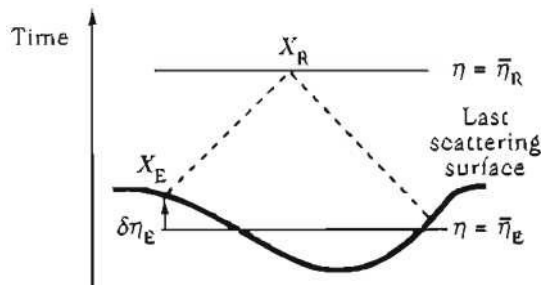


Fig. 6.1 The last-scattering surface is a surface of constant électron number density, $n_e = \text{const.}$ Thus, it is not a constant-time hypersurface. The time of émission is related to the mean time by $\tau_E = \int_{X_E}^{\tau} \frac{d\tau}{a(\tau)}$

Pour calculer le premier terme du membre de droite de l'équation précédente, on remarque que la densité électronique, n_e , est fonction des densités d'énergie des photons et des baryons, et $\rho_b \propto a^{-3}$. Comme le montre l'équation de Saha équation [6], l'effet du baryon peut être négligé, de sorte que la surface de dernière diffusion soit bien approximée par la surface $\rho_\gamma = \text{const.}$ (voir chapitre 4). La loi de Stefan-Boltzmann implique alors que

$$\rho_\gamma(X_E, n_E) = \frac{4\sigma T^4}{3} \quad (6.10)$$

Pour évaluer la contribution nous utilisons l'équation géodésique (6.4) that can be réécrit sous la forme intégrale]

où nous intégrons le long de la géodésie non perturbée que nous avons choisi de paramétrer comme

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} E + y^2 \right] - \frac{1}{2} \frac{D_i B_j t}{dt} \quad (6.11)$$

the intégral being performed along the unperturbed géodésie. We infer from (6.9), (6.10) and (6.11) that

$$\hat{U}(\hat{n}) = \frac{1}{4\pi} \int d\Omega \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} E + y^2 \right) - \frac{1}{2} \frac{D_i B_j t}{dt} \right] \frac{1}{r^2} \frac{d\Omega}{d\Omega_0} \quad (6.12)$$

where $\frac{1}{r^2} \frac{d\Omega}{d\Omega_0}$ is a fonction of the perturbation variables evaluated today. In gauge invariant terms of quantities, after expressing $\frac{1}{r^2} \frac{d\Omega}{d\Omega_0}$ as $1 + \delta\Omega/\Omega$, this expression takes the form

$\hat{U}(\hat{n}) =$	$\frac{1}{4\pi} \int d\Omega \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} E + y^2 \right) - \frac{1}{2} \frac{D_i B_j t}{dt} \right] \frac{1}{r^2} \frac{d\Omega}{d\Omega_0}$

(6.13)

$$x = x_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} E + y^2 \right) - \frac{1}{2} \frac{D_i B_j t}{dt} \quad (6.14)$$

de sorte que l'intégrale s'étend désormais sur le temps conforme J). Nous avons également volontairement omis la quantité $\frac{1}{r^2} \frac{d\Omega}{d\Omega_0}$ qui est fonction du point d'observation et ne peut être mesurée. Cette relation est connue sous le nom d'équation de *Sachs-Wolfe*.

6.1.1.3 Interprétation

La relation (6.13) peut être décomposée comme la somme de trois termes

$$\hat{U}_{\text{SW}} = \frac{1}{4\pi} \int d\Omega \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} E + y^2 \right) - \frac{1}{2} \frac{D_i B_j t}{dt} \right] \frac{1}{r^2} \frac{d\Omega}{d\Omega_0} \quad (6.15)$$

$$\hat{U}_{\text{Dop}} = -\frac{1}{4\pi} \int d\Omega \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} E + y^2 \right) - \frac{1}{2} \frac{D_i B_j t}{dt} \right) \frac{1}{r^2} \frac{d\Omega}{d\Omega_0} \quad (6.16)$$

$$\hat{U}_{\text{ISW}} = \frac{1}{4\pi} \int d\Omega \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} E + y^2 \right) - \frac{1}{2} \frac{D_i B_j t}{dt} \right] \frac{1}{r^2} \frac{d\Omega}{d\Omega_0} \quad (6.17)$$

Le premier terme n'a qu'une contribution scalaire et est appelé terme *de Sachs-Wolfe ordinaire*, le second a une contribution scalaire et vectorielle et représente le terme *Doppler*, tandis que le troisième contient les trois types de perturbations et est appelé terme de *Sachs-Wolfe intégré* terme.

Le terme ordinaire de Sachs-Wolfe, $\hat{U}_{\text{SW}}$, est évalué au moment du découplage, c'est-à-dire en $(\hat{n}, \eta)$, et contient deux termes ;

- le contraste de densité du fluide rayonnant traduit le fait qu'une région plus dense est plus chaude, en vertu de la loi de Stefan-Boltzmann,

$$\epsilon(0) = \frac{1}{4\pi} \int d\Omega \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} E + y^2 \right) - \frac{1}{2} \frac{D_i B_j t}{dt} \right) \frac{1}{r^2} \frac{d\Omega}{d\Omega_0} \quad (6.18)$$

- le potentiel gravitationnel Φ indique qu'un photon émis dans un puits de potentiel a un redshift gravitationnel supplémentaire (effet Einstein).

Le terme Φ_{Dop} est simplement un terme d'effet Doppler, venant du fait que l'émetteur et l'observateur n'ont pas la même vitesse.

Le terme intégral, Φ_{ISW} , dépend de l'histoire du photon entre son émission et sa réception et contient la dérivée temporelle des deux potentiels gravitationnels (en décomposition SVT). Ces termes auront un apport venant entre autres,

- structures en formation traversées par le photon. En effet, le potentiel gravitationnel d'une structure en effondrement, même sphérique, n'est pas « vu » symétriquement par un photon qui acquiert alors un redshift supplémentaire,
- dans un Univers avec une courbure cosmologique constante ou non nulle, nous avons vu que le potentiel gravitationnel n'est pas constant dans notre passé récent.

6.1.2 Spectre de puissance angulaire

équation de Sachs-Wolfe relie les fluctuations de température observées aux perturbations cosmologiques. Donc $\delta T/T$ variable astochastique qui peut être caractérisée par sa fonction de corrélation

$$\xi(0) = \langle \delta T(x_0, \theta, \phi) \delta T(x_0, \theta, \phi) \rangle. \quad (6.1S)$$

L'isotropie statistique, qui découle du principe cosmologique, implique que cette fonction de corrélation ne dépend que de l'angle relatif entre les deux directions d'observation, e_i et $e^{\wedge}$; $\cos = e_i \cdot e^{\wedge}$. Il convient donc d'étendre cette fonction de corrélation dans une base de polynômes de Legendre comme

$$2^{\wedge} \text{je } 1 \text{ cm} = \wedge_{-}^{CtPt} \text{eye} 2 \text{ t } 1 \text{ t} \quad (6.19)$$

qui définit le spectre de puissance angulaire C_l . Un multipôle l correspond approximativement à une échelle angulaire (voir annexe B) de sorte que C_l est une mesure de la variance des fluctuations de température à cette échelle. Si les fluctuations de température ont une statistique gaussienne, cette fonction caractérise entièrement la répartition de la température.

Développer $\delta(X_{\hat{u}}, 7)_{o,e}$ dans des harmonies sphériques comme

$$\mathbb{C}(l_{o}, P_{o}, e) = \wedge^{\wedge} a^{\wedge}_{7n}(x_{o}, r/o) Fz_m(e), \quad (6.20)$$

millions de livres sterling,

les coefficients de dilatation $\hat{u} \cdot e m^{\wedge} Q^{\wedge} \hat{u}$ sont alors donnés par

$$\hat{u} f m(x_{\hat{o}}, 77o) = y \quad (6.21)$$

Nous pouvons alors. montrer, en utilisant (B. 17) pour exprimer le polynôme de Legendre dans (6.19) puis en inversant cette relation en utilisant (B. 15) deux fois, que

$$(2\ell \quad = \wedge^{\wedge}(x_o, 7)_o) a\ell_m(x_o, T?_o) >- \quad (6.22)$$

m

Nous allons maintenant calculer ce spectre de puissance angulaire en fonction des perturbations cosmologiques dans la décomposition du SVT. Pour chaque mode, nous pouvons étendre le terme $\delta(x_{\hat{u}}, 7?o, e) >n$ modes de Fourier comme

$$\mathbb{C}(x_o, h\hat{u}, e) = y^{\wedge} p^{77} \hat{O}('h\hat{o}, f_c, \hat{E}), \quad (6.23)$$

où la phase $\exp(iJ_c \cdot x_o)$ a été absorbée dans la définition de Q . Nous en déduisons que $\hat{u}^{\wedge}(x_{\hat{u}}$

$$, 7)_{\hat{u}} = y d^2 e \quad 6(77o, f_c, e) V/_m(e). \quad (6.24)$$

Désormais, vous omettez la dépendance de $(X_{\hat{u}}, *7o)-$

6. 1.2.1 *ScaJar JY> ET dés*

Après exprimant x_e avec (6.6), la partie scalaire de (6.13), nous dit que

$$\acute{e}(7)_{o1} f_c, e) = [\acute{o} s x v(f_c) - 2^{\wedge} V_b(f_c)] \quad + y(4>' + \hat{a}'^{\wedge}) e^{\wedge A} \text{d} 7), \quad (6.25)$$

avec $AT) = 7)o - r)$ et où p . est défini par la relation $k \cdot e = k.jj>$. Le coefficient $\exp(i/cAtAp)$ apparaît dans l'intégrale puisque la transformée de Fourier contient le

terme $(\delta + \delta') \exp[i\mathbf{f} \cdot \mathbf{x}(\mathbf{r})]$. La relation (6.14) implique alors que $\exp(i\mathbf{f} \cdot \mathbf{x}(\mathbf{r})) = \exp(i\mathbf{f} \cdot \mathbf{A}) \exp(i\mathbf{f} \cdot \mathbf{B})$ et nous avons supposé que la phase constante était absorbée dans la définition des coefficients de Fourier [voir (6.23)]. Le même argument explique le coefficient $\exp(2\mathbf{f} \cdot \mathbf{A})$ pour les deux premiers termes.

Chaque terme de l'expression (6.25) est une variable aléatoire qui peut être décomposée en $X(k, T) = X(k, i)a(Jc)$ où $a(\mathbf{f})$ est une variable aléatoire satisfaisant

$$\langle a(\mathbf{f})a^*(\mathbf{f}') \rangle = \delta^3(\mathbf{f} - \mathbf{f}'), \quad (6.26)$$

de sorte que $\langle \delta T(\mathbf{r}, \mathbf{f}) \rangle = \langle \delta T(\mathbf{r}) \rangle a(\mathbf{f})$ avec

$$\delta T(\mathbf{r}, \mathbf{f}) = [\delta T(\mathbf{f}) - \mathbf{v}(\mathbf{f}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{f})] e^{i\mathbf{f} \cdot \mathbf{r}} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{f}) e^{i\mathbf{f} \cdot \mathbf{r}}. \quad (6.27)$$

En utilisant la relation (B.21) pour développer le facteur exponentiel en termes d'harmonies sphériques, nous obtenons

$$Q(l, k, p) = 4\pi \int d\Omega \delta T(\mathbf{f}) Y_{lm}(\mathbf{f}) Y_{lm}^*(\mathbf{e}), \quad (6.28)$$

avec

$$\delta T(\mathbf{f}) = \delta T(\mathbf{f}) + \mathbf{f} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{f}) + \mathbf{f} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{f}). \quad (6.29)$$

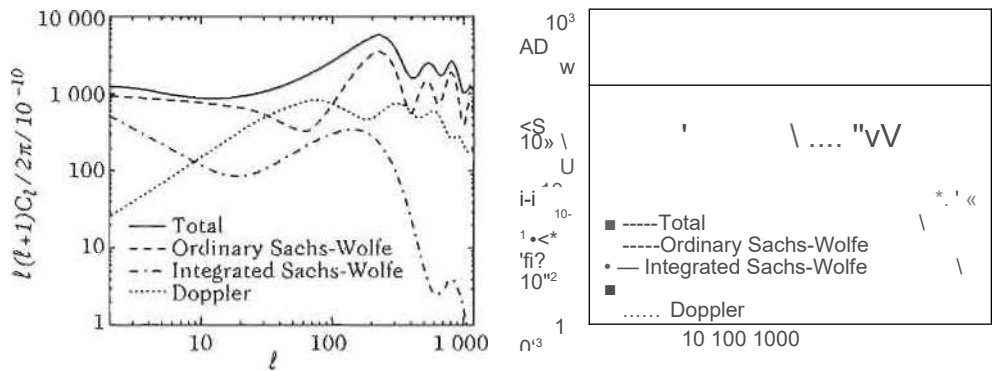
En insérant ces expressions dans (6.22) puis en utilisant (6.26), on obtient

$$\begin{aligned} \langle \delta T^2 \rangle &= \int d\Omega \int d\Omega' \delta T(\mathbf{f}) \delta T(\mathbf{f}') \\ &= \int d\Omega \int d\Omega' \delta T(\mathbf{f}) \delta T(\mathbf{f}') \\ &= \int d\Omega \int d\Omega' \delta T(\mathbf{f}) \delta T(\mathbf{f}') \end{aligned}$$

L'intégration sur $\mathbf{f} = \mathbf{f}/f$ conduit à un terme $\delta T, t \delta T, i$ et les intégrations sur $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2$ à $\delta T, e \delta T, i$ et $\delta T, e \delta T, i$ respectivement, de sorte que

$$\langle \delta T^2 \rangle = \int d\Omega \int d\Omega' \delta T(\mathbf{f}) \delta T(\mathbf{f}') \quad (6.30)$$

La Fig. 6.2 décompose le spectre de puissance des modes scalaires en ses contributions ordinaires Sachs-Wolfe, Doppler et Sachs-Wolfe intégré.



6.1.2.2 *Modes vectoriels*

Nous effectuons maintenant le même exercice pour les contributions vectorielles. La décomposition (6.23) donne maintenant

$$\langle \delta T_{\text{CMB}}(\mathbf{n}) \delta T_{\text{CMB}}(\mathbf{n}') \rangle = \sum_{\ell} \frac{2\ell+1}{4\pi} C_{\ell}^{\text{vec}} P_{\ell}(\cos\theta) \quad (6.31)$$

Les variables vectorielles sont transversales, de sorte que leurs coefficients de Fourier n'ont aucune composante parallèle au vecteur d'onde. Ils peuvent ainsi être développés dans la base $(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i)$ de l'espace perpendiculaire à $\mathbf{k}$ comme

$$\mathbf{X}_{\ell m}(\mathbf{k}) = \sum_{\pm} X_{\ell m}^{\pm}(\mathbf{k}) \mathbf{e}_{\pm}^m(\mathbf{k}) \quad (6.32)$$

avec le complexe quantifié $\mathbf{e}_{\pm}^m = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_j \pm i\mathbf{e}_i)$ de telle sorte que $\mathbf{e}_{\pm}^m \cdot \mathbf{e}_{\pm}^m = \delta_{mm'}$. Les deux polarisations sont indépendantes et les variables aléatoires $a_{\ell m}^{\pm}(\mathbf{k})$ satisfont désormais la relation $\langle a_{\ell m}^{\pm}(\mathbf{k}) a_{\ell' m'}^{\pm}(\mathbf{k}') \rangle = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ (cf. Chapitre 8). de sorte qu'après avoir utilisé la relation (B.21) pour développer le facteur exponentiel en termes d'harmonies sphériques, on obtient

$$\langle \delta T_{\text{CMB}}(\mathbf{n}) \delta T_{\text{CMB}}(\mathbf{n}') \rangle = 4\pi \sum_{\ell} \frac{2\ell+1}{4\pi} C_{\ell}^{\text{vec}} P_{\ell}(\cos\theta) \quad (6.34)$$

avec

$$C_{\ell}^{\text{vec}} = \langle |a_{\ell m}^{\pm}(\mathbf{k})|^2 \rangle = \langle a_{\ell m}^{\pm}(\mathbf{k}) a_{\ell m}^{\pm}(\mathbf{k})^* \rangle \quad (6.35)$$

En insérant ces expressions dans la relation (6.22), en utilisant la relation (6.33) puis en effectuant l'intégrale sur $d^2\mathbf{n}$, on obtient

$$(2^{\Lambda+1})C/ = \int d\mathbf{e} f^3 \frac{d\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}}{|\mathbf{e}|^3} \left| \frac{f(\mathbf{e})}{f(\mathbf{A})} \right|^2 \frac{f(\mathbf{e})}{f(\mathbf{A})} \sum_{m, m'} Y_{lm}(\mathbf{e}) Y_{lm'}(\mathbf{A})$$

Afin de calculer l'intégrale sur $\mathbf{e}$, notez d'abord que $\sin \theta = \frac{2}{\sqrt{1+\cos \theta}}$ avant d'utiliser l'intégral (B.23). On peut alors effectuer la somme sur m et m' en utilisant la relation (B.25) des symboles 3j-Wigner. Cette somme ne conserve que les termes avec $Z = f \pm 1$ pour que les fonctions de Bessel apparaissant dans l'expression pour se recombinent pour conduire à la fonction [voir (B.46)]

(6.36)

On obtient finalement

$$C = \int d\mathbf{e} \left| \frac{f(\mathbf{e})}{f(\mathbf{A})} \right|^2 f^5 d\mathbf{e}, \quad (6.37)$$

$$\langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{e} \rangle = \frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{e} \mathbf{A} \cdot \mathbf{e} f(\mathbf{e}) = \frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{e} \mathbf{A} \cdot \mathbf{e} f(\mathbf{e}) = \frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{e} \mathbf{A} \cdot \mathbf{e} f(\mathbf{e}) = \frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{e} \mathbf{A} \cdot \mathbf{e} f(\mathbf{e}) \quad (6.38)$$

6.1.2 3 modes tenseurs

Le calcul pour les modes tensoriels est sensiblement le même que celui pour les modes vectoriels. Le développement (6.23) donne maintenant

$$0(7)0, \mathbf{f}, \mathbf{e} = - \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \hat{e}_i \hat{e}_j \hat{e}_k d\mathbf{r}. \quad (6.39)$$

Le tenseur E_{ij} peut être développé comme

$$\mathbf{v}(\mathbf{f}, \mathbf{h}) = \frac{1}{2} \mathbf{h} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{W}. \quad (6h40)$$

où la variable aléatoire $\mathbf{a}(\mathbf{e})$ satisfait la condition (6.33) et où le tenseur de polarisation est défini comme

$$4 = \langle \langle \mathbf{e} \cdot \mathbf{e} \rangle \rangle, \quad \mathbf{e} \cdot \mathbf{e} = 1. \quad (6.41)$$

En particulier, cela implique que $\mathbf{v} = \mathbf{e} \exp(2i\mathbf{A} \cdot \mathbf{e})$.

Après avoir utilisé (B.21) pour développer le facteur exponentiel, on trouve

$$\langle \mathbf{e} \cdot \mathbf{e} \rangle = \frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{e} \mathbf{e} \cdot \mathbf{e} f(\mathbf{e}) = \frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{e} \mathbf{e} \cdot \mathbf{e} f(\mathbf{e}) = \frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{e} \mathbf{e} \cdot \mathbf{e} f(\mathbf{e}) = \frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{e} \mathbf{e} \cdot \mathbf{e} f(\mathbf{e}) \quad (6.42) \quad \mathbf{A} = \pm \mathbf{e}$$

with

(6.43)

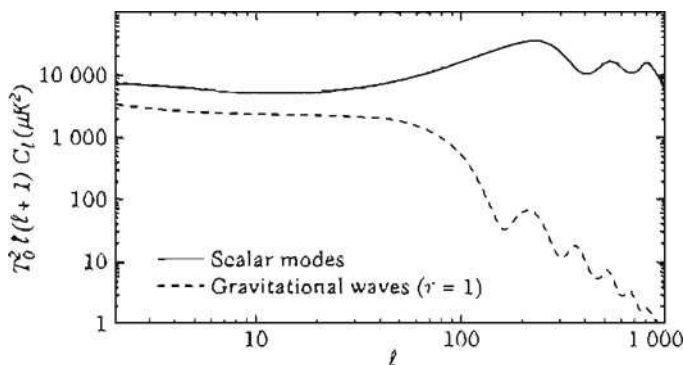


Fig. 6.3 Angular power spectrum for the tensor modes, compared to that of scalars for a ratio $r = 1$ between the primordial spectra of the two modes.

En insérant ces expressions dans (6.22), en utilisant (6.33) puis en effectuant l'intégrale sur $d^2 \mathbf{e}$, nous trouvons que

$$(2^{\ell+4})$$

Pour calculer l'intégrale sur $\mathbf{e}$, la procédure est la même que pour les modes vectoriels, en remarquant que maintenant $\sin^2 \theta e^{\pm 2i\phi} = 4\sqrt{2} \frac{1}{5} \sqrt{\frac{5}{2}} P_2(\cos \theta) e^{\pm 2i\phi}$. La somme sur les $3j'$ -Symboles Wigner, donne les termes $\ell = \pm 2$ et $\ell = 0$. En utilisant (B.47), les termes dans l'expression pour θ^{ℓ} se combinent, conduisant à des fonctions [voir (B.46)]

$$j_{\ell}^{(22)}(x) = \sqrt{\frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!}} \frac{j_{\ell}(x)}{x^2}. \quad (6.44)$$

We finally obtain

$$C_{\ell}^T = \frac{1}{\pi} \int \sum_{\lambda} \left| \hat{\Theta}_{\lambda, \ell}^{(T)}(k) \right|^2 k^2 dk, \quad (6.45)$$

$$\hat{\Theta}_{\lambda, \ell}^{(T)}(k) = - \int \bar{E}'_{\lambda}(k) j_{\ell}^{(22)}(k \Delta \eta) d\eta. \quad (6.46)$$

6.2 Propriétés du spectre de puissance angulaire

La description précédente permet de comprendre l'allure générale des spectres de puissance des modes scalaire et tensoriel. Les modes vectoriels seront négligés dans la suite de ce chapitre. Des références complémentaires sur l'étude des propriétés du spectre de puissance en température peuvent être trouvées dans les Réfs. [2,7].

6.2.1 Grandes échelles angulaires

Pour les grandes échelles angulaires, c'est-à-dire les échelles correspondant aux modes de super-Hubble au moment du découplage, le potentiel gravitationnel reste constant (Chapitre 5). Pour ces modes, on peut estimer le spectre de puissance angulaire à l petit en fonction des caractéristiques du spectre de puissance du potentiel gravitationnel. Cette partie du spectre angulaire est généralement appelée *plateau de Sachs-Wolfe*.

6.2.1.1 Perturbations adiabatiques

Les conditions initiales (5.223) impliquent qu'initialement $\delta\phi(0) = -24/(0)$, c'est à dire que les régions surdenses en photons correspondent à des puits de potentiel, et $V_y = 0$. Aux échelles super-Hubble au moment du découplage, n'a pas eu le temps de croître de manière significative. L'équation (5.255) implique alors que $\delta\phi - 44'$ reste constant. A l'ère de la matière, $\delta\phi/4 = 6m/3 = -24/3$ [(5.220) et (5.227)] de sorte que

$$\mathcal{C}_{\text{SW}} = \text{est} \quad (6.47)$$

est la principale contribution aux fluctuations de température, en accord avec la Fig. 6.2. L'équation (6.30) implique alors que le spectre de puissance angulaire est la convolution du spectre primordial avec les fonctions de Bessel

$$C_l = \int_0^{\infty} dk \left[j_l(kr_0) - j_l(kr) \right] P(k) k^3 \quad \text{dfr} \quad (6.48)$$

puisque seul le premier terme de (6.29) contribue significativement et $\Delta T/E = \langle \delta\phi \rangle - q_{\text{LSS}}$, où $\hat{t}/E = q_{\text{LSS}}$ est l'heure de la dernière diffusion. A l'ère de la matière, le potentiel gravitationnel est constant et est lié à la perturbation de courbure de $\delta\phi = 3\mathcal{E}/5$ pour les modes super-Hubble (5.149). il s'ensuit que $B_j = 9F_{\text{S}}/25$. En utilisant la définition $P_x = f_c^3 F_x/2r^2$, on en déduit que

$$C_l = \text{aller et } Al(k) j_l(kr_0) - p_{\text{LSS}} j_l(kr) \quad (6.49)$$

en utilisant un spectre de la forme (8.227) tel que prédit par l'inflation, avec la définition (8.234) donnant $\delta\phi = 47/25$. Cet intégral est dominé par des modes tels que $k\rho_0 \sim f$ de sorte qu'on s'attend à avoir $C_l \propto X(f_c \sim f/r_0)$. Plus précisément, pour un spectre en loi de puissance (voir Annexe B), en choisissant le pivot $k_0 = k = 1/r_0$, et avec l'approximation $q_{\text{LSS}} < C\%$. Pour $n_g = 1$, on obtient

$$C_l \sim \text{ir} Al(k_0) \left[\frac{\pi \Gamma(3 - n_s)}{2^{3-n_s}} \frac{\Gamma\left(\ell + \frac{n_s - 1}{2}\right)}{\Gamma^2\left(2 - \frac{n_s}{2}\right) \Gamma\left(\ell + \frac{5 - n_s}{2}\right)} \right] \quad (6.50)$$

$$(6.51)$$

ce qui correspond au plateau du spectre de puissance angulaire aux faibles multipôles (Fig. 6 2). Pour les grands l , $F(f+a) \propto f^\alpha$ pour que

(6.52)

L'indice spectral du spectre primordial influence directement la pente du plateau de Sachs-Wolfe. Notez également que (6.47) implique que $\delta_{sw} = -\delta^2/6$. Les régions froides correspondent donc à des régions surdenses au moment du découplage.

6.2.1.2 Perturbations d'isocourbure

Pour les perturbations d'isocourbure, nous avons initialement $\delta^2(0) = \delta^2(0) = 0$ et $T_{\gamma}(0) = 0$ à l'ère des radiations (Chapitre 5). Si $S(0)$ est l'entropie initiale, alors dans la matière était $S = -S/5$. Pour les modes à grande longueur d'onde, $\delta^2 - 4\delta^2$ reste constant de sorte que $\delta^2/4 +$

$S + T/2$. Le terme phare de la fluctuation de température à l'époque de la matière est donc

$$\delta_{sw} = 2\delta = -2S/5 ; \quad (6.53)$$

voir (5.229). En utilisant le même argument que pour les modes adiabatiques, on obtient

$$C_f - 36\pi A_l(k_0) \quad (6.54)$$

Pour $ns = 1$, nous avons à nouveau un plateau aux grandes échelles angulaires

$$\delta^2 + 1)C_f = 36\pi^2(4:0). \quad (6.55)$$

6.2.2 Balances intermédiaires

L'origine et la structure des pics du spectre de puissance angulaire peuvent être comprises en étudiant le système des photons et des baryons à l'ère des radiations.

L'évolution de la densité des photons couplés aux baryons est dictée par les équations (5.255) et (5.256), ainsi que (5.253) et (5.254)

$$\delta^2 = \delta^2 + 4\delta^2/l, \quad (6.56)$$

$$\delta''' = k^2 V_b + W \quad (6.57)$$

avec $r' = an \& ay$. Le terme de pression résiduelle et isotropie est lié à la vitesse de rayonnement par

$$k28P \quad (6.53)$$

Cette relation reflète le fait que localement, le quadripôle peut être généré à partir du gradient d'un champ de vitesse. Elle sera justifiée lorsque l'effet de la polarisation sur la diffusion Thomson sera pris en compte [voir (6.231) ci-dessous]. A noter que si la polarisation du rayonnement est négligée, le facteur $8/45$ est remplacé par un facteur $2/15$.

6.2.2 1 Dynamique du fluide photon-baryon

Commençons par considérer les longueurs d'onde grandes par rapport à $1/r'$. Les équations d'Euler pour les photons et les baryons peuvent être étendues à l'ordre dominant en k/r' pour obtenir, si le terme de pression anisotrope est négligé,

$$\delta'_\gamma - \frac{4}{3}\delta'_b = 0.$$

La deuxième équation implique que l'entropie reste constante au cours de l'évolution. Dans ce régime de couplage serré, on peut combiner les deux équations d'Euler pour obtenir

$$+ = \quad (6.59)$$

L'équation de continuité pour les photons peut alors être utilisée pour déduire que l'évolution du contraste de densité est dictée par

$$\delta_\gamma^{N''} + \frac{R'}{1+R}\delta_\gamma^{N'} + k^2 c_s^2 \delta_\gamma^N = 4F(\Phi, \Psi) = 4 \left(\Psi'' + \frac{R'}{1+R}\Psi' - \frac{1}{3}k^2 \Phi \right), \quad (6.60)$$

with

$$\frac{3}{4} \frac{\ell b}{p_\gamma'} = \frac{2}{3} \frac{1}{1+R} \quad (6.61)$$

Cette équation décrit un oscillateur à amortissement forcé. Le terme de forçage est principalement déterminé par les potentiels de Bardeen, qui ont tendance à être principalement dominés par le contraste de densité du MDP lorsque R augmente. Il induit un décalage de la valeur moyenne des oscillations. L'équation (6.60) peut prendre la forme la plus compacte

$$[(1+J_2)^{\wedge'} y + = 4 |l(1+T_i)^{*'}| - |f c^{-2}(1+R)] J \quad (6.62)$$

Cette équation est à la base de la compréhension des oscillations acoustiques du plasma photon-baryon. Le contraste de densité des photons oscille sous l'effet de deux forces opposées : la pression de rayonnement et la gravité. La fréquence de ces oscillations est $= kc_s$. Dans un régime WKB où la période des oscillations est petite devant le temps caractéristique de la variation de l'amplitude [c'est-à-dire lorsque

et « $(\langle \delta N(u_s) \rangle)$ mais en tenant compte du fait que $u > u_s \rightarrow -R'/2(l + \hat{1})$ qui est du même ordre que le terme d'amortissement], l'équation homogène a deux solutions

$$\langle \delta a \rangle = (1 + \mathcal{A})^{-1/4} \cos(itr_s) \quad \langle \delta f \rangle = (1 + \mathcal{B})^{-1/4} \sin(Ar_s), \quad (6.63)$$

where

$$\frac{J_0}{J_0 \sqrt{3(l+R)}} \frac{dp'}{dp'} \quad (6.64)$$

is-the Sound horizon at time p . The general solution of (6.60) is thus of the form

$$\langle \delta \rangle = C_a \delta_a(p) + C_b \delta_b(p) + 4 \int^p \mathcal{I}_\gamma^l(p, p') F(p') dp', \quad J_0$$

$$\mathcal{G}(\eta, \eta') \equiv \frac{\delta_a(\eta')\delta_b(\eta) - \delta_a(\eta)\delta_b(\eta')}{\delta_a(\eta')\delta'_b(\eta') - \delta'_a(\eta')\delta_b(\eta')} = \frac{\sqrt{3}}{k} \frac{[1 + R(\eta')]^{3/4}}{[1 + R(\eta)]^{1/4}} \sin[kr_s(\eta) - kr_s(\eta')], \quad (6.65)$$

so that the general solution is

$$[1 + R(\eta)]^{1/4} \delta_\gamma^N = \delta_\gamma(0) \cos[kr_s(\eta)] + \frac{\sqrt{3}}{k} \left[\delta'_\gamma(0) + \frac{1}{4} R'(0) \delta_\gamma(0) \right] \sin[kr_s(\eta)] \\ + 4 \frac{\sqrt{3}}{k} \int_0^\eta [1 + R(\eta')]^{3/4} \sin[kr_s(\eta) - kr_s(\eta')] F(\eta') d\eta'. \quad (6.66)$$

6.2.2.2 Sachs-Wolfe term

Supposons pour commencer que les potentiels de Bardeen sont quasiment constants. Cela correspond à un Univers dominé par la matière. De plus, nous négligerons la variation temporelle de R . La solution (6.66) implique alors

$$\mathcal{C}_{\text{sw}} = [\mathcal{C}_{\text{sw}}(0) + \hat{A}] \cos kr_s(n) + \frac{\mathcal{Q}_\gamma}{kcs} \sin HJ(\eta) - R\delta > \quad (6.67)$$

et r_s se réduit à $r_s = c_s p$. Le terme de Sachs-Wolfe subit des oscillations dans le temps qui sont la signature des ondes de densité, c'est-à-dire des ondes sonores, se propageant dans le plasma photons-baryons avec une vitesse c_s . Remarquons que le minimum des oscillations, $-R\delta$, est décalé par rapport à zéro à cause des baryons [par rapport à l'étude du fluide de rayonnement pur au chapitre 5]. L'amplitude des oscillations augmente avec R et donc avec la quantité de baryons.

En réalité, la variation de R et des potentiels de Bardeen ne peut être négligée sur plusieurs périodes et l'évolution de δ_{gw} est obtenue à partir de (6.66). Son amplitude diminue ainsi à mesure que $(1 - bR)^{1/4}$ clôture l'expansion cosmique. La figure 6.4 illustre l'évolution temporelle de δ_{gw} pour plusieurs modes avant découplage.

6.2.2.3 Terme Doppler

En négligeant la dépendance temporelle des potentiels de Bardeen et de R , l'équation de continuité pour les photons implique que $k^2 V_y/3 = 6g_w + (\hat{} - \mathcal{S}) \backslash$ de sorte que dans cette approximation,

$$= -c_s |\mathcal{C}_{\text{sw}}(u) - \mathcal{L}3| \sin kr_s(p) + \cos V_s(T). \quad (6.68)$$

Dans la limite du couplage serré, cette vitesse peut être identifiée avec celle des baryons qui est à l'origine de la contribution Doppler. La direction des baryons étant aléatoire, on peut estimer que $\mathcal{C}_{\text{dop}} \sim kV_y/3$. Ce terme oscille symétriquement autour de zéro, en quadrature avec $\mathcal{C}_{\text{sw}}$ avec une amplitude $\sqrt{3}c_s = (1 + A)^{-1/2}$ plus petite. La relation entre les phases de la densité et la vitesse implique que les pics associés au terme Doppler fi 11 dans les creux du spectre du terme de Sachs-Wolfe. Lorsque $R \rightarrow \infty$, le terme Doppler a la même amplitude que le terme de Sachs-Wolfe, de sorte que les oscillations du spectre qui en résultent sont très amorties. Lorsque R devient suffisamment grand le terme Doppler est plus petit et le spectre final présente alors des oscillations, mais moins marquées que celui du spectre de δ_{gw} (Fig. 6.2).

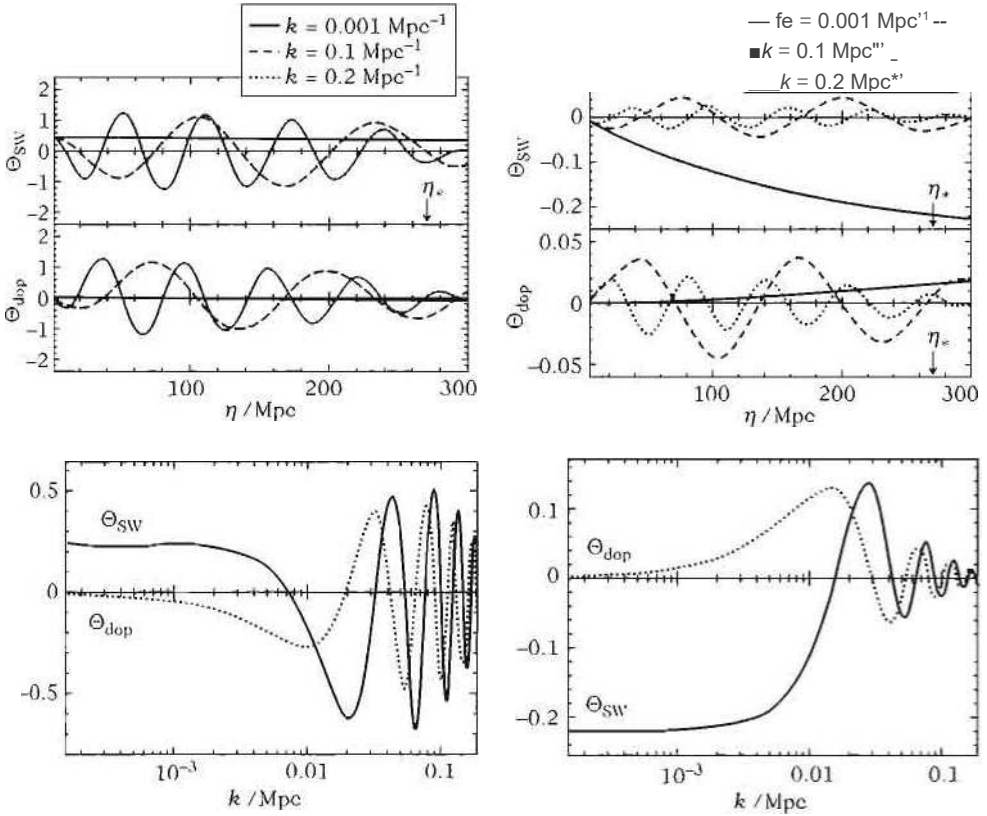


Fig. 6.4 Evolution of $\delta_{\text{SW}} = \delta\gamma/4$ and of $\Theta_{\text{dop}} \sim \delta v_7/v/3$ as a function of time for three modes with wave number $k = 10^{-3}$ (solid line), 10^{-1} (dashed) and $2 \times 10^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ (dotted). The contribution at the time of decoupling as a function of k is presented at the bottom. We compare the adiabatic (left) to the isocurvature (right) initial conditions.

62.2.4 Positions des pics acoustiques

La position des pics acoustiques dépend des conditions initiales des perturbations. Au-dessous de l'horizon sonore, les potentiels de Bardeen sont négligeables. Comme nous le verrons dans la section suivante, dès que les échelles deviennent du même ordre que l'échelle de diffusion (6.80), le contraste de densité photonique est amorti de manière exponentielle. On obtient alors

$$\delta_{\text{SW}} = \frac{1}{4} A \cos(kr_s) + C_1 \int_0^{\eta} \frac{\sin kT_s}{T_s} d\eta \quad (6.69) \quad \text{avec } \gamma(\eta, \eta_0) = \exp(-k^2/k^2_0). \quad C_A \text{ et } C_1$$

sont deux constantes d'intégration dont les valeurs dépendent des conditions initiales.

- *Conditions initiales adiabatiques* : dans ce cas, initialement $\delta^{(0)} = -2\phi^{(0)}$. Si la vitesse des photons V_γ est négligeable, l'équation de conservation se réduit à $\delta^{(0)} = 4\phi^{(0)}$, de sorte que

$\hat{\mathcal{A}}(p) = -2\langle \hat{\mathcal{I}} \rangle(0) \text{ UNE } 4\langle \hat{\mathcal{E}} \rangle(p) - 4\langle \mathcal{J} \rangle(0)$. Après le passage de Hubble, le potentiel gravitationnel tend vers zéro de sorte que $\hat{\mathcal{S}}(p) \approx -6\langle \mathcal{b} \rangle(\hat{u})$. Ainsi, au moment où le mode entre dans l'horizon sonore $\langle \mathcal{S} \rangle^4/4 = -3\langle \hat{\mathcal{I}} \rangle(0)/2$ et $\hat{\mathcal{S}}' = 0$, de sorte que $\mathcal{C}_A = -3\langle \hat{\mathcal{I}} \rangle(\hat{u})/2$ et $\mathcal{C}_i = 0$,

$$Q_{sw} = -\hat{\mathcal{A}}(0)j^{\wedge}A_{\bar{n}}\cos V_s. \quad (6.70)$$

Pour les perturbations adiabatiques, le potentiel gravitationnel est constant de sorte que F est constant dans le (6.60). Dans la limite $kr_s \rightarrow 0$, cette constante excite le mode cosinus. - *conditions initiales isocourbure* : initialement $\hat{\mathcal{S}}(0) = \mathcal{S}(0) - \hat{u}$. Comme le montre (5.220), $2)^{\wedge} - \hat{u}$ à l'ère des radiations et $\mathcal{S} = \mathcal{S}(0)$ reste constant.

le potentiel gravitationnel croît alors depuis $\mathcal{S} \approx -a\mathcal{S}$ (5,228). A cette époque $a \approx r_j$ de sorte que $F \approx T$ m (6 60). Dans la limite $kr_s \rightarrow 0$, ce terme excite le mode sinusoïdal. En résolvant les équations d'évolution, on obtient alors

$$(6.71)$$

Le facteur k_{eq}/k peut être compris comme $\hat{y} \approx -a\mathcal{S}$ jusqu'à ce que le mode atteigne la longueur du Jeans, c'est-à-dire jusqu'à ak_{eq}/k .

Le terme en $\cos(\mathcal{Z}r_s)$ ou $\sin(\mathcal{F}r_s)$ est excité, selon la nature des conditions initiales. Nous en déduisons qu'au moment du découplage ($17 = r/L_{3S}$), $\hat{\mathcal{S}}w(\hat{\mathcal{I}}_i p_{LSS})$ est maximal pour

$$\hat{\mathcal{A}}(p)'s^{\wedge}LS_s) = \begin{cases} & (6.72) \\ p7r, \end{cases}$$

(adiabatique)

$\hat{p} - rr$, (isocourbure)

avec $p = 1, 2, \dots$. L'échelle physique correspondant à ces nombres d'ondes, $= \hat{\mathcal{A}}(p_{LSS})^{7r}/k(p)'$ est observée avec une échelle angulaire de $d(p) \sim A^{\wedge} p^{\wedge}/\mathcal{E})_A (p_{LSE}) >$ où D est la distance angulaire (3,74), soit

$$\pi \quad (6.73)$$

Une échelle angulaire $i9$ correspond approximativement à un multipôle $\mathcal{L} = n/\ell$ (voir les propriétés des polynômes de Legendre, Annexe A). Le spectre de puissance angulaire présente donc un ensemble de pics situés aux multipôles

$$\begin{aligned} p, & \text{ (adiabatic)} \\ \hat{\mathcal{S}}(\hat{\mathcal{C}}LS_{<}) & \quad p = |. \text{ (isocurvature).} \end{aligned} \quad (6.74)$$

La position des pics dépend donc principalement des paramètres cosmologiques via les valeurs de z_{LSS} et $r_g(z_{LSS})$, et très peu du spectre primordial des perturbations. Les modèles adiabatiques ont un ensemble de pics issus des séries (1:2:3:..., tandis que

les pics séries des modèles d'isocourbure sont (1:3:5:..). Le pic $p = 1$ dans les modèles d'isocourbure est généralement trop faible pour que le premier pic soit localisé à

$$\begin{aligned} 220, & \text{ (adiabatique)} \\ 330, & \text{ (isocourbure)} \end{aligned} \quad (6.75)$$

pour un univers de rat sans constante cosmologique. Cette différence de position des pics permet de contraindre l'importance relative des deux types de perturbations. L'espacement angulaire entre les pics est plus ou moins constant et fixé par le rapport des pics code donc

of the comoving radius at decoupling to the comoving angular distance. The acoustic des informations sur les paramètres cosmologiques. En particulier, pour un Univers avec $\Omega_A = 0$, $\Omega_{LSS} \sim 2/(\Omega_0 Q_0)$ et $r_s(z_{LSS}) \propto \Omega_0$, de sorte que pour un modèle adiabatique, la position du premier pic donne presque directement une estimation de la courbure de l'Univers,

$$\ell_{(1)} \sim \frac{220}{\sqrt{\Omega_0}}.$$

Pour finir, soulignons que l'existence de ces pics acoustiques a été constatée par Sakharov dès 1965 [8], bien avant l'observation des anisotropies de température. Les pics acoustiques sont donc souvent appelés *oscillations de Sakharov*.

6.2.3 Petites écailles

A petite échelle, k/r' n'est plus négligeable. Il faut dépasser l'approximation du couplage serré dès que $k \sim r'$, et le libre parcours moyen des photons devient du même ordre de grandeur que la longueur d'onde des perturbations.

6.2.3.1 Amortissement de la soie

Considérons les modes qui sont devenus sub-Hubble à l'ère des radiations. Contrairement à ceux qui entrent en jeu à des échelles intermédiaires, ces modes sont devenus sub-Hubble alors que les photons dominaient le contenu matériel de l'Univers. Cela implique que le potentiel gravitationnel a été considérablement réduit lors des oscillations. Pour une analyse qualitative, on peut ainsi négliger le potentiel de Bardeen et oublier la question de la jauge. De plus, le temps caractéristique des oscillations acoustiques est très petit comparé au temps de Hubble si bien que l'on peut négliger les effets de la dilatation, c'est à dire supposer R est constante.

Les équations d'Euler (5.254) et (5.191) pour les baryons et le rayonnement prennent alors la forme simplifiée

$$V'_b = \frac{1}{R} \tau' (V_\gamma - V_b) \quad V'_\gamma = -\frac{1}{4} \delta_\gamma + \frac{1}{6} k^2 \pi_\gamma - \tau' (V_\gamma - V_b).$$

n_γ se comporte comme $1/r'$ et pour dépasser la limite de couplage serré il faut déterminer la contribution en $1/r'$ de $(1\% - V_\gamma)$. En prenant la différence des deux équations d'Euler les termes d'ordre $(r')^0$ nous apprennent que

$$R \tau' (V_\gamma - V_b) = -\frac{1}{4} \delta_\gamma. \quad (6.76)$$

Les deux équations d'Euler peuvent ensuite être combinées pour former $1// + R V^\wedge (R + 1)1// + R(V^\wedge - V^\wedge)$. En utilisant (6.76) pour exprimer $(1^\wedge / - 1//)$, on obtient

$$(A + 1)1// = \frac{4}{3} \frac{1}{6} \frac{1}{7} \frac{41 + R}{T'} \quad (6.77)$$

En incluant l'effet de polarisation, ir_y est lié à V_y par (6.58) [voir (6.231)]. En combinant cette équation avec l'équation de continuité du rayonnement, on obtient alors

$$\frac{16R^2}{TT + \dots} \quad (6.78)$$

En négligeant l'effet de polarisation, le facteur 16/15 doit être remplacé par un facteur 4/5. La solution WKB de cette équation est

$$\exp(\pm iA:r_s), \quad (6.79)$$

avec

$$\frac{R^2}{r^J} \sim \frac{dr'}{r^J} \quad (6.80)$$

The term in brackets varies very little during the cosmic history since it is 16/15 for $R = \hat{u}$ and 1 for $R \rightarrow \infty$.

The mean free path for Compton scattering is $X_C 1/r'$. So the photons undergo a random walk that drifts in a time η of a length $\lambda_D \sim \sqrt{N} \lambda_C$, the number of steps being of the order of $N \sim \eta/\lambda_C$. The scattering length is thus of the order of $\lambda_D \sim \sqrt{\eta/\tau'}$. This is what (6.80) indicates: $\lambda_D \sim k_D^{-1} \sim \sqrt{\eta/\tau'}$. In a flat Universe with no $z_{eq} \sim z_{LSS}$, it is of the order of

$$k_D \eta_{LSS} \sim (1 + z_{LSS}) \sqrt{6 \frac{\sigma_T}{m_p} \frac{3H_0}{8\pi G_N} \Omega_{b0} h} \quad (6.81)$$

constante cosmologique, en supposant que z

Cet amortissement $[\hat{o}]$ conduit à une diminution exponentielle du spectre de puissance angulaire qui commence à apparaître vers $C \sim 140 \times D_{boh}^2 / 0,019h$, c'est à dire avant le premier pic Doppler. Les multipôles au-delà de ~ 2000 ℓ sont presque complètement amortis, ce qui fixe la résolution angulaire pouvant être atteinte par les observations. Cet effet est illustré sur la figure 6.5.

6.2.3.2 Effet de l'épaisseur de la surface de dernière diffusion

Comme cela a été détaillé au chapitre 4, la recombinaison n'est pas instantanée et la surface de dernière diffusion a une épaisseur donnée. La fonction de visibilité $\hat{v}(\mathbf{n})$ ou $g(\mathbf{z})$ caractérise la probabilité qu'un photon ait subi sa dernière diffusion à un instant ou à

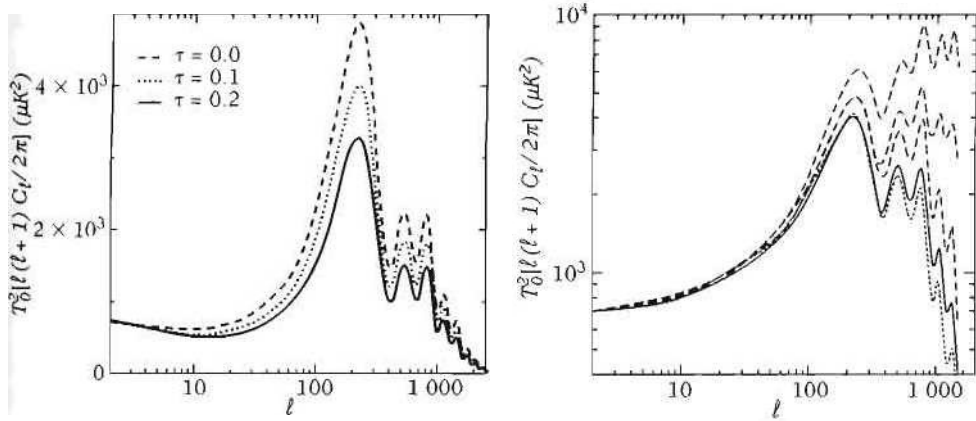


Fig. 6.5 (left): Effect of the reionization on the temperature angular power spectrum. (right): The dashes represent the anisotropies of a standard cold dark matter model without taking into account the Silk damping and the thickness of the surface of last-scattering surface (top) or the thickness of the surface of last scattering alone (middle) or the Silk effect alone (bottom). The solid line represents the exact computation and the dotted line corresponds to a computation including the effect of the thickness of the last scattering surface and the Silk effect by an analytical correction deduced from our estimates. From Ref. [3].

redshift z . La fonction de visibilité peut être déduite de la profondeur optique d'un objet qui émet sa lumière en η , elle-même liée à l'opacité différentielle r' par

$$\tau(\eta) = \int_{\eta}^{\eta_0} \tau'(u) du.$$

Remarquez le choix du signe dans cette expression qui implique que $dr/d\eta = -r'$. La fonction de visibilité est alors

$$5(\eta) = r \exp(-\tau) \quad (6.83)$$

dont l'intégrale est 1 par construction.

La température observée dans une direction e est alors une moyenne pondérée par la fonction de visibilité, de la forme

$$e(\mathbf{x}_0, e) = \int_0^{\infty} 5(\eta) [e_s w + \delta\phi] (\eta, \mathbf{h}_0 - \eta \mathbf{e}) d\eta \quad (6.84)$$

De plus, les interactions purement gravitationnelles auxquelles sont soumis les photons, à redshift donné, n'affectent que la fraction de photons ayant subi leur dernière diffusion. Cette fraction est exprimée en termes de fonction de visibilité comme

$$4\pi \int_0^{\infty} \eta^2 d\eta \quad (6.85)$$

qui varie de 0 à 1 entre η_n et η_0 . Le terme intégré de Sachs-Wolfe est alors de la forme

$$\Delta_{\text{ISW}} = \int_0^{\infty} \left[\dot{\Phi}' + \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{\Phi}}{\Phi} - \frac{\dot{\Omega}_m}{\Omega_m} \right) \right] e^{-2\tau} dr. \quad (6.86)$$

En supposant pour simplifier que les fluctuations de température sont indépendantes du temps alors l'expression (6.84) est simplement la convolution, dans la direction radiale, de la fluctuation de température avec la fonction de visibilité. Dans l'espace de Fourier,

$$\Delta_{\text{ISW}}(\ell) \sim \int_0^{\infty} \left(\dot{\Phi}' + \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{\Phi}}{\Phi} - \frac{\dot{\Omega}_m}{\Omega_m} \right) \right) e^{-2\tau} dr$$

Comme on peut le voir sur la Fig. 4.12, la fonction de visibilité peut être décrite par une fonction gaussienne centrée autour de τ_{ss} ,

$$v(\tau) \sim \exp \left[-\frac{(\tau - \tau_{\text{ss}})^2}{2\sigma^2} \right]$$

de sorte que

$$p(\ell) \propto \exp \left[-\frac{\ell^2}{2\sigma^2} \right]. \quad (6.87)$$

L'épaisseur de la dernière surface de diffusion a pour effet d'effacer de manière exponentielle les anisotropies de température à des échelles plus petites que l'épaisseur de la dernière surface de diffusion. Cet effet est du même ordre de grandeur que l'amortissement Silk.

6.2.4 Autres effets

Après découplage, les photons se propagent le plus librement possible, de sorte que seul l'effet gravitationnel peut modifier significativement leur énergie. À des redshifts inférieurs, l'Univers peut être réionisé et l'interaction avec le plasma peut également modifier la température des photons.

La variation des potentiels de Bardeen et des ondes gravitationnelles primordiales contribuent à la fluctuation de température, Δ_{ISW} , dont l'expression est donnée par (6.17). Ce composant possède deux apports :

- *Premier effet Sachs-Wolfe* : la variation des potentiels de Bardeen au niveau de la matière. la transition radiative laisse une petite contribution au terme intégré. Pour les modèles adiabatiques, cet effet est dominant pour les modes dont la longueur d'onde entre dans le rayon sonore entre égalité et découplage. Sa contribution est donc dominante pour les multipôles proches du premier pic. Pour ces modes, $\Delta_{\text{ISW}} \sim \Delta_{\text{Osw}}$ qui est du même signe que $\Delta_{\text{Osw}} < 0$ à la transition matière-rayonnement. Ainsi, Δ_{ISW} s'ajoute de manière constructive à Δ_{Osw} , induisant ainsi une augmentation de l'amplitude du premier pic (Fig. 6.2). Pour les modèles d'isocourbure, la croissance du potentiel pour les modes de longueur d'onde plus grande que le rayon sonore donne une contribution importante pour les multipôles plus petits que le premier pic.
- L'effet *Sachs-Wolfe tardif* est dû à la variation du potentiel aux petits décalages vers

le rouge si l'Univers est dominé par une constante cosmologique ou par la courbure spatiale. Cette contribution est donc importante surtout aux grandes échelles angulaires et elle conduit à une modification du plateau de Sachs-Wolfe puisque le potentiel est déjà

- proche de zéro pour les modes sub-Hubble au moment du découplage. Puisque δ se désintègre (voir chapitre 5), cela induit un redshift supplémentaire. Cet effet est l'une des rares signatures de l'énergie noire sur les anisotropies du fond diffus cosmologique et il doit être corrélé avec d'autres traceurs du potentiel gravitationnel de l'Univers local.

effet purement gravitationnel qui peut modifier le spectre de puissance angulaire à petite échelle est celui de la lentille gravitationnelle exercée par des structures à grande échelle. Cet effet est faible sur les anisotropies de température mais peut avoir des conséquences sur la polarisation du fond diffus cosmologique (voir chapitre 7).

6-2.4.2 Réionisation

Dès l'apparition des premières sources de photons ultraviolets, l'Univers peut être réionisé. Les électrons libres peuvent alors (re)diffuser les photons du fond diffus cosmologique après découplage. Cette diffusion tend à isotropiser les anisotropies du fond diffus cosmologique en faisant la moyenne des anisotropies de température de nombreuses lignes de visée qui se rencontrent lors de l'événement de diffusion. Si l'on suppose que la réionisation est homogène, on peut approximer la fonction de visibilité par une somme de deux distributions de Dirac localisées en r_{LSS} et r_{re} , respectivement, pour le découplage et la réionisation, alors

$$\begin{aligned} \delta\theta(\mathbf{l}, \mathbf{b}, \mathbf{e}) \sim & (1 - e^{-\tau}) (6 + eV_b) [e(\theta \ll \theta_{\text{re}}) > \theta_{\text{re}}] \\ & + e^{-\tau} \ll (0 + eV_b) [e(\theta_{\text{fo}} - \theta_{\text{LSS}}), q_{\text{LSS}}], \end{aligned} \quad (6.88)$$

où r_{re} c'est l'optique ! profondeur à la réionisation et où nous avons négligé l'effet Sachs-Wolfe intégré.

Le premier terme décrit la moyenne à partir de différentes lignes de visée ainsi que la génération de nouvelles anisotropies dues à la diffusion sur les électrons en mouvement lors de la réionisation. Le deuxième terme représente la température qui serait observée s'il n'y avait pas de réionisation et a été pondéré par la fraction de photons qui n'ont pas été diffusés.

$\delta[e(\theta_0 - \theta) > \theta_{\text{re}}]$, qui est évaluée au moment de la réionisation, est la moyenne de $\delta\theta$ sur la surface de dernière diffusion des électrons. Pour les modes de longueur d'onde longue, c'est à dire $\theta(\theta_0 - \theta) \gg 1$ cela donne $\delta[e(\theta_0 - \theta_{\text{LSS}}) > \theta_{\text{LSS}}] \approx \delta\theta$ disparaît aux petites échelles. Ainsi, pour les échelles super-Hubble au moment de la réionisation, l'anisotropie de température observée devient

$$\delta\theta(\mathbf{l}, \mathbf{b}, \mathbf{e}) \rightarrow \hat{\theta}(\mathbf{l}, \mathbf{b}, \mathbf{e}) + (1 - e^{-\tau}) eV_b,$$

où eV_b est la différence entre les vitesses des électrons à la réionisation et à la diffusion précédente le long de la ligne de visée. A ces échelles, le terme Doppler est sous-dominant de sorte que $\delta\theta$ n'est pratiquement pas affecté. Pour les échelles sub-Hubble au moment de la réionisation

$$\delta\theta(\mathbf{l}, \mathbf{b}, \mathbf{e}) \sim e^{-\tau} \delta\theta(\mathbf{l}, \mathbf{b}, \mathbf{e}) + (1 - e^{-\tau}) eV_b(q_{\text{re}}).$$

Cet effet est illustré sur la figure 6.5. L'analyse de la corrélation croisée entre la température et la polarisation des observations WMAP suggère que $r_{ic} \sim 0.17$ à partir d'un redshift de $z_{re} \sim 15$.

6.2.4.3 Effet Sunyâev-Zel'dovich

L'interaction des photons du fond diffus cosmologique avec un plasma chaud peut entraîner une modification de leur température. En particulier, le gaz chaud des amas a une température de l'ordre de $10^7 - 10^8$ K, qui rayonne, via le Brehmsstrahlung, dans la région des rayons X. La diffusion Compton inverse avec les électrons libres du cluster peut modifier la distribution d'énergie des photons en déplaçant les photons basse fréquence vers des fréquences plus élevées. Il s'agit de l'effet *thermique Sunyaev-Zeldovich*, qui représente la contribution dominante aux anisotropies secondaires.

En un mot, la modification de la température des photons du fond diffus cosmologique - est de l'ordre de $\Delta T_{\text{SZ}} \propto L n_e T_e$, où la barre représente une moyenne le long de la ligne de visée. L est la longueur caractéristique de cette ligne de visée dans le cluster. T_e et n_e sont la température et la densité des électrons libres. Notez que la luminosité de la surface de l'amas dans X est de l'ordre de où $V = D^2 \Omega L$ est le volume de l'amas, supposé être observé sous un diamètre angulaire d .

Pour illustrer cet effet, considérons un cluster avec un profil de densité électronique de la forme

$$(6,89)$$

pour $0 < r < R$ et zéro sinon, où r est le rayon du noyau. La variation de la température du photon est given par

$$(6,90)$$

en supposant que la température des gaz chauds est indépendante de r . Dans la limite $R \rightarrow \infty$, on en déduit que

$$\Delta T_{\text{SZ}} \propto \int_0^R n_e T_e dr \propto R n_e T_e \quad (6,91)$$

Contrairement à la diffusion Thomson, l'effet thermique Sunyaev-Zel'dovich induit une distorsion spectrale avec une diminution de la température aux grandes longueurs d'onde et une augmentation aux courtes longueurs d'onde. Il nous permet de sonder les amas de galaxies et représente également une puissance suffisante pour détecter les amas à de grands redshifts (voir Réf. [16] pour un aperçu). Si l'amas a une vitesse v par rapport au fond diffus cosmologique, l'effet Doppler induit un deuxième effet, appelé effet *kinétique Sunyaev-Zel'dovich*, qui dépend de la composante radiale de la vitesse.

6.2.4.4 Ondes gravitationnelles

Il est difficile d'obtenir une relation équivalente à (6.50) pour les ondes gravitationnelles puisque (6.45) fait intervenir la dérivée temporelle de E . A l'ère de la matière, la solution de l'équation des ondes gravitationnelles est donnée par (5.135) de sorte que

$$\bar{E}'_\lambda(k, \eta) = -3k\bar{E}_\lambda(k, \eta_i) \frac{j_2(k\eta)}{k\eta} \quad (6.92)$$

La relation (6.45) implique alors que, pour un spectre primordial de la forme PT ou k^{-n_r} tel que prédit par l'inflation (8.234),

$$\frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!} \int \frac{dy_0}{y_0^{1-n_T}} \left[\int_{y_0\eta_{LSS}/\eta_0}^{y_0} \frac{j_\ell(y_0-y)}{(y_0-y)^2} \frac{j_2(y)}{y} dy \right] \quad (6.93)$$

où on a posé $y = kr$ et choisi $k_0 = 1/770$. Cet intégral est seulement non négligeable quand $y \sim 2$ et $y_0 - y \sim t$ simultanément, car sinon au moins une des deux fonctions de Bessel est proche de zéro. Le domaine d'intégration implique que $y_0 < y_0/f_{LSS}$ de sorte que les deux conditions ne peuvent être satisfaites simultanément que si

$$\ell \lesssim 2 \frac{\eta_0}{\eta_{LSS}} \sim 2\sqrt{z_{LSS} + 1} \sim 60. \quad (6.94)$$

Figure 6.3 indique que C_ℓ^T décroît rapidement de $\ell \sim 100$ onwards, which is compatible with this estimate. This implies that the spectrum C_ℓ^T is weakly sensitive to the cosmological parameters.

To evaluate the intégral (6.93), notice that the second Bessel function is peaked around $y \sim 2$. It can be approximated by $j_2(y)/y \sim 2^{-1/2}J(y-2)$, which implies, after integrating over y , that

$$C_\ell^T \propto \frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!} \int \frac{dy_0}{y_0^{1-n_T}} \left[\frac{j_\ell(y_0)}{y_0^2} \right] \quad (6.95)$$

quand nous supposons que $y_0 \gg 2$. Nous en déduisons que

$$\frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!} \frac{\Gamma\left(\ell-2+\frac{n_T}{2}\right)}{\Gamma\left(\ell+4+\frac{n_T}{2}\right)} \quad (6.96)$$

En utilisant le même développement que pour (6.50), on obtient

$$\hat{e}(6+V)Cf_{ocr}^T \quad (6.97)$$

pour les petits multipôles, $\ell > 2$.

6.3 Description cinétique

Pour obtenir une description plus précise et réaliste de la propagation des photons et de leur découplage avec la matière, il faut développer une approche cinétique. Cette approche est principalement nécessaire pour les fluides relativistes, qui ont un libre parcours moyen important. La théorie cinétique dans le cadre relativiste est décrite en détail dans les réf. [11–13] et des informations complémentaires sur les fonctions de distribution peuvent être trouvées dans la réf. [14]. L'équation de Boltzmann dans le cadre cosmologique est détaillée dans les réf. [15–19].

6.31 Perturbed Boltzmann equation

6.3.1.1 Distribution function

Just as in Chapter 5, we introduce the distribution function f that depends on the position and the momentum, which are considered to be independent. For a particle of mass m , the distribution function lives on the mass shell

$$(6.98)$$

where the tangent space is defined as

$$TM = \{ M^{\alpha\beta} p^\alpha e_\beta(T_x) \},$$

M being the four-dimensional manifold describing space-time and T_x its tangent space at the point x .

To decompose this distribution function, it is convenient to introduce the vector field normal to the constant time hypersurfaces, $\{p = \text{const.}\}$. With a metric of the form (5.52), this vector field can be expressed as

$$-a(1 + A\hat{u}), \quad \hat{u} = (1 - A - B^*)^{-1/2}, \quad (6.99)$$

to first order in perturbations. One can then decompose the tangent vector k^α to the geodesics of the photons (we shall use p^μ for the general notation and k^μ only for null vectors) as

$$k^\alpha = -a \int_0^\infty d\lambda \, \hat{n}^\alpha = -a \hat{n}^\alpha \quad (6.100)$$

avec $\hat{n}^\alpha \hat{n}_\alpha = 1$. Cette décomposition assure d'une part que $k^\alpha k_\alpha = 0$ et d'autre part il permet d'identifier E avec l'énergie du photon qui serait mesurée par un observateur évoluant avec la quatre-vitesse puisque $N^\alpha k_\alpha = -E$.

Dans la théorie des perturbations, la fonction de distribution peut alors être décomposée en une partie qui, du fait de l'isotropie et de l'homogénéité, ne dépend que de p et E et en une perturbation, qui dépendra de la position espace-temps et des 4 composantes de la quantité de mouvement, comme

$$f(x^\mu, p_\mu) = f(\eta, x^i, E, n^j) = \bar{f}(\eta, E) + \delta f(\eta, x^i, E, n^j). \quad (6.101)$$

L'évolution de cette fonction de distribution est dictée par l'équation de Boltzmann

$$r[\dot{f}] = c[\dot{f}]_e, \quad (6.102)$$

où $T_H \partial/\partial \eta$ est l'opérateur de Liouville et $C[f]$ le terme de collision. Cette équation montre

que la densité de photons dans l'espace des phases n'est affectée que par les collisions.

6.3.1.2 Équation de Boltzmann sans collision

Pour commencer, considérons le terme de Liouville,

$$\frac{dA}{dt} \quad (6.103)$$

où λ est un paramètre affine le long de la géodésique de vecteur tangent tel que $dr/d\lambda = k$. L'équation géodésique (1.37) peut être réécrite comme

$$dA \ll \quad \gg$$

de sorte que l'opérateur de Liouville prend la forme générale

$$(6.105)$$

A partir de la décomposition (6.101), il peut être réécrit comme

$$\frac{d}{dt} \frac{df}{dn} \frac{dz}{d\lambda} \frac{df}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dt} \quad \frac{dn}{dr} \frac{df}{dr} \quad (6.106)$$

Nouveau, il faut évaluer cette fonction au premier ordre dans

les perturbations. Le dernier terme est facile à obtenir puisque df/dn est d'ordre 1 en perturbations de sorte que $dn/d\lambda$ ne doit être évalué qu'au niveau de base. Dans cet ordre, (6.104) implique que

$$E' = -WE, \quad n^{\prime j} = -\Gamma^{*j}_{ik} n^i n^k, \quad (6.107)$$

γ_{ij} étant les symboles de Christoffel de la métrique spatiale y_{ij} (voir Annexe A). Le dernier terme de (6.106) est donc

$$d'n \hat{r} \hat{u} \quad {}^3 dn^i$$

Le deuxième terme est également très simple à obtenir puisque $dx^*/d\lambda = V/c$. Puisque d^2f/dr^2 est du premier ordre en perturbations, on a seulement besoin de $dx'/dr = n^i$ pour que

$$\frac{d}{dr} \frac{df}{dx^i}$$

Pour évaluer le troisième terme de l'expression (6.106), il faut compter $dE/d\lambda$. Pour cela il suffit de considérer la composante temps de (6.104),

$$\frac{d}{dt} P^0(T)$$

ce qui donne directement

Using the expressions (C.6) and (C.26) for the Christoffel symbols, we obtain

$$\frac{dE}{d\eta} = -E \left[\mathcal{H} + n^i \partial_i A + \left(\frac{1}{2} h'_{ij} - D_{(i} B_{j)} \right) n^i n^j \right].$$

Gathering all these terms together, we then obtain the final form of the Liouville operator to first order in the perturbations

$$L[f] = f' + n^k \partial_k f - \left[\mathcal{H} + n^k \partial_k A + \left(\frac{1}{2} h'_{ij} - D_{(i} B_{j)} \right) n^i n^j \right] E \frac{\partial f}{\partial E} - {}^{(3)}\Gamma_{ij}^k n^i n^j \frac{\partial f}{\partial n^k}. \quad (6.108)$$

$$L[f] = f' + n^k \partial_k f - \left[\mathcal{H} + n^k \partial_k A + \left(\frac{1}{2} h'_{ij} - D_{(i} B_{j)} \right) n^i n^j \right] E \frac{\partial f}{\partial E} - {}^{(3)}\Gamma_{ij}^k n^i n^j \frac{\partial f}{\partial n^k}. \quad (6.109)$$

With the decomposition (6.101), we thus obtain the two evolution equations

$$L[\bar{f}] = \bar{f}' - \mathcal{H} E \frac{\partial \bar{f}}{\partial E} \quad (6.110)$$

$$L[\delta f] = \delta f' + n^k \partial_k \delta f - \mathcal{H} E \frac{\partial \delta f}{\partial E} - \left[n^k \partial_k A + \left(\frac{1}{2} h'_{ij} - D_{(i} B_{j)} \right) n^i n^j \right] E \frac{\partial \bar{f}}{\partial E} - {}^{(3)}\Gamma_{ij}^k n^i n^j \frac{\partial \delta f}{\partial n^k}. \quad (6.111)$$

To lowest order, the distribution function of the photons is a Bose-Einstein distribution function (Chapter 4),

$$\bar{f}(E, \eta) = \left\{ \exp \left[\frac{E}{T(\eta)} \right] - 1 \right\}^{-1} = \bar{f} \left(\frac{E}{T} \right). \quad (6.112)$$

(6.110) then implies that $T \propto 1/a$, as was already given for the energy of each photon by the geodesic equation.

To linear order, if we consider the distribution function to be of the form

$$f = \bar{f} \left[\frac{E}{T(\eta, x^i, n^j)} \right],$$

and expand the temperature as $T(\eta, x^i, n^j) = \bar{T}(\eta)[1 + \theta(\eta, x^i, n^j)]$ then

$$f(\eta, x^i, E, n^j) = \bar{f}(\eta, E) - E \frac{\partial \bar{f}}{\partial E} \theta(\eta, x^i, n^j). \quad (6.113)$$

The temperature field is thus inhomogeneous (it depends on x^i) and anisotropic (it depends on n^j). We stress that this ansatz implicitly assumes that θ does not depend

sur E . Cette hypothèse ne peut être justifiée qu'après avoir étudié le terme de collision. Comme nous le verrons, ce terme ne dépend pas de l'énergie, donc la diffusion Thomson, dans ce régime, n'induit aucune distorsion spectrale.

6.3.1.3 Quantités macroscopiques

Une série de grandeurs macroscopiques peut être définie à partir de la fonction de distribution, dont les premières sont des grandeurs fluides. Pour cela nous introduisons une tétrade espace-temps, ou vierbein, $(e^a)_0 = 0..3$ pour être localement dans un espace-temps de Minkowski. On choisit cette tétrade telle que

$$e^0_{\text{NM}} = e^{\hat{}} = 0.$$

Le vecteur $k^{\hat{}}$ peut alors être décomposé comme $k^a =$ Le tenseur énergie-impulsion est alors obtenu, comme dans l'espace-temps de Minkowski, en intégrant sur l'impulsion comme

$$T^{\hat{}}(x) = \int d^3A \quad (6.114)$$

avec $fc^2 = \int d^3x k^a k^b$ et $E^* = \int d^3x m^2 = k$ pour une particule sans masse. Pour simplifier les notations, le facteur $(27r)^3$ est inclus dans la fonction de distribution. Le tenseur énergie-impulsion du rayonnement est alors donné par

$$T^{\hat{}}(x) = [\quad (x^a, k^0) E \delta^{\hat{}} \delta^{\hat{}} n. \quad (6.115)$$

Ce tenseur énergie-impulsion peut être développé comme (5.69). On en déduit alors que

$$p = \int d^3x u^{\hat{}} u^{\hat{}} f E d^3n, \quad (6.116)$$

$$P = \int d^3x (I W l_M J / E d^3n, \quad (6.117)$$

$$S I^* = \int d^3x k^a k^e \quad / E d^3n, \quad (6.118)$$

où l'on rappelle que $-L_{MP} = + u^{\hat{}} i_{\hat{}} . u^{\hat{}} *$ est défini par (5.70) et donc $= a(-1 - A, i) i^{\hat{}} + E f c$. $k^{\hat{}} k^{\hat{}} = 0$ implique que $P = p/3$ et on retrouve l'équation d'état du rayonnement. Notons d'abord

$$k^{\hat{}} u_{\hat{}} = -E [1 - n^*(v_j + B_i)], \text{ and then notice that the integral}$$

of $f n^{\hat{}}$ over angles vanishes, so that we infer that

$$5p = \int d^3x \int d^3n f E^3 d^3n,$$

$$B^{\hat{}} = n^{\hat{}} \int d^3x \int d^3n f E^3 d^3n,$$

$$n^{\hat{}} o^{\hat{}} = \int d^3x \int d^3n f E^3 d^3n,$$

que

$$(6.119)$$

$$(p + P)(o^* + \quad (6.120)$$

$$(6.121)$$

with

$$= \sum_j r_{un}^j - x T_{ij}^j \quad (6.122)$$

Elle représente donc la densité d'énergie par unité d'angle solide qui se propage selon une direction $\mathbf{n}'$ au point espace-temps $(77, x^3)$. Cette quantité peut être décomposée comme $I = \hat{I}^4 S I$ avec

$$\{i(r)\} = 4rr E^3 f(rpE) \delta E, \quad (57) \quad \{T, x^1, r\} = 4\pi j E^3 \delta(p, ?, \xi, n^j) d\xi. \quad (6.124)$$

(6.125)

$$\ddot{E} + 4W7 = \hat{U}, p_{\gamma} 4 - 4?ip_7 = 0$$

De même, pour le terme de collision entrant (6.102), on définit

$$C[J7] = 4\% \text{ y } C[Sf]E^2 \dot{a}E. \quad (6.127)$$

SE + rEôkS.J 4- 47Y67 4- 4 n^{kôkA} 4-

(6.128)

Le contraste de température est défini à partir de la luminosité par

(6.129)

et correspond à la définition introduite par le (6.113). Le monopôle de cette grandeur est directement lié au contraste de température des photons

$$\wedge^1(\hat{1}^1) - y = i5_7. \quad (6.130)$$

L'équation d'évolution de δ peut être facilement déduite de celle de la luminosité (6.128), en utilisant (6.126),

$$\theta' + n^k \partial_k \theta - {}^{(3)}\Gamma_{ij}^k n^i n^j \frac{\partial \theta}{\partial n^k} + \left[n^k \partial_k A + \left(\frac{1}{2} h'_{ij} - D_{(i} B_{j)} \right) n^i n^j \right] = \overline{C[0]}, \quad (6.131)$$

où on a défini $\langle \gamma(0) \rangle = C[\langle \gamma \rangle / 4Z]$. Cette équation peut être obtenue directement en insérant la décomposition (6.113) dans (6.111). Cependant, une différence existe puisqu'ici f représente la fluctuation relative de la luminosité et l'intégration sur l'énergie implique que cette grandeur ne dépend pas de la température, hypothèse implicite dans la définition (6.113). Les deux quantifications sont identiques et satisfont la même équation de Boltzmann tant que le terme de collision ne dépend pas de l'énergie.

6.3.1 -5 Expansion multipolaire

Tout comme dans (6.125), les différentes quantités de fluide apparaissent comme les instants successifs de luminosité

$$(p + P)(w^* + B') = \frac{1}{4\pi r^2} \quad (6.132)$$

On peut ainsi agrandir le Boltzmann (6.128) en augmentant la luminosité en séries au fur et à mesure

$$\delta I(r, x', n^j) = \frac{1}{e} (n^{*1} \dots n^{*s}) Z_{s, \dots, s}(r, x'). \quad (6.133)$$

Les seules perturbations métriques qui ne sont pas invariantes par jauge sont les modes scalaire et vectoriel, de sorte que seulement I_S et Z_q sont modifiés sous une transformation de jauge. Tous les composants d'ordre supérieur sont invariants en termes de jauge. Une telle décomposition n'est pas unique mais ce problème peut être résolu en imposant les quantités Z_q à être symétrique et sans trace. Dans ces conditions Z_q possède seulement $(2Z + 1)$ composantes indépendantes [seules $(f + 1)(f + 2)/2$ sur les 3^s composantes de Z_q ..., sont indépendantes si le tenseur est symétrique et la condition sur la trace impose $6(6 - 1)/2$ contraintes parmi ces composants]. Comme vu précédemment, seuls les trois premiers termes de ce développement sont des quantités fluides, et à ce titre entreront dans les équations d'Einstein. Un développement sériel similaire peut être effectué pour le champ température, conduisant à la définition des coefficients $q_{fo,z'}$)-

Remarquons que le développement (6.133) permet de simplifier la formulation de l'équation de Boltzmann puisque dans $n^k \partial_k f$ la dérivée ne s'applique que sur Z_q ..., de sorte que ce terme peut être combiné avec les symboles de Christoffel pour aboutir à une dérivée (spatiale) covariante. De plus, c'est la seule manière appropriée de traiter des termes tels que dO/dn^k . L'équation (6.131) prend alors la forme

r

Les termes métriques ne dépendent pas de n^i de sorte qu'ils n'interviennent que dans les équations du monopôle et du dipôle, c'est à dire au niveau de la description du fluide.

La décomposition SVT, introduite au chapitre 5, peut être généralisée à tous les ordres. Nous rappelons qu'un tenseur symétrique sans trace de rang 2, tel que le tenseur de contraintes anisotrope (5.72), peut être décomposé comme

$$T_{ij} = A_{ij} + \frac{1}{2} \delta_{ij} T_{kk}$$

où l'on rappelle que est défini par (5.73). On obtient ainsi les parties scalaire, vectorielle et tensorielle comme

$$(S) \quad \text{STF} \quad (V) \quad \text{STF} \quad (T) \quad \text{STF}$$

où 'STF' signifie que nous extrayons la partie symétrique et sans trace. Pour que la décomposition soit unique, il est clair qu'il faut imposer que $\text{tr}(T) = 0$ soit sans trace et transverse.

Cette décomposition peut être généralisée à tout tenseur de rang t et la composante d'ordre (m) peut être décomposée comme

$$- \left[\begin{matrix} * & \dots & \dots \end{matrix} \right]_{\text{STF}} \quad (6.135)$$

$|m| = 0, 1, 2$ correspondent respectivement aux termes S, V et T. En décomposant ℓ en coefficients de Fourier, 0, et en choisissant une base telle que $e_\ell = k/k$, alors la partie scalaire de sera proportionnelle à $k^m \dots k^{t-m}$. Le contracter avec la partie STF de il est clair que l'on obtient un polynôme de Legendre d'ordre t tel que

Les modes vectoriels ont deux polarisations qui sont des vecteurs orthogonaux à $\mathbf{k}$ [voir la décomposition (6.32)] donc on peut choisir $e_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_j \pm i\mathbf{e}_k)$ comme base des modes vectoriels. La partie vectorielle de est alors proportionnelle à la partie STF de $k_\ell \dots$. Dans ce cas, la contraction avec $n^m \dots n^{t-m}$ donne des termes de la forme

Cette construction peut être généralisée à tous les m . Ainsi, la composante de Fourier peut être décomposée comme

$$\left\langle \dots \right\rangle_{m=-\ell}^{\ell} \quad (6.136)$$

$$\text{with } \quad \text{un } [\text{fci. } \dots] \quad \text{® } \dots \langle \dots \rangle \text{ c}^*] \quad (6.137)$$

en choisissant le signe $-$ lorsque $m > 0$ et le signe $+$ lorsque $m < 0$, sinon. On peut alors montrer (voir le chapitre 5 de la réf. [3] ou la réf. [20], qui contient une description de la construction des tenseurs STF) que

$$(6.138)$$

Each type of perturbation possesses 2 degrees of freedom apart from the scalar mode that only has one, so that for a mode ℓ , there are $2\ell+1$ degrees of freedom.

Cette construction nous permet de conclure que le champ de température $\theta(r, x, n)$ de rayonnement au point x qui se propage dans la direction n peut être développé dans la base $G_{lm}(x, n)$ définie par

$$\tag{6.139}$$

comme

$$\theta(r, x, n) = \int \frac{d^3\mathbf{f}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{f}\cdot\mathbf{x}}}{f} \sum_{lm} \frac{52}{f^2} G_{lm}(x, n) \tag{6.140}$$

Seuls les modes $m = 0, \pm 1, \pm 2$ sont excités par la matière et les perturbations de la géométrie espace-temps.

6.3.1.6 Relation avec la décomposition S VT

Extension des modes scalaires au fur et à mesure

$$Q^{(0)} = \exp(i\mathbf{f}\cdot\mathbf{x}), \quad Q^{\text{TM}} = \hat{\partial}_i Q^{\text{w}}, \quad Q^{\text{TM}} = - (d_i d_j - \delta_{ij}) Q^{<^0>},$$

alors

$$Q^{(0)} = G_{00}, \quad n^{\wedge(0)} = -\mathbf{f}\cdot\mathbf{G}_{00}, \quad <xk^2 G_{20}. \tag{6.141}$$

Quant aux modes vectoriels, ils peuvent être étendus comme

$$Q_i^{(\pm 1)} = -\frac{i}{\sqrt{2}} e_i^{\pm} Q^{(0)}, \quad Q_{ij}^{(\pm 1)} = \partial_{(i} Q_{j)}^{(\pm 1)},$$

de sorte que

$$n'Q^{(\pm 1)} = G_{i\pm i}, \quad n^i n'^j Q^{\wedge(\pm 1)} = -A < 7_{2\pm 1} \tag{6-142}$$

Cette décomposition est analogue à celle de (6.32) que nous avons utilisée initialement. Les modes tensoriels peuvent être étendus comme

$$Q_{ij}^{(\pm 2)} = -\sqrt{\frac{3}{8}} e_i^{\pm} \otimes e_j^{\pm} Q^{(0)},$$

de sorte que

$$= G_{2\pm 2}. \tag{6.143}$$

Notons que cette expansion diffère de celle initialement utilisée (6,40) d'un facteur $\sqrt{3/8}$

6-3 1.7 *Terme de collision*

En général, le terme de collision peut être décomposé comme

$$c/l =$$

où f_+ et f_- représentent les fonctions de distribution entrantes et sortantes lors de la diffusion. Dans le test (rame des baryons et des électrons, les deux termes impliqués dans (6.144) sont donnés par

$$\frac{df_+}{d\eta} = \tau' \int f \omega(n, n') \frac{d^2 n'}{4\pi}, \quad \frac{df_-}{d\eta} = \tau' f, \quad (6.145)$$

where τ' is defined as previously as

$$T' = aTn_e. \quad (6.146)$$

ou est la section efficace de la diffusion de Thomson et n_e la densité des électrons libres. La fonction $\omega(n, n')$ contient la dépendance angulaire de la diffusion de Thomson et est donnée par

$$w(n, n') = [1 + (7\hat{l} \cdot \hat{l}')^2]^{-1} = 1 + \dots \quad (6.147)$$

P_2 étant le polynôme de Legendre d'ordre 2. Notons une propriété importante : LU et donc le terme de collision ne dépend pas de l'énergie donc la diffusion de Thomson n'induit aucune distorsion spectrale. Ce n'est plus le cas lorsque la température de les photons est très différente de celle des électrons, comme par exemple pour les amas à effet Sunyaev-Zeldovich où la température des électrons est de l'ordre de quelques keV, alors que celle des photons n'est qu'un quelques Kelvin. Cette propriété implique également que la fluctuation de luminosité (6.129) correspond bien à une fluctuation de température, telle qu'introduit par l'ansatz (6.113).

Au niveau de base, l'expression de $\delta f(n, n')$ implique que

$$C[f_-] = 0, \quad (6.148)$$

ce qui était normal puisqu'à cet ordre les symétries de l'espace-temps de Friedmann-Lemaître imposent que tous les fluides aient la même vitesse, proportionnelle à δQ .

Au premier ordre dans les perturbations, on obtient

$$C[\delta f] = \tau' \left[\int \delta f(\eta, x^i, \vec{E}, n') \frac{d^2 n'}{4\pi} - \delta f(\eta, x^i, \vec{E}, n) + \frac{3}{4} n^{ij} \int \delta f(\eta, x^i, \vec{E}, n) \frac{d^2 n'}{4\pi} \right] \quad (6.149)$$

où E est l'énergie dans le référentiel de repos des électrons et des baryons. En utilisant le fait que $E = \gamma m_e c^2 = E[1 - (B^2 + v_j^2)^{1/2}]$, on obtient que

$$E^3 dE - [1 - 4(B^2 + v_j^2)^{1/2}] E^3 d\vec{E}.$$

L'intégrale sur l'énergie donne alors

$$\langle 574^{\wedge} \sim 61 + \quad + {}^w \mathbf{b}) \mathbf{n} \rangle + -n^{\prime l} \int \frac{\delta l(T), x \setminus E, n')}{4J} \quad , \quad d^2 n' \quad (6.150)$$

The first term reduces to the monopole and the last one to $3n^{\vee} n_{,?} = (47)n^{\vee} n^{\vee} 7r_{,j}/16$, so that

$$(6.151)$$

où $\hat{U}_Q$ est le monopôle de la température (6.130). Notez à nouveau que $C[0]$ disparaît dans l'espace-temps non perturbé. D'après le lemme de Stewart-Walker (Chapitre 5), $C[0]$ est donc invariant de jauge. Nous soulignons également que dans le schéma d'expansion (6.133), le seul terme qui contribue au-delà du multipôle $\ell = 2$ est $C[\$] = -r'\delta$. AINSI, pour $\ell > 2$ aucun terme de couplage aux baryons ou à la métrique ne contribuera à la hiérarchie de Boltzmann.

6.3.2 Évaluer les expressions invariantes

Des éléments complémentaires sur la discussion de la dépendance de jauge de la fonction de distribution peuvent être obtenus dans les réf. [19,21].

6.3.2.1 Fonction de distribution invariante de jauge

La décomposition de la fonction de distribution f car $f = f$ n'est pas unique. Tout comme au chapitre 5, la définition de la perturbation δf implique le choix d' un isomorphisme entre les espaces où f et J sont définis, c'est à dire d'une application

$$V \gg : PM' - 'Em (x^{\prime \prime}, P^{\prime \prime}) (\tilde{t}^a, p^a),$$

ce qui nous permet de décomposer f comme

$$f = f_{\text{oi}p} + \delta f. \quad (6.152)$$

Tout changement de coordonnées, $x^a \longrightarrow y^a = x^a - x^{0l} -$, sur A_4 induit une transformation sur l' espace tangent dans lequel l'impulsion se transforme en

$$-p^{\wedge} d^{\wedge}. \quad (6.153)$$

Cette transformation est donc générée par le vecteur de coordonnées

$$r \leq (\wedge, p^{\wedge} e) \quad (6.154)$$

dans la base naturelle (d_M, d_{pU}) . En ordre linéaire, la fonction de distribution se transforme

$$\text{comme } / \longrightarrow / + \ell_{re} /. \quad (6.155)$$

Pour obtenir la loi de transformation de $\leq 5/$, il faut d'abord remarquer que $/$ n'est pas défini sur TM mais uniquement sur le sous-espace P_m - Mais en général, $T\zeta$ n'est pas tangente à P_m , donc $\text{Tr} \zeta /$ n'est pas bien défini. f devrait donc être étendu sur un ensemble ouvert de TM

containing P_m . Performing a gauge transformation and keeping only the first order terms, we obtain

$$J_i \circ 0_i + \quad /J^0 + < V_i + \quad ,$$

depuis $\mathcal{L}(\delta f)$ est du second ordre. Cependant, il faut remarquer qu'il peut exister plusieurs décompositions d'une même fonction, $f - f) \circ + \delta f a = f a \circ + \delta f a$. Dans ce cas, il existe un champ de vecteurs ζ tel que $f a = f a - \mathcal{L}_{\zeta} f a$ tel que

$$\delta f a \sim \delta f a = f a \circ 0_i - f a \circ 0_2 + ETC f a -$$

La variation δf sous changement de coordonnées est donc donnée par

On peut montrer que $T\mathcal{L}$ est parallèle à P_m donc cela ne dépend pas de la extension de f . Le calcul de ce terme (voir Réf. [21]) nous permet de montrer que sous transformation de jauge, la perturbation de la fonction de distribution se transforme en ² là où nous avons utilisé les notations du chapitre 5. Une manière plus intuitive d'obtenir ce résultat est pour rappeler, (6.101), que δf est fonction de (T, x^i, E, n^j) , d'où d'après (6.99), E est donné par $E = -N^k \hat{k}$ tel que

$$\delta f \longrightarrow \delta f + (\mathcal{H}T + n^i \partial_i T) E \frac{\partial \bar{f}}{\partial E},$$

(6.156)

$$E = a(1 + A)k^{\hat{u}}.$$

Sous une transformation de coordonnées de la forme $x^{\hat{u}} \longrightarrow x^a k^f$ se transforme comme (6.153). Nous iiférons que $E \longrightarrow \mathcal{L} - E r^{\hat{a}} d_i T$ de sorte que

$$S J^{\wedge} S f + T f' + E r f d_j r^j - \quad_{obi}$$

Le Boltzmann non perturbé (6.11 ), c'est-à-dire $Z[\bar{y}] = \hat{u}$, peut être utilisé pour exprimer $f' = T i - E d f / d E$ afin de retrouver le résultat précédent (6.156).

Nous pouvons donc définir une fonction de distribution invariante de jauge comme

$$F \equiv \delta f - [C + n^i \partial_i (E' - B)] E \frac{\partial \bar{f}}{\partial E},$$

(6.157)

où l'on souligne ici que E fait référence à la perturbation métrique dans le terme $(E' - B)$ et sinon à l'énergie. Le contraste de densité déduit de l'expression (6.157) est

$$y P E^3 d E d^2 n = 8 p_y + 4 C = p^{\wedge}.$$

² Attention ici puisque T ne correspond pas à la température mais au $v = 0$ comporte a (le champ vectoriel tel que défini au chapitre 5).

Ainsi, F correspond à la perturbation de la fonction de distribution dans la jauge de givrage plat. Nous aurions pu définir une autre fonction de distribution invariante de jauge en

$$d f \quad -T$$

$$F = F + *E^{\wedge =jr + fn-} (6158)$$

F correspond à la fonction de distribution dans la jauge newtonienne. Après intégration sur l'énergie, on obtient que $Slp = bl?$ — $4'Je'p$ γ . Les contrastes de température associés, définis dans (6.129), seront notés M (jauge à tranche plate et obtenue à partir de F) et 0 (jauge newtonienne et obtenue à partir de F). Ils sont liés par la relation $A4 = 0—4'$,

et satisfont les équations

$$\overline{A4' + n^k d_k M - (^3 > r^* n^* n^j + [n^* \& (\$ + 4 >) + (E^{\wedge} + D (nW)] , = C[A4]} \quad (6,159)$$

$$\begin{aligned} 0' + n^k d_k (Q + \$) - <^3 r' n^j &+ (Xj + \> (J \gg) nfo^j] \\ = C[0J. & \end{aligned} \quad (6.160)$$

Puisque les termes métriques ne dépendent pas de n , ces deux équations sont identiques, sauf le monopôle et le dipôle.

6.3.2.2 Équation de Boltzmann pour la température

Nous nous limitons temporairement à un espace-temps à sections spatiales fiat et nous concentrons sur les modes scalaires. Dans l'espace de Fourier, le Boltzmann (6.160) pour la température prend la forme

$$0' + iM\odot + <\dot{i}>) = 4-' + r' (\odot_0 - 0 + ikpV_b + \wedge n \gg_{nj} n^{*j}), \quad (6.161)$$

avec $f\dot{i} — kn/k$. On peut décomposer la partie radiale de $0(fc,p,p)$ en polynômes de Legendre comme

$$0(M,p) = \wedge (-i/foT.r)) / \gg^1. \quad (6.162)$$

Utilisation de la propriété des polynômes de Legendre

$$(\epsilon + 1)P_{+1}(p) = (2\ell + 1) {}_M P_{-} - \ell P_{-} i,$$

the term $ik\mu\Theta$ is rewritten as

$$k \sum_{\ell} \left(\frac{\ell + 1}{2\ell + 3} \Theta_{\ell+1} - \frac{\ell}{2\ell - 1} \Theta_{\ell-1} \right) (-i)^{\ell} P_{\ell}(\mu).$$

Remarquant alors que $4'' + r'0_0 — (4'' + r'\odot_0)P_0, iT'kf\dot{i}Vi, — -kV_b(-i)^j P_j$ et, d'après (6.132), $n^{\wedge}ninj/ l\dot{o} = (— i)^2 P2\&2/10$, l'équation de Boltzmann peut être décomposée en hiérarchie

$$\Theta'_0 = -\frac{k}{3}\Theta_1 + \Psi', \tag{6.163}$$
$$\Theta'_1 = k(\Theta_0 - \frac{2}{5}\Theta_2 + \Phi' - T^\wedge + eJ), \tag{6.164}$$
$$\Theta'_2 = k\left(\frac{2}{3}\Theta_1 - \frac{3}{7}\Theta_3\right) \tag{6.165}$$
$$\Theta'_\ell = k\left(\frac{\ell}{2\ell-1}\Theta_{\ell-1} - /As^6-\right) \tag{6.166}$$

Comme prévu, les perturbations de la métrique et de l'énergie-impulsion du baryon ne sont impliquées que dans les équations du monopôle et du dipôle. De plus, pour $t > 2$, le terme de collision se réduit à -r'ôf, comme prévu.

Avec ces conventions, les premiers multipôles de sont liés aux quantifications du fluide par

$$4\hat{O}_0 = <s'', \hat{O}! = -kv_7, e_2 = \tag{6.167}$$

Le facteur -k entre ©i et V_y est une conséquence de la relation (6.141). Les deux premières équations de la hiérarchie ne sont donc que les équations de continuité et d'Euler pour le rayonnement, comme toujours en théorie cinétique.

Or, pour les modes tensoriels, l'équation de Boltzmann se réduit à

$$\tag{6.168}$$

Décomposer E_{ij} comme $E_{ij} =$ [voir (6.141)], la hiérarchie de la partie tensorielle commence à $\ell = 2$, à savoir

$$\mathcal{E}_2 = -k^\wedge Q, - \tag{6.169}$$

$$\begin{matrix} JVP-i & W+1) ^2-4_n & \backslash, _n \\ 2^\wedge-1 \textcircled{R} ^\wedge-1 & 2^\wedge+3 & \circ r + J^{TOT} \end{matrix} \tag{6.170}$$

6.3.3 Diffusion de Thomson et polarisation

Dans la section précédente, nous avons supposé que le rayonnement n'était pas polarisé. Cependant, la diffusion Thomson tend à polariser le rayonnement dans la direction perpendiculaire au plan de diffusion, en particulier si le rayonnement est anisotrope avant sa diffusion. Il faut donc prendre en compte cette polarisation et déterminer son influence sur le terme de collision. Pour des études complémentaires sur la polarisation, nous recommandons les Réf. [22-26]. L'approche multipolaire est détaillée dans les réf. [3,27].

6-3-3.1 Paramètres Stokes

L'état de polarisation d'une onde électromagnétique est décrit en termes de paramètres de Stokes [28]. Le champ électrique de toute onde plane électromagnétique monochromatique qui se propage dans la direction $\vec{e}_3$ peut être décomposé comme

$$E(x, t) = E_0 \exp[ik(z - ct)] \begin{pmatrix} \cos \theta \exp[i\phi] \\ \sin \theta \exp[i\phi] \end{pmatrix} \quad (6.171)$$

Si $\theta = 0$, E_x et E_y ont la même phase et l'onde est polarisée linéairement. Son vecteur polarisation forme alors un angle tel que $\tan \alpha = E_y/E_x$ avec $\vec{e}_j$. Si E_y et E_x ont des phases différentes, l'onde est polarisée elliptiquement. Au lieu des deux amplitudes E_x et E_y , et des deux phases ϕ_x et ϕ_y , nous pouvons décrire cette onde avec les quatre paramètres de Stokes,

$$I = \langle E_x^2 + E_y^2 \rangle = I_0 \quad (6.172)$$

$$Q = \langle E_x^2 - E_y^2 \rangle = I \cos 2\theta \quad (6.173)$$

$$U = 2 \langle E_x E_y \cos(\phi_y - \phi_x) \rangle \quad (6.174)$$

$$V = 2 \langle E_x E_y \sin(\phi_y - \phi_x) \rangle \quad (6.175)$$

Ici les moyennes sont faites sur plusieurs périodes, en supposant que les amplitudes et les phases puissent varier dans le temps, mais lentement par rapport à la période $2\pi/\omega$ de l'onde. Seuls trois de ces paramètres sont indépendants puisqu'ils satisfont clairement la relation

$$I^2 = Q^2 + U^2 + V^2 \quad (6.176)$$

I est l'intensité totale de l'onde et le paramètre Q mesure la prévalence de la polarisation linéaire selon $\vec{e}_i$ par rapport à celle selon $\vec{e}_a$. U et V donnent des informations sur les phases. En exprimant l'onde (6.171) dans la base $(\vec{e}_j \pm \vec{e}_2)/\sqrt{2}$, alors $V = (a_+ - a_-)$. Ainsi, V représente la différence entre l'hélicité positive et négative qui s'intensifie.

Sous l'action d'une rotation d'angle du plan $(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$ autour de l'axe $\vec{e}_3$,

$$\vec{e}'_j = \cos \theta \vec{e}_j + \sin \theta \vec{e}_i, \quad \vec{e}'_i = -\sin \theta \vec{e}_j + \cos \theta \vec{e}_i,$$

I et V restent invariants tandis que Q et U se transforment comme

$$\begin{pmatrix} Q' \\ U' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ U \end{pmatrix} \quad (6.177)$$

De manière équivalente

V se transforme en 344 **Le fond cosmique des micro-ondes**

$$\begin{pmatrix} I' \\ V' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta \\ -\sin 2\theta & \sin 2\theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} \quad (6.178)$$

A partir de Q et $\mathbb{E}7$, on peut ainsi construire deux quantités qui se transforment en objet de spin 2 sous l'action de la rotation

$$(Q\pm iU)'(e_3) = \wedge(Q\pm iU)(e_3). \tag{6.179}$$

Puisque Q et U disparaissent dans l'espace-temps non perturbé, les $\}$ ' sont des quantités du premier ordre (invariantes de jauge) et elles évoluent sans couplage avec les perturbations métriques (puisque de tels termes seraient d'ordre 2). Leurs équations de Boltzmann prennent alors la forme

$$+n^l di \qquad -^{HE}T\ddot{E} \tag{6.180}$$

Here, we hâve neglected the curvature term that could easily be added. B y redefining the Stokes parameters as

$$\tag{6.181}$$

and using the évolution (6.126) for the brightness 7, we obtain the Liouville équation for the polarization

$$+n^l di \tag{6.182}$$

with

$$\hat{a}E. \tag{6.183}$$

6.3.3.2 Spherical harmonies of spin s

For any direction $\hat{\mathbb{E}}3$ defined by the two angles $(\#,\$)$, one can introduce a tangent basis on the sphere, $(\mathbf{e}^\wedge\mathbf{e}\text{-}\mathbf{i})$, defined up to a rotation. A function defined on the sphere is then said to be of spin s if it transforms as $\langle f \rangle = \mathbf{e}^{-1\langle s \wedge \wedge \rangle}(\mathbf{d}, \langle t \rangle)$ under a rotation of angle around the axis $\mathbf{e}_j$.

Any function of spin s on the sphere can be expanded in the basis of spherical harmonies of spin s [29], sY_{ir} », which satisfies the completeness and orthogonality relations

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} J_0 \tag{6.184}$$

$$\mathbb{E}\mathbb{A}.\langle \mathbf{M}\mathbf{X}(\mathbf{O}') = .5\mathbf{W}^* - \acute{e}m \tag{6.185}$$

A centra) property in the construction of these spherical harmonies is the existence of operators that can be used to increase $(c)^+$) or decrease $(c>^+)$ the spin of any fonction,

dans le sens où $\hat{a}_{\pm s}$ se transforme en $\sim e$ sous une rotation de angle θ . L'expression explicite de ces opérateurs est

$$\hat{a}_{\pm}(M) = -\sin^{\pm\theta} 0 \quad \text{pèches} / \quad \sin^{\pm} J(O). \quad (6.186)$$

En particulier, pour les fonctions de spin 2 qui satisfont $d^{\pm} [\pm 2/(12, \theta)] = \langle t \rangle$, ces les opérateurs réduisent à

$$(\hat{\sigma}')^2_{\pm i} / (f\theta < \mathcal{L}) = (-5 M \pm [(1-M^2) \pm 2/(M.\hat{\theta})]), \quad (6.187)$$

avec $p = \cos \theta$.

On peut alors définir les harmonies sphériques des spins à partir de l'action de ces opérateurs sur les harmonies sphériques (habituelles)

$$\langle 6188 \rangle$$

respectivement, pour $0 < s < f$ et $-(s < 0$. Ces fonctions satisfont aux conditions suivantes

$$\begin{aligned} d^{\pm}_i Y_{lm} &= \pm x / (fTs) (\hat{+} + l \pm s) \hat{a}_{\pm 1} T_{fr},, \\ d \sim d^+_s O u i_{lm} &= -(fs)(f+1+s) \hat{a}_{\pm 1} m. \end{aligned} \quad \begin{aligned} &= (-1)' (6.189) \\ &(6.190) \\ &(6.191) \end{aligned}$$

6.3.3.3 Modes E et B

Tout comme la température augmente à mesure que

$$\hat{O}(n) = \hat{a}_{2ae_{my}tm}(n), \quad (6.192)$$

le champ de polarisation peut être étendu comme

$$(\zeta \pm i f 7)(n) - a^{<* 2) \wedge \wedge (n) \quad (6.193)$$

= La relation (6.189) peut être utilisée pour exprimer ce dernier développement comme
(6.194)

... $(-2)'$, Nous avons donc pu construire des quantifications invariantes en rotation à partir des paramètres de Stokes au prix de l'action d'un opérateur non local. Les coefficients de ces développements sont donnés par

$$a_{lm} = y d^2 n Y_7 m(n) 6(n), \quad (6.195)$$

et

$$j_{lm}^{(\pm 2)} - I d^2 n_{\pm 2} Y_{lm}(Q \pm iU) = \sqrt{\frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!}} \int d^2 n Y_{\ell m}^*(n) (\partial^\mp)^2 (Q \pm iU)(n). \quad (6.196)$$

Une des difficultés introduites par ce développement vient du fait que les paramètres de Stokes ne sont pas invariants sous rotation. Donc si ces derniers sont facilement calculés pour un mode ℓ donné, ils doivent être recalculés dans un repère fixe lors de l'intégration sur k . Pour éviter ce problème, il convient de décomposer la polarisation comme

$$(Q \pm iU)(\mathbf{r}, \mathbf{a}, \mathbf{n}) = -\frac{1}{2} (\hat{\mathbf{f}}_{\ell m} \pm i \mathbf{B}_{\ell m}) \pm 2 Y_{\ell m}(n), \quad (6.197)$$

de sorte que

$$+ 4 m^2 | >$$

Le choix de la désignation E et B est lié aux propriétés de parité de ces grandeurs. (6.198)

Sous une réflexion par rapport au plan perpendiculaire à $\mathbf{f}$, Q reste inchangé et U

se transforme en $-U$. Les harmonies sphériques de spin s se transforment en $(-1)^s Y_{\ell m}$ sous cette opération, ce qui implique que $E_{\ell m}$ se transforme en $(-1)^s E_{\ell m}$, tandis que $B_{\ell m}$ se transforme en $(-1)^{s+1} B_{\ell m}$. Ainsi, E représente la partie scalaire (ou *électrique*) de la polarisation et B la partie pseudo-scalaire (ou *magnétique*). La figure 6.6 illustre des configurations de champs avec des modes purs E et B .

6.3.3.4 Relation avec les paramètres de Stokes

Pour mieux comprendre la relation entre les modes E et B et les paramètres de Stokes, il peut être utile de travailler dans la limite du ciel plat dans laquelle les coordonnées (θ, ϕ) sur la sphère sont remplacées par des coordonnées polaires (r, ϕ) avec $r = 2 \sin(\theta/2)$. Cela implique qu'on peut remplacer les indices (ℓ, m) par un vecteur bidimensionnel $\mathbf{\ell} = \ell \hat{\mathbf{e}}_\phi$ avec angle azimutal de sorte que

Dans cette limite, $Y_{\ell m}(n) \rightarrow \exp(rZ \cdot \mathbf{n})$ et $\pm 2 Y_{\ell m}(n) \rightarrow \exp(r\mathbf{\ell} \cdot \mathbf{n} \pm 2i\phi)$ afin que les champs de température et de polarisation puissent être étendus dans les modes de Fourier bidimensionnels

as

$$\Theta(\mathbf{n}) = \int \frac{d^2 \ell}{2\pi} \Theta(\ell) e^{i\mathbf{\ell} \cdot \mathbf{n}}, \quad (6.199)$$

$$(Q \pm iU)(\mathbf{n}) = - \int \frac{d^2 \ell}{2\pi} [E(\ell) \pm iB(\ell)] \frac{1}{\ell^2} (\partial^\pm)^2 e^{i\mathbf{\ell} \cdot \mathbf{n}}. \quad (6.200)$$

In the small angle limit, (6.186) implies that

$$(\partial^\pm)^2 e^{i\mathbf{\ell} \cdot \mathbf{n}} = -\frac{(\ell_x \pm \ell_y)^2}{\ell^2} e^{\mp 2i\phi} e^{i\mathbf{\ell} \cdot \mathbf{n}} = -\ell^2 e^{\pm 2i(\phi - \phi)} e^{i\mathbf{\ell} \cdot \mathbf{n}}.$$

The previous expressions have been derived in the natural spherical basis $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi)$ but in the small angle limit, one can define a fixed basis in the plane perpendicular

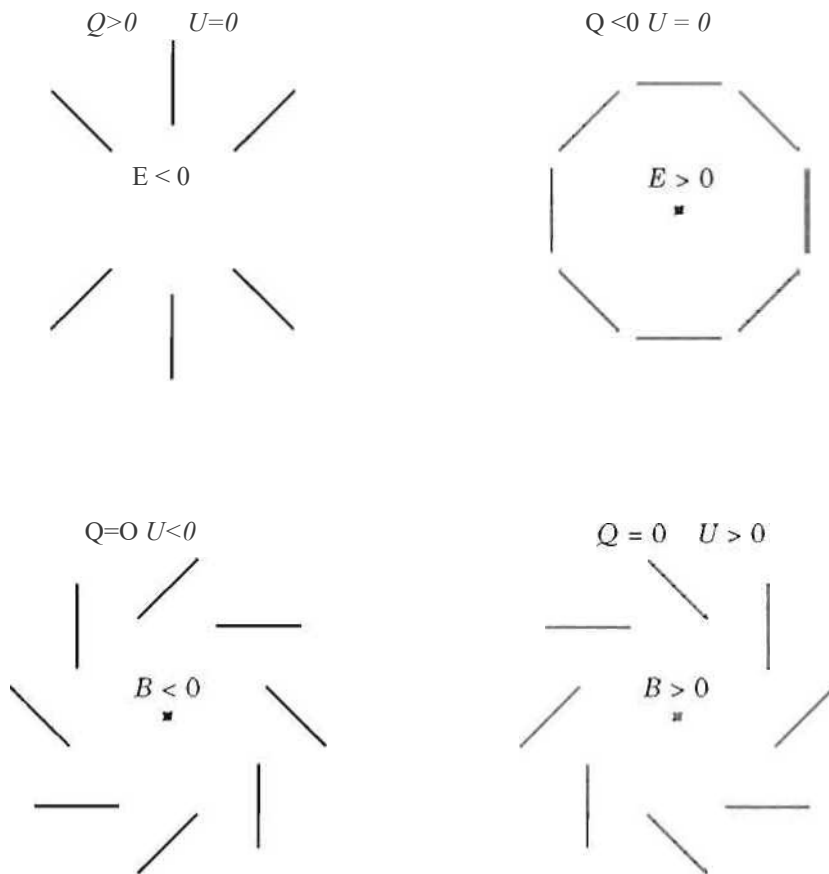


Fig. 6.6 Les chiffres de polarisation correspondent à E ou B pur modes en un point donné, choisi comme centre. Les barres donnent l'orientation de la polarisation au centre du segment et donnent ainsi une représentation simple des paramètres de Stokes. Ces configurations se répètent à l'identique à l'infini. Les composantes E et B étant non locales, il faut considérer la configuration du champ de polarisation al) autour du point pour déterminer ces deux composantes. On récupère les propriétés de parité des deux composantes, les deux configurations du haut (modes E) restent inchangées sous une telle transformation, tandis que les deux configurations du bas (modes B) sont échangées.

à la verticale locale, z . Les paramètres de Stokes dans les deux systèmes de coordonnées sont lié par $(Q \pm iU)' = e^{\pm 2i\alpha} (Q \pm iU)$ de sorte que, dans ce cadre,

$$Q(n) = \text{oui} \quad \text{TT} \quad [\mathcal{F}(\mathcal{f}) \cos 2\langle \mathcal{f} - B(\mathcal{f}) \sin 2\langle \mathcal{f} \rangle^n, 2 \quad (6.201)$$

$$L/(n) = \text{oui} \quad - [\mathcal{f}(\mathcal{f}) \sin \quad - B(\mathcal{f}) \cos 2\langle \mathcal{f} \rangle J \quad (6.202)$$

Depuis

$$\cos 2\langle j \rangle_e = \dots, \text{ et } \sin 2^\wedge = 2^\wedge/^\wedge, \quad (6.203)$$

les expressions précédentes prennent le fûim

$$A\mathfrak{f} = (\wedge - \dots + 2\hat{a}_z d_y B \text{ et } AB = (\acute{e}\mathfrak{f} - \dots - 2\hat{o}_x d_v Q > \quad (6.204)$$

dans l'espace réel. Les variables $\mathfrak{f}$ et B sont donc non locales. Cette it.y non locale, héritée de (6.194), vient du fait que la relation entre les harmonies sphériques de spin 0 et de spin 2 est également non locale.

6.3.3.5 Expansion de la température et de la polarisation

L'analyse des sections précédentes montre que la température de rayonnement $6(77, x, n)$ en un point x se propageant dans la direction n peut être étendue sur la base $Gg^\wedge x^\wedge n$ définie par

$$Glm_{(x,n)} = \dots \quad (6.205)$$

et que la polarisation maintenue peut être élargie sur la base

$$\pm_2 Gem_{(x,n)} = \dots \quad (6.206)$$

Nous élargissons donc la partie spatiale de $\hat{O}$ et $(Q \pm iU)$ sur la base d'exponentielles complexes et leur partie angulaire sur la base d'harmonies sphériques de spin approprié

$$0(7), x, n) \blacksquare = y (2^\wedge)^\wedge 52 \dots n), \quad (6.207)$$

$$(Q \pm iU)(r^\dagger_s x, n) = y \dots \pm sC^\wedge_m(x_1 n). \quad (6.208)$$

Le lemme de Stewart-Walker implique que les variables $\mathfrak{f}^\wedge ?$ et sont en variante de jauge.

6.3.3.6 Section efficace de diffusion

La section efficace de diffusion de Thomson pour une onde incidente à polarisation linéaire diffusée vers une onde sortante à polarisation linéaire $\mathfrak{f}^{\hat{o}n}L$ est

$$\dots, \mathfrak{f}^\wedge \cdot m$$

(voir Réf. [30]). Il est pratique d'introduire les intensifs partiels

$$= \dots UNE = \dots \quad (6.210)$$

Une onde entrante diffusée selon un angle $\hat{o}$ dans le plan $(nE^\wedge)$ (Fig. 6.7) a des intensités sortantes

$$I_1^{\text{out}} = \frac{3\sigma_T}{8\pi} \quad I_2^{\text{out}} = \frac{3\sigma_T}{8\pi} \cos^2 \theta I_2^{\text{in}} \quad (6.211)$$

ce qui, en termes de paramètres de Stokes, se traduit par

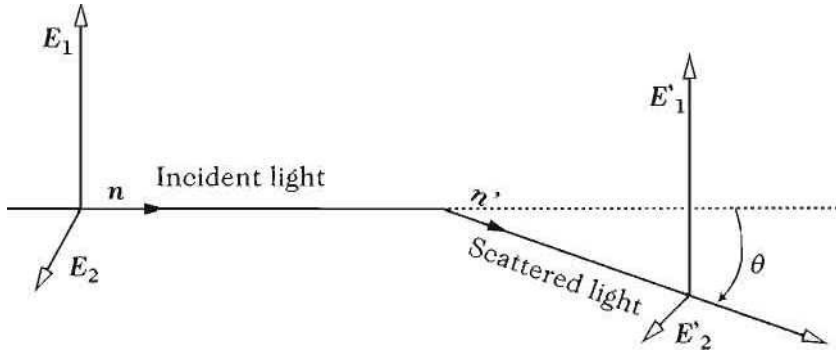


Fig. 6.7 Geometry of the Thomson scattering in the électron proper frame. An incident photon in the direction n is deflected by an angle θ and comes out in the direction n' .

$$I_1^{\text{out}} = \frac{3\sigma_T}{8\pi} (1 + \cos^2 \theta) I_1^{\text{in}} \quad I_2^{\text{out}} = \frac{3\sigma_T}{8\pi} \cos^2 \theta I_2^{\text{in}} \quad (6.212)$$

Under a rotation, (Q, U) transforms as (6.177). To détermine the cross-section of an initial state (J^n, Q^n, U^n) propagating in the direction n scattered into a final state $(J^{\text{out}}, Q^{\text{out}}, U^{\text{out}})$ that propagates in the direction n' , we perform the following operations, using the plane (y, z) as reference plane, (see Fig 6.8 for a définition of the angles and the vectors and Ref. [30] for details).

1. We perform a rotation around n to bring the plane (n, n') into the plane (n, z) , which translates into a rotation (6.177) with $\langle j \rangle = a$ for the Stokes parameters.
2. We perform a rotation around the axis z to bring the new plane (n, n') into the reference plane (y, z) . This operation does not influence the Stokes parameters.
3. We can then use the relations (6.212).
4. We perform a rotation around the axis z to bring the scattering plane back to the old plane (z, n') . Again, this operation does not affect the Stokes parameters.
5. Finally, we perform a rotation around n' to recover the initial position, which translates into a rotation (6.177) with $\langle j \rangle = a'$ for the Stokes parameters.

Omitting the parameter V that découplés from the other polarizations and remains zéro if it was initially, the previous procedure allows us to relate the outgoing Stokes parameters to their incoming values

$$\begin{pmatrix} I_1^{\text{out}} \\ I_2^{\text{out}} \\ U^{\text{out}} \end{pmatrix} = \frac{3\sigma_T}{4\pi} \mathcal{P} \begin{pmatrix} I_1^{\text{in}} \\ I_2^{\text{in}} \\ U^{\text{in}} \end{pmatrix} \quad (6.213)$$

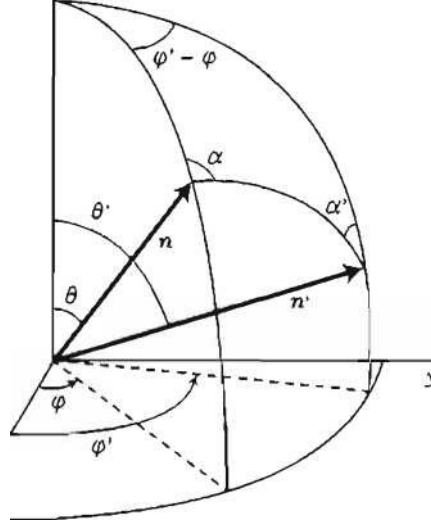


Fig. 6-8 Définition des angles et vecteurs impliqués dans la diffusion de Thomson.
The matrix $\mathcal{P}$ can be decomposed as

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}^{(0)} + \sqrt{(1 - \mu^2)(1 - \mu'^2)} \mathcal{P}^{(1)} + \mathcal{P}^{(2)}, \quad (6.214)$$

with

$$\mathcal{P}^{(0)} = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 2(1 - \mu^2)(1 - \mu'^2) + \mu^2 \mu'^2 & \mu^2 & 0 \\ \mu'^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.215)$$

$$\mathcal{P}^{(1)} = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 4\mu\mu' \cos \delta & 0 & 2\mu \sin \delta \\ 0 & 0 & 0 \\ -4\mu' \sin \delta & 0 & 2 \cos \delta \end{pmatrix}, \quad (6.216)$$

$$\mathcal{P}^{(2)} = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} \mu^2 \mu'^2 \cos 2\delta & -\mu^2 \cos 2\delta & \mu^2 \mu' \sin 2\delta \\ -\mu'^2 \cos 2\delta & \cos 2\delta & -\mu' \sin 2\delta \\ -2\mu \mu'^2 \sin 2\delta & 2\mu \sin 2\delta & 2\mu \mu' \cos 2\delta \end{pmatrix}, \quad (6.217)$$

with $\delta = \varphi' - \varphi$. We then have access to the Stokes parameters by performing the rotation

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ U \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J \\ Q \\ U \end{pmatrix}. \quad (6.218)$$

For each polarization, the collision term is given, in the rest-frame of the baryons, by

$$C^{(\lambda)} = \sigma_T n_e \left[\int f^{(\lambda')}(\mathbf{E}', \mathbf{n}') \mathcal{P}_{\lambda'}^{\lambda}(\mathbf{n}, \mathbf{n}') \frac{d^2 \mathbf{n}'}{4\pi} - f^{(\lambda)}(\mathbf{E}', \mathbf{n}) \right], \quad (6.219)$$

où $P^*(n, n')$ correspond au bloc 2×2 de P correspondant à (l_y, l_z) . Cette expression généralise (6.144).

Ce terme de collision peut être étendu sur la base des harmoniques (6.205) et (6.206). Pour cela, il convient d'introduire le vecteur $T = (\hat{\theta}, Q + zU, Q - i\hat{u})$. On peut alors montrer (ce que nous ne démontrons pas ici, voir Réf. [31]) que le terme de collision prend la forme

$$C[T] = \tau' \left[-T + (\Theta_u + n_i V_b^i) + \frac{1}{10} \sum_{m=-2}^2 \int P^{(m)}(n, n') T(n') d^2 n' \right]. \quad (6.220)$$

Le terme $P^{(m)}$ déduit de (6.214)-(6.218) et prend la forme

$$\begin{aligned} Y_{lm}(n') &= \frac{1}{2} \left[Y_{lm}(n) + (-1)^m Y_{lm}^*(n) \right] \\ -\frac{1}{2} \frac{Y_{lm}(n')}{Y_{lm}(n)} &= \frac{1}{2} \left[\frac{Y_{lm}(n')}{Y_{lm}(n)} + (-1)^m \frac{Y_{lm}^*(n')}{Y_{lm}^*(n)} \right] \\ -\frac{1}{2} \frac{Y_{lm}(n')}{Y_{lm}(n)} &= \frac{1}{2} \left[\frac{Y_{lm}(n')}{Y_{lm}(n)} + (-1)^m \frac{Y_{lm}^*(n')}{Y_{lm}^*(n)} \right] \\ -\frac{1}{2} \frac{Y_{lm}(n')}{Y_{lm}(n)} &= \frac{1}{2} \left[\frac{Y_{lm}(n')}{Y_{lm}(n)} + (-1)^m \frac{Y_{lm}^*(n')}{Y_{lm}^*(n)} \right] \end{aligned} \quad (6.221)$$

Notons que si l'on se limite à la température, cette expression se réduit à (6.151).

6.3 3 7 Origine de la polarisation du fond cosmique des micro-ondes

Les propriétés de la diffusion de Thomson que nous venons de décrire permettent de comprendre d'un point de vue heuristique l'origine de la polarisation du fond diffus cosmologique (Fig. 6.9).

Un mode se propageant selon la direction x a une polarisation dans le plan (y, z) . Si une onde initialement non polarisée est diffusée dans la direction z , l'onde sortante finit par être polarisée linéairement dans la direction y . Cependant, si l'on considère les ondes incidentes provenant de toutes les directions, alors l'isotropie statistique implique que l'onde sortante n'est pas polarisée (en moyenne), voir Fig. 6.9a.

Si initialement le rayonnement présente une anisotropie dipolaire, la polarisation selon y des ondes se propageant dans les directions x et $-x$ a en moyenne la même amplitude que la polarisation selon x des ondes se propageant dans les directions y de sorte que l'onde sortante selon z n'est, encore une fois, pas polarisée (en moyenne), voir Fig. 6.9b.

Pour produire une onde sortante polarisée, le rayonnement doit avoir un quadripôle non nul (voir Fig. 6.9c). Les zones chaudes et froides sont alors dans des directions orthogonales par rapport au point de diffusion.

Cela implique que la polarisation du fond diffus cosmologique sera plus faible que les anisotropies de température. En effet, la diffusion Thomson, à l'origine de cette polarisation, n'est efficace que lorsque l'Univers est ionisé. A cette époque, les photons et les baryons sont fortement couplés de sorte que le quadripôle du rayonnement est très faible. Pour les modes scalaires, l'amplitude de polarisation aux échelles super-Hubble (c'est-à-dire pour les multipôles inférieurs à la position du premier pic Doppler) doit donc être fortement amortie. Le champ de polarisation présentera en outre les mêmes pics acoustiques que ceux

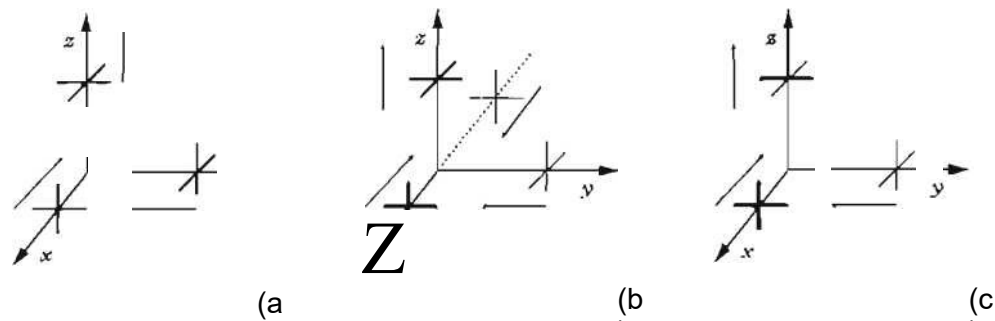


Fig. 6.9 (a) L'isotropie implique que la diffusion Thomson ne génère aucune polarisation. Les amplitudes de polarisation des ondes se propageant dans les directions x et y sont égales. La polarisation de l'onde sortante emporte la composante $i/$ de l'onde entrante qui se propage selon x et la composante i de l'onde entrante se propageant selon y , qui ont la même amplitude, (b) Cas d'anisotropie dipolaire : la polarisation de l'onde sortante est la somme des composantes $\wedge$ des ondes entrantes se propageant le long de x (venant d'une zone chaude) et --- x (venant d'une zone froide) qui, en moyenne, a la même amplitude que l'onde x -composantes de l'onde entrante se propageant selon y . Elle est donc également non polarisée. (c) Cas d'une anisotropie quadripolaire : l'onde sortante a une polarisation selon y , héritée de l'onde entrante selon x qui provient d'une région chaude, plus grande que celle le long de x , hérité de l'onde entrante le long de y qui provient d'une région froide.

pour le spectre de température mais, du fait de l'origine quadripolaire, la position des pics sera déphasée. D'un autre côté, les ondes gravitationnelles primordiales qui possèdent intrinsèquement une anisotropie quadripolaire, même à des échelles super-Hubble, peuvent générer des champs de polarisation, même à de grandes échelles angulaires.

6.3 3.8 Hiérarchie de température et de polarisation

Choisir la direction le long de la direction fc nous permet d'exprimer le terme de gradient comme

$$\bullet rfdi \longrightarrow in'k^{\wedge} - \underset{VO}{iJ^{\wedge} \sim kY \setminus o\{n\}}.$$

Ce terme multipliera la dépendance angulaire de la température et de la polarisation . Ceci introduit des termes de la forme $Y^{\wedge}QY^{\wedge}$ et $Y^{\wedge}Q^{\wedge}Y^{\wedge}$ qui sont exprimés sous la forme

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{10} s Y_{\ell m} &= \frac{s \kappa_{\ell}^m}{\sqrt{(2\ell+1)(2\ell-1)}} s Y_{\ell-1 m} - \frac{ms}{\ell(\ell+1)} s Y_{\ell m} \\ &+ \frac{s \kappa_{\ell+1}^m}{\sqrt{(2\ell+1)(2\ell+3)}} s Y_{\ell+1 m}, \end{aligned} \quad (6.222)$$

with

$$s \kappa_{\ell}^{\ell} \equiv \sqrt{\frac{(\ell^2 - m^2)(\ell^2 - s^2)}{\ell^2}}. \quad (6.223)$$

La forme explicite de l'équation de Boltzmann découle directement de cette décomposition pour donner

$$\Theta_{\ell}^{(m)'} = k \left[\frac{0\kappa_{\ell}^m}{(2\ell-1)} \Theta_{\ell-1}^{(m)} - \frac{0\kappa_{\ell+1}^m}{(2\ell+3)} \Theta_{\ell+1}^{(m)} \right] - \tau' \Theta_{\ell}^{(m)} + S_{\ell}^{(m)}, \quad (6.224)$$

$$E_{\ell}^{(m)'} = k \left[\frac{2\kappa_{\ell}^m}{(2\ell-1)} E_{\ell-1}^{(m)} - \frac{2m}{\ell(\ell+1)} B_{\ell}^{(m)} - \frac{2\kappa_{\ell+1}^m}{(2\ell+3)} E_{\ell+1}^{(m)} \right] - \tau' \left[E_{\ell}^{(m)} + \sqrt{6} P^{(m)} \delta_{\ell,2} \right], \quad (6.225)$$

$$B_{\ell}^{(m)'} = k \left[\frac{2\kappa_{\ell}^m}{(2\ell-1)} B_{\ell-1}^{(m)} + \frac{2m}{\ell(\ell+1)} E_{\ell}^{(m)} - \frac{2\kappa_{\ell+1}^m}{(2\ell+3)} B_{\ell+1}^{(m)} \right] - \tau' B_{\ell}^{(m)}. \quad (6.226)$$

The source terms are given by

$$\begin{aligned} S_0^{(0)} &= \tau' \Theta_0^{(0)} + \Psi, & S_1^{(0)} &= -k\tau' V_b + k\Phi, & S_2^{(0)} &= \tau' P^{(0)}, \\ S_1^{(1)} &= -\tau' V_b^{(1)}, & S_2^{(1)} &= \tau' P^{(1)} + \frac{k}{\sqrt{3}} \Phi^{(1)}, & S_2^{(2)} &= \tau' P^{(2)} - H^{(2)'}, \end{aligned} \quad (6.227)$$

if the Fourier coefficients of the vector and tensor perturbations are expanded as

$$\bar{\Phi}_i = -\frac{i}{\sqrt{2}} \sum_{m=\pm 1} e_i^{\pm} \Phi^{(m)}, \quad \bar{E}_{ij} = -\sqrt{\frac{3}{8}} \sum_{m=\pm 2} e_i^{\pm} \otimes e_j^{\pm} H^{(m)}. \quad (6.228)$$

Le terme $P^{\wedge}$ qui reflète la nature anisotrope de la diffusion Compton est donné, (6.229)

et ne comprend que le quadripôle de la température et de la polarisation E .

Remarquons que la source de polarisation, $P^{(n)}$ n'entre dans l'équation d'évolution que pour le quadripôle de E . Les équations de température sont à comparer avec celles [(6.163) et (6.166)] obtenues en négligeant la polarisation. Il n'est pas nécessaire de résoudre ces équations pour $|m|$ et $-|m|$. Par symétrie, $B^{\wedge} = 0$, pour toute source. Cet ensemble d'équations remplace les équations fluides d'évolution pour le rayonnement. Les autres équations restent inchangées. Pour les neutrinos, on peut utiliser des équations similaires avec $T' = \hat{u}$.

Notez que dans la limite des longueurs d'onde courtes ($k \gg P$), les équations d'évolution pour un mode scalaire impliquent que

$$E^{\wedge j} = -V\delta P^{(Q)} |P^{(0)}| =$$

et

$$\langle \langle \rangle \rangle' = \quad (6.230)$$

En utilisant ces relations (6.167), on obtient

$$k l_{r-1,0}(0) - A^{\nu n} - \delta^{0, n} \quad (6.231)$$

qui est la relation que nous avons utilisée dans l'étude de l'amortissement Silk [voir Section 6-2.3].

6. 3.3.9 Spectres de puissance,

Avec les extensions précédentes, le spectre de puissance est donné par

$$(6.232)$$

où X et Z prennent les valeurs δ , $\vec{E}$ ou B . La figure 6.10 illustre les quatre spectres non-disparus qui peuvent être calculés.

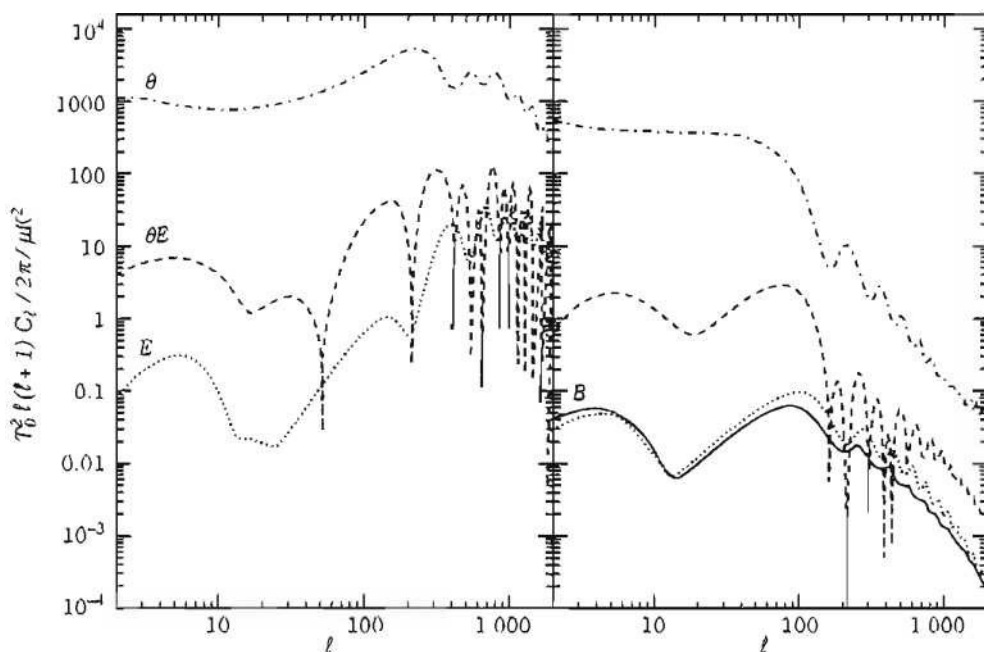


Fig. 6.10 The four spectra δ - δ , δ - E , E - E and B - B induced by scalar (left) and tensor (right) modes of an inflationary mode. As stressed earlier, the spectrum B - B is only generated by tensor modes and the E - B spectrum vanishes by symmetry.

L'intégration numérique de la hiérarchie Boltzmann peut en principe être utilisée pour déterminer les spectres de puissance. Historiquement, ce fut la première méthode utilisée pour résoudre ce problème et cela revient à faire évoluer la fonction de distribution des photons tout au long de l'histoire du Univers. Techniquement, cette approche n'est pas très bonne car il faut résoudre

a large number of coupled differential equations, typically of the order of ℓ for a large number of values k (typically of the order of a thousand in an interval $k r_j n \in [f_{\min}/10, 2^{\wedge}_{\max}]$). One should also carefully control the way the hierarchy is truncated to avoid any (unphysical) reflection of the power towards the lower multipoles.

6.3.4 Numerical integration

6.3.4.1 Radial modes

It is useful to rewrite the expression for the functions ${}_a G_{\ell m}$ by expanding the complex exponentials into spherical harmonics thanks to the relation (B.20)

$$\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = \sum_{\ell} \sqrt{4\pi(2\ell+1)} j_{\ell}(kr) Y_{\ell}^0(\mathbf{n}),$$

with $e_3 = k/k$ and $\mathbf{x} = -r\mathbf{n}$. The sign convention is such that $\mathbf{n}$ corresponds to the direction of propagation of the radiation toward the observer, i.e. opposite to the direction of observation. Using the recursion relations (B.46) between the spherical Bessel functions, we can rewrite the functions ${}_s G_{\ell m}$ as

$$G_{\ell m} = \sum_{\ell'} J_2(-i) \sqrt{4\pi(2\ell'+1)} j_{\ell'}^{(m)}(kr) r_{\ell m}(\mathbf{n}), \quad (6.233)$$

and

$$\pm 2 < \ell \leq 2m = \frac{[4^m(kr) \pm i 0^{<m}(*r)]}{e} {}_{\pm 2} Y_{\ell m}(\mathbf{n}) \quad (6.234)$$

The functions $j_{\ell}^{(m)}$, $C_{\ell}^{(m)}$ and θ^{ℓ} are then explicitly given by

$$\begin{aligned} j_{\ell}^{(00)} &= j_{\ell}, & j_{\ell}^{(10)} &= j'_{\ell}, & j_{\ell}^{(20)} &= (3j_{\ell} + j_{\ell+2})/2, \\ j_{\ell}^{(11)} &= \sqrt{\frac{\ell(\ell+1)}{2}} r, & j_{\ell}^{(21)} &= \frac{3j_{\ell} - j_{\ell+2}}{2}, & j_{\ell}^{(21)} &= \frac{3j_{\ell} - j_{\ell+2}}{2}, \\ & & & & j_{\ell}^{(21)} &= \frac{3(j_{\ell} + 2)j_{\ell}}{2} \end{aligned}$$

and

$$\theta_{\ell}^{(0)} = \frac{1}{3\ell+2} \quad (6.236)$$

$$(D_x/(\ell-1)(\ell+2)) \langle M \rangle \ll \quad (6.237)$$

$$Z^{<0*} = 0, \quad \text{---} > (\text{---} \dot{A} + i^{?+2} A_{+4} \hat{a}), \quad (6.238)$$

$$\frac{x/(\ell-1)^{\ell+2}}{\ell^{\ell+2}} \quad (6.239)$$

$$(6.240)$$

$$(6.241)$$

Moreover, these functions satisfy $\theta^{\ell} = e, \theta^{\ell+1}$ and θ^{ℓ}

extraire les coefficients.

Dans le cas des modèles inflationnistes, les champs stochastiques ae^{TM} ont des statistiques presque gaussiennes, ce qui signifie que leur fonction de distribution de probabilité en un point est

$$p(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{a^2}{2}\right) \quad (6.249)$$

V_f étant la somme du carré de $2\ell + 1$ variables gaussiennes aléatoires indépendantes de même variance, sa fonction de distribution de probabilité suit une distribution χ^2 à $2\ell + 1$ degrés de liberté, soit

$$\frac{t^2}{2} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$$

Nous en déduisons la fonction de distribution de probabilité de C_ℓ ,

$$(s) \quad (6.251)$$

Lorsque $\ell \rightarrow \infty$, le théorème central limite assure que cette distribution devient gaussienne et que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C_\ell = C_e \quad (6.252)$$

L'estimateur est alors dit *cohérent*. Puisque $\langle C_\ell \rangle = C_e$, d'après (6.22), cet estimateur n'est pas *biaisé*. Sa variance peut également être calculée et on obtient

$$\langle C_\ell^2 \rangle - \langle C_\ell \rangle^2 =$$

C_e est le meilleur estimateur de C_e que l'on puisse construire puisque sa variance est la plus petite que l'on puisse espérer obtenir en estimant C_e . L'efficacité de l'estimateur est limitée par le fait que, pour un multipôle donné, il n'existe que $2\ell + 1$ modes indépendants et

$$\frac{\langle \hat{C}_\ell^2 \rangle - \langle \hat{C}_\ell \rangle^2}{C_e^2} = \frac{2}{2\ell + 1} \quad (6.253)$$

Cette variance de Cosmologie constitue une limitation statistique inévitable et est principalement importante pour les petits multipôles.

En conclusion, aucune propriété statistique du de^{TM} sont directement accessibles depuis les observations. Pour comparer les prédictions aux observations, il faut construire des estimateurs en sommant sur l' ae^{TM} . Dans le cas où les perturbations primordiales ne suivent pas les statistiques gaussiennes, la construction d'un bon estimateur (impartial et optimal) est beaucoup plus difficile. En particulier, la fonction de corrélation à deux points ne caractérise pas complètement la distribution.

6.4.0-6 Statut des observations

La mesure des anisotropies du fond diffus cosmologique a connu une révolution au cours des dernières décennies et nous nous référons aux réf. [38-40] pour une présentation détaillée de ces observations.

La première révolution a été réalisée par l'expérience DMR à bord du satellite COBE (COsmic Background Explorer) qui a mesuré pour la première fois les anisotropies de température du fond diffus cosmologique jusqu'à un multipôle de l'ordre de $C \sim 20$, correspondant à une échelle angulaire $\theta > 7$ deg. Comme l'illustre la figure 6.11, l'état de l'art a rapidement évolué au cours des dix dernières années. En 1997, les observations de COBE at small (et les résultats de diverses expériences au sol n'ont pas permis de discriminer deux modèles d'essai . Dès 1998, les résultats des expériences avec ballons BOOMERanG et MAXIMA ont permis de détecter le d'abord puis le deuxième pic, qui a ensuite été confirmé par le ballon Archeops. Depuis 2003, les observations du satellite WMAP donnent une bonne mesure du spectre de puissance angulaire en température jusqu'à ~ 1000 . La figure 6.11 résume la complémentarité de ces expériences.

Les expériences d'observation du fond diffus cosmologique peuvent être classées en trois catégories.

1. Des expériences au sol mesurent les anisotropies de température à petite échelle, principalement par interférométrie (DASI [41], CAT [42], VLA [43], CBI par exemple). Ces observations doivent être réalisées en altitude ou sur des sites très secs. Leur principal problème réside dans les fluctuations atmosphériques.
2. Les expériences en ballon sont embarquées à bord de ballons volant à une altitude d'environ 40 km, ce qui réduit les problèmes liés à l'atmosphère terrestre. Ces expériences sont cependant limitées en poids et ne peuvent pas être facilement manipulées pendant le vol qui dure d'une dizaine d'heures à dix jours. L'amélioration par rapport aux expériences au sol est cependant importante et les ballons ont été à l'avant-garde des avancées en matière d'observation avant le WMAP (BOOMERang [44], MAXIMA [45] et Archeops [46], par exemple).
3. Les expériences satellitaires permettent de réaliser un relevé complet du ciel mais cette solution est coûteuse. Seules deux expériences de ce type ont été menées (COBE [47] et WMAP [48]) et une troisième, Planck [49], devrait être lancée en 2009.

La révolution dans ce domaine a été menée par le satellite WMAP, qui a mesuré les anisotropies du fond diffus cosmologique dans cinq bandes de fréquences (22, 30, 40, 60 et 90 GHz). Parmi les nombreux résultats [50] des trois années d'observation, on peut noter :

- la réalisation d'une carte des anisotropies de température avec une résolution de 0,3 deg (Fig. 6.12) qui donne accès au spectre de puissance angulaire jusqu'à ~ 1000 .
- une confirmation de l'existence du premier pic acoustique, dont la position est désormais mesurée avec précision [51]

$$\ell_{(1)} = 220,8 \pm 0,7, \quad (6.254)$$

avec une amplitude de $74,7 \pm 0,5$ pK. Le deuxième pic est situé à $\sim 530,9 \pm 3,8$ et a une amplitude de $48,8 \pm 0,9$ pK. Les premier et deuxième creux sont situés respectivement à $\sim 412,4 \pm 1,9$ et $\ell_{(2)} = 675,2 \pm 11$.

- une mesure du spectre de corrélation croisée entre la température et la polarisation E (Fig. 6.11). Le spectre a un antipic à $\ell = 137 \pm 9$ et un pic à $\ell = 329 \pm 19$. L'existence de cette anticorrélation fournit une nouvelle, même

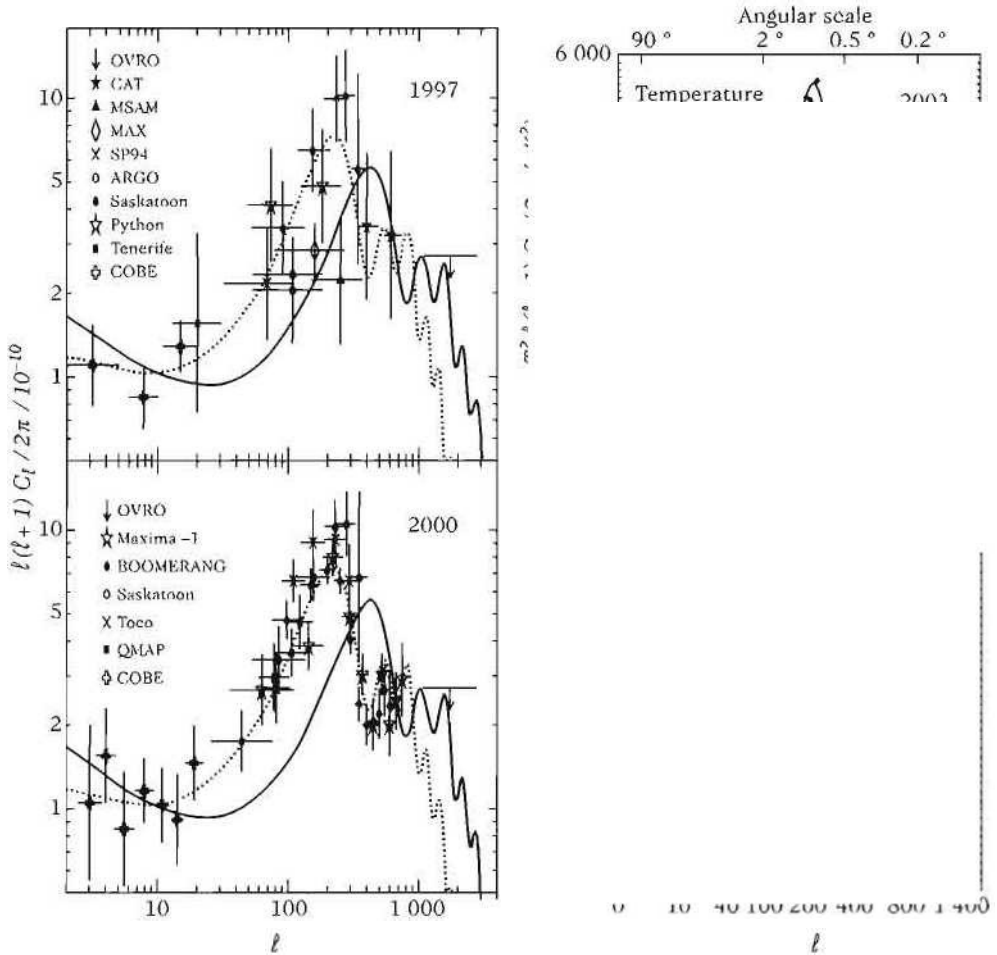


Fig. 6.11 Evolution of the observational status between 1997 and 2003 (left) The solid line curve represents the best-fit Λ CDM model, whereas an open model ($\Omega_0 = 0.3$, dotted line) is now excluded by observations, (right): The power spectra for the temperature and the temperature-E polarization cross-correlation obtained by the WMAP satellite.

plus robuste, preuve de l'existence de fluctuations super-Hubble au moment du découplage, puisque seul le plateau de Sachs-Wolfe du spectre de puissance et de température aurait pu être généré le long de la ligne de visée après découplage (comme, par exemple, dans les modèles de défauts topologiques). Le signe de la corrélation croisée et la phase des oscillations acoustiques par rapport à celui du spectre température-puissance sont des indications fortes en faveur de perturbations primordiales adiabatiques.

- la corrélation croisée du QE à grande échelle ($l < 20$) s'explique par une réionisation précoce de l'Univers, à un redshift de $z_{re} = 11.07 \pm 0.03$, ce qui donne une profondeur optique de $\tau_e = 0.089 \pm 0.03$.

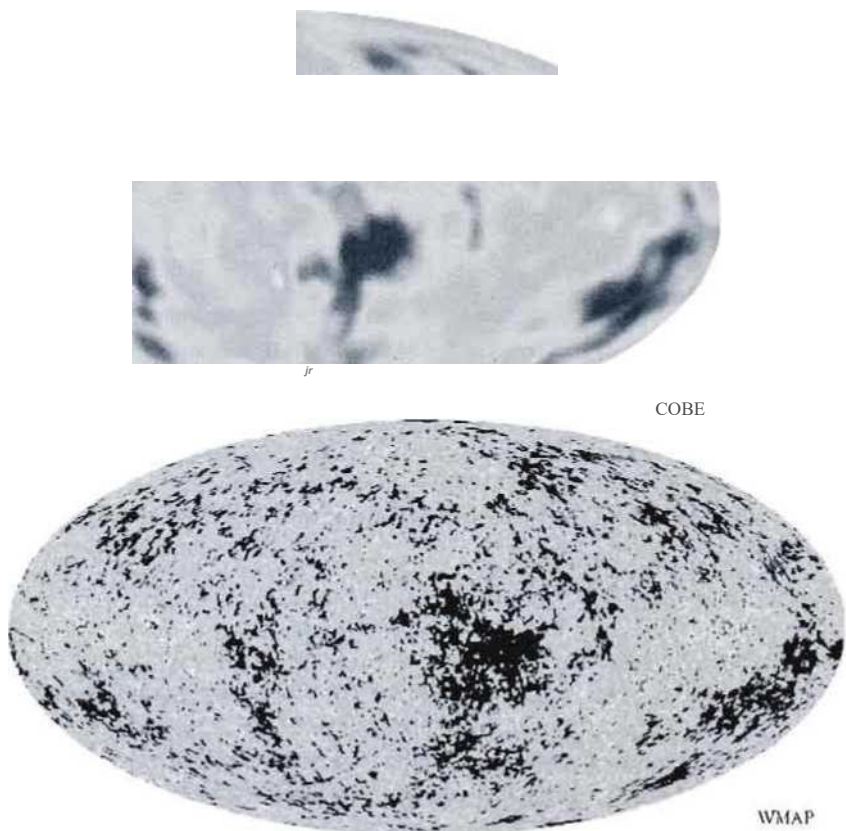


Fig. 6.12 Carte des anisotropies du fond diffus cosmologique fournie par WMAP par rapport à la résolution du satellite COBE. (Collaboration WMAP, 2003).

— La corrélation EE a été détectée à un niveau de

$$\frac{\Delta 4}{27\pi} C_{l}^{EE} = (0,086 \pm 0,029)(\text{gK})^2$$

pour $l = 2 - 6$. Ceci est interprété comme la rediffusion des photons de fond cosmiques des micro-ondes lors de la réionisation.

— Aucune preuve de modes B n'a été observée. donc limitant

$$b_{\text{cf}} = (-0,04 \pm 0,03)(\text{pK})^2$$

pour $l = 2 - 6$.

— De ces observations, on peut déduire que le champ de température est presque gaussien, comme le prédit l'inflation, mais cette question mérite une attention particulière.

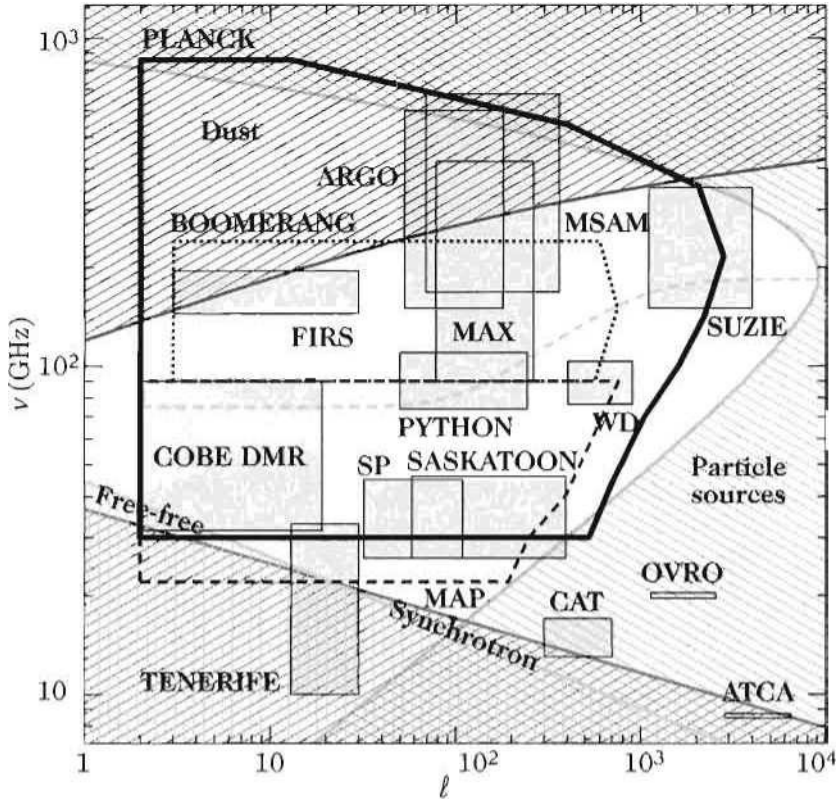


Fig. 6.13 Résumé des sensibilités angulaires et fréquentielles de diverses expériences d'observation du fond cosmique micro-ondes. Les zones hachurées correspondent aux régions où les émissions de premier plan dépassent 20 pK dans les 20% les plus propres du ciel. De la Réf. [53].

Après WMAP, la cosmologie dispose d'un nouveau modèle standard, *le modèle le mieux adapté* (ou *modèle concordance*), qui est un modèle Λ CDM avec $\sim 0,7$. Même si les observations sont compatibles avec les prédictions d'inflation ; quelques points obscurs persistent :

- WMAP a confirmé le fait que le quadripôle avait moins de puissance que prévu, comme l'a déjà souligné COBE.
- L'octopole semble être corrélé avec le quadripôle,
- Diverses analyses statistiques semblent indiquer des différences entre les hémisphères nord et sud. L'existence et l'origine de cette anisotropie ne sont pas encore complètement établies.

La première détection de la polarisation du fond diffus cosmologique a été annoncée en septembre 2002 [52]. Cette détection a été obtenue grâce à un interféromètre, DASI, fonctionnant à 30 GHz au pôle sud. L'amplitude des modes E et B a été contrainte en supposant que leur spectre était celui du modèle Λ CDM le mieux adapté, ce qui a permis d'établir une détection 5 σ des modes

E.

Le satellite Planck observera le fond diffus cosmologique dans neuf bandes de fréquences réparties entre 20 et 800 GHz avec une résolution de l'ordre de 4 arcmin , ce qui correspond à $f \sim 2000$. Il utilise des radiomètres, censés être 1000 fois plus grands. sensible que celui du COBE, pour les fréquences inférieures à 100 GHz et les bolomètres aux hautes fréquences.

6.4.0.7 *Isotropie statistique et observation sur un ciel incomplet*

Lors de l'observation du fond diffus cosmologique, diverses émissions de premier plan doivent être soustraites. C'est notamment le cas de l'émission de notre Galaxie, qui dans le cas le plus simple, revient à découper une partie du ciel observé. Les observations donnent alors accès à

$$\hat{O}(e) = @ (e)IV(e), \tag{6,255}$$

où W est un masque indiquant quelle partie du ciel a été découpée. Élargir le masque en harmonies sphériques comme

$$W'(e) \sim y^{?^m}E^e_{\tau_0}(e), \tag{6.256}$$

avec $w''_{(m)} = (— 1)^n we_{-m}$, alors les coefficients en_m sont liés aux coefficients primordiaux , en_m , par

$$52^{nt\wedge} \quad 52 \quad mi \quad d^2ey_{\tilde{f}m},(e)y_{\tilde{f}5m2}(e)Yf_m(e). \tag{6.257}$$

En utilisant (B.23), cette expression se réduit à

$$7H_{\wedge} \tag{6,258}$$

où le noyau est explicitement donné par

$$\frac{(2f+1)(2l_2+1)(2\ell+1)}{4-r^r}$$

Pour un masque constant, $W = WQQYW$, nous trouvons que tben chèque qui ne satisfait pas la propriété $(Sf_m \hat{a}^{\wedge}_{,m},) = 6tt' \& mn$

$$(\hat{a}_{,m\hat{a}}; , m \cdot) = \pounds_{6''ii}$$

puisque l'isotropie statistique est rompue par le masque. Ceci illustre la difficulté de construire un estimateur de C_f pour un ciel partiel. De plus, cela souligne la difficulté de tester en pratique le fait que les af_m sont des champs stochastiques indépendants et isotropes.

6.5 Effets des paramètres sur le spectre de puissance angulaire

Les perturbations scalaires, vectorielles et tensorielles laissent différentes signatures sur les - anisotropies et polarisations de la température de fond des micro-ondes cosmiques. La

polarisation E est générée à la fois par les modes scalaire et tensoriel, tandis que la polarisation B n'est induite que par les modes tenseurs de sorte qu'elle permet, en principe, d'avoir un accès direct aux propriétés des ondes gravitationnelles. Nous pouvons mesurer les spectres de puissance et les corrélations croisées de ces différentes quantifications. En raison des propriétés de symétrie, seules les corrélations entre $\mathcal{C}$ et E ne disparaissent pas. Nous avons ainsi accès à quatre observables ($\mathcal{C}$ - $\mathcal{Q}$, EE et QE et BB) ; les trois premiers sont générés par les modes scalaire et tensoriel tandis que le fourth est généré uniquement par les modes tenseurs.

Les courbes théoriques de ces spectres de puissance angulaire dépendent de la valeur des paramètres cosmologiques et des conditions initiales des perturbations. Nous illustrons ici l'influence de différents paramètres sur le spectre température-puissance.

Nous distinguerons les paramètres cosmologiques qui décrivent le contenu en matière de l'Univers et qui affectent la fonction de transfert des perturbations et les *paramètres primordiaux* qui décrivent les conditions initiales des perturbations.

6.51 Paramètres cosmologiques

6-5-1.1 Densité des baryons : $\Omega_b h^2$

Comme vu précédemment (voir section 6.2.2), le principal paramètre qui influence la structure du pic est R . Sa valeur au moment du découplage est donnée par

$$R_{\text{LSS}} \sim 27,37 \text{ pi}_{\text{b}} \text{Å}^{-2}.$$

La densité baryonique Ω_b a quatre effets principaux sur le spectre de puissance angulaire.

- Il fixe la fréquence d'oscillation du plasma photon-baryon via la vitesse du son. Lorsque Ω_b augmente, c_s diminue et la fréquence des oscillations est plus petite. Ainsi, Ω_b influence la position des pics et leur espacement.
- Il fixe l'amplitude relative des pics pairs et impairs. Cette amplitude est de $1 + 6R$ dans le cas adiabatique. Plus Ω_b est grand, plus le deuxième pic est petit.
- Il fixe le contraste entre les pics, en influençant l'amplitude du terme Doppler. Si $D_b = 0$, les pics disparaissent complètement et le contraste augmente lorsque D_b augmente.
- Il influence l'amortissement de la soie à petite échelle en modifiant la λ_{DB} libre moyenne des photons. Plus Ω_b est grand, plus le libre parcours moyen est court et plus l'amortissement est important.

La figure 6.14 illustre ces effets.

6.5.1.2 Densité totale de matière : $\Omega_m h^2$

En mode standard), la densité des baryons est faible par rapport à celle de la matière noire, de sorte que la densité totale de la matière le peut. être rapproché de celui de la matière noire. Contrairement à la matière baryonique, la matière noire n'agit que par gravitation sur les photons. ELLE ne se ressent donc que via son influence sur l'évolution temporelle des potentiels de Bardeen. En particulier Jar,

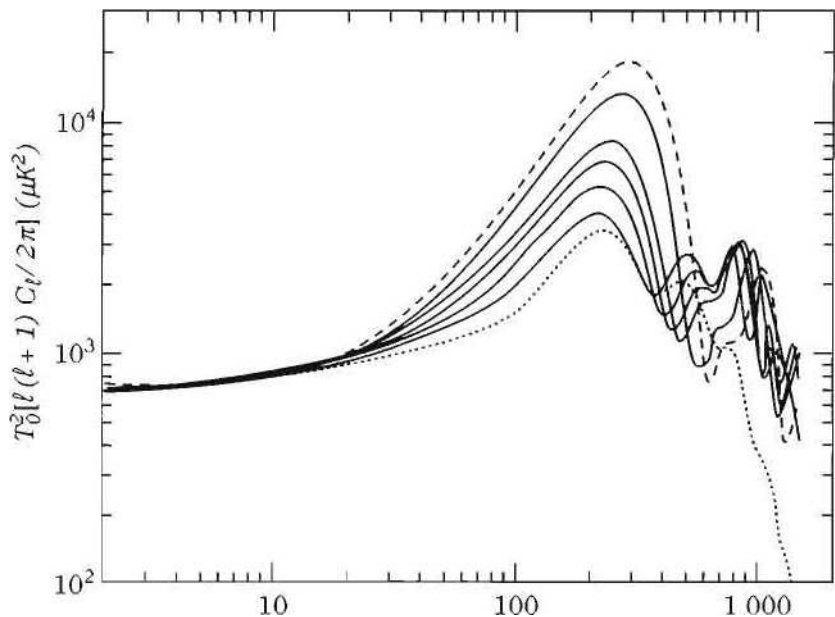


Fig. 6.14 Influence de la densité baryonique sur le spectre de puissance angulaire en température. Pour les spectres en traits pleins, $f_{\text{boh}}^2 = 0,0125, 0,0250, 0,0375, 0,0500$ et $0,0875$. Les deux valeurs extrêmes sont $0,0025$ (en pointillés) et $0,1250$ (en pointillés). De la Réf. [3].

une augmentation de Q_{mo} équivaut à une augmentation de z_{eq} et donc un retard dans l'égalité matière-rayonnement, qui affecte la contribution du premier terme intégré de Sachs-Wolfe.

6.5.1.3 Rapport matière noire-baryon

Le rapport baryon/matière noire Ω_b/Ω_c a une influence sur la contribution relative des deux composantes dans l'équation de Poisson. Puisque le contraste de densité de la matière baryonique augmente seulement après découplage, nous nous attendons à ce que le spectre de puissance angulaire ait une amplitude plus faible lorsque Ω_b augmente. De plus, les perturbations de la matière oscillent lorsqu'elles sont couplées à des photons et les perturbations gardent une trace de ces oscillations après découplage. Ces oscillations sont ensuite imprimées dans le spectre de puissance de la matière et sont appelées oscillations acoustiques baryoniques.

6.5.1.4 Constante de Hubble, h

La constante de Hubble n'est pas en réalité un paramètre libre puisque, d'après les équations de Friedmann, elle ne peut pas varier indépendamment du contenu en matière de l'Univers. Son influence sur le spectre de puissance angulaire dépend de paramètres qui restent constants lorsqu'on fait varier sa valeur (le D , ou le $u > j = Q_{,i}^2$). A titre d'exemple, si la courbure

et la constante cosmologique sont fixes, $1 + z_{eq} - D_m \propto h^{-1}$ — $2,4 \times 10^4 h_m \text{ off}$
² - Si h diminue, la transition matière-rayonnement se produit plus tard, ce qui a pour effet d'augmenter l'amplitude des pics acoustiques (Fig. 6.15).

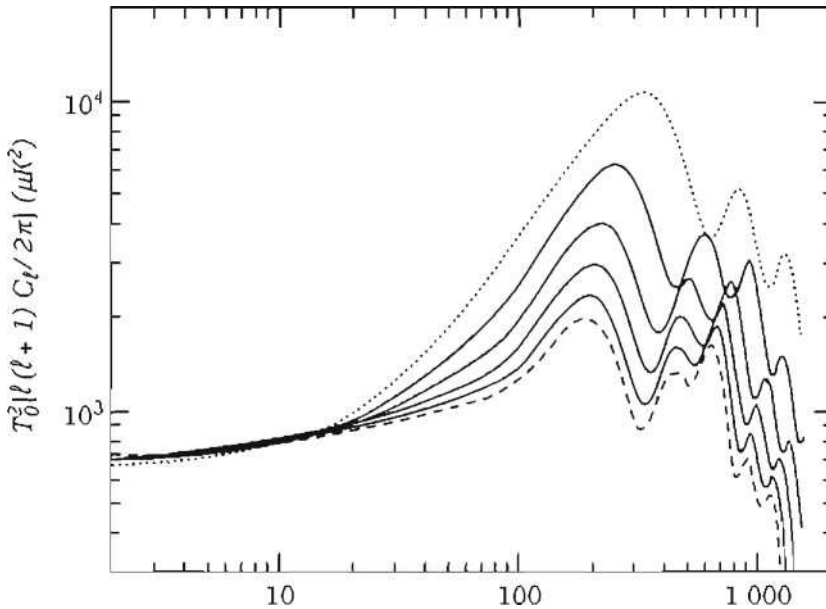


Fig. 6.15 Influence de la constante de Hubble. La densité de baryon est fixée à $\Omega_b = 0,0125$ et celle de matière noire varie avec h qui prend les valeurs suivantes 0,2 (ligne pointillée), 0,35, 0,50, 0,65, 0,80 (lignes pleines) et 0,95 (lignes pointillées). Bal de promo Réf. [3].

65. J.5 Constante cosmologique : $C_l(V)$

En faisant varier Q_A à FLQ FIXE, la constante cosmologique retarde l'égalité matière-rayonnement et modifie le rapport entre la distance angulaire et le redshift. La position des pics acoustiques sera ainsi affectée (voir Fig. 6.16).

De plus, la constante cosmologique domine aujourd'hui de sorte que les potentiels de Bardeen décroissent tardivement, ce qui induit un effet Sachs-Wolfe intégré tardivement et augmente la puissance aux grandes échelles angulaires.

6.5.1.6 C_{vi} valeur :

L'effet de la courbure est similaire à celui de la constante cosmologique. Dans un Univers ouvert, la relation entre la distance angulaire et le redshift est modifiée et les potentiels de Bardeen décroissent après l'égalité matière-courbure. L'effet de la distance angulaire implique également que les pics acoustiques seront déplacés vers des multipôles plus élevés pour les espaces ouverts et vers des multipôles plus petits pour les espaces fermés.

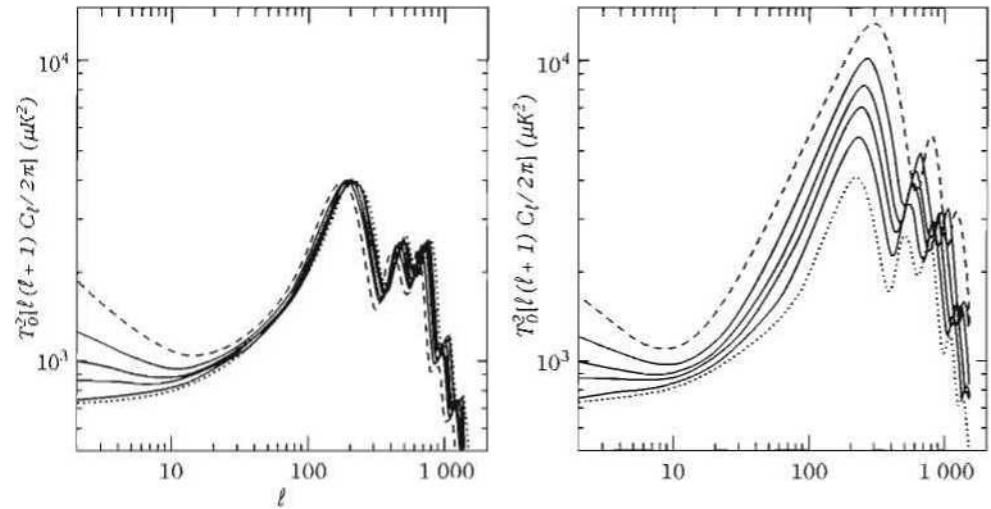


Fig. 6.16 Influence of the cosmological constant on the temperature angular power spectrum. (left): Ω_0 varies while keeping $p_{cr, to}$ and p_0 fixed, which implies that h also varies, Ω_0 takes the values 0 (dotted line), 0.4, 0.6, 0.7, 0.8 (solid lines) and 0.9 (dashed line), (right): p_0 and h are kept constant so that varies as $1 - \Omega_0$ — Ω_0 takes the values 0 (dashed line), 0.4, 0.6, 0.7, 0.8 (solid lines) and 0.9 (dotted line) From Ref. [3].

Notez que nous pouvons ajuster simultanément la courbure et la constante cosmologique tout en gardant le spectre presque inchangé. Ces effets sont illustrés sur la figure 6.17.

6.5.1.7 Dégénérescence des paramètres

Comme illustré dans les figures précédentes, la variation des paramètres cosmologiques affecte, d'une part, la position des pics et leur amplitude relative et, d'autre part, la forme du plateau de Sachs-Wolfe. Aux grandes échelles angulaires, la variance cosmique devient plus importante et différents ensembles de paramètres peuvent conduire à des spectres de puissance angulaire identiques jusqu'à la précision de la variance cosmique.

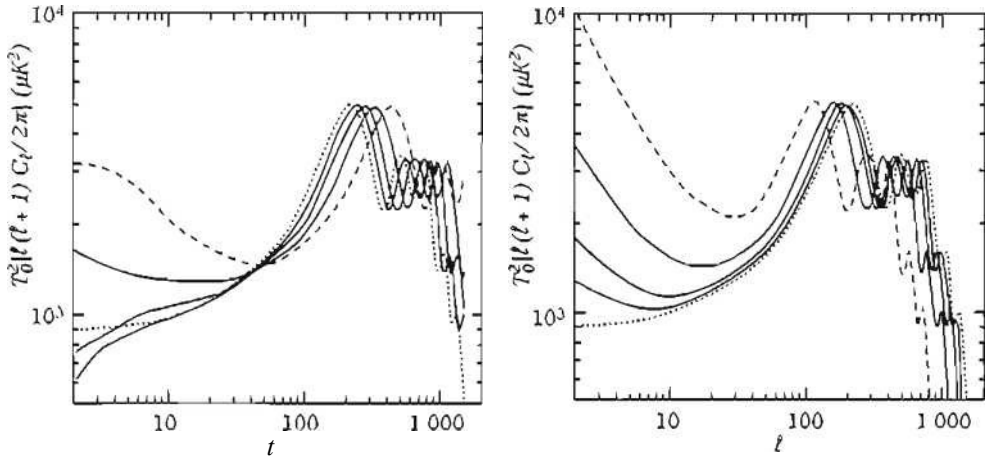
En fait, ces dégénérescences peuvent être comprises si l'on rappelle que la position des pics est principalement dictée par l'échelle acoustique $\ell_4 = fK(2_{LSS})/r_s(\wedge_{LSS})$ (6.74). Par exemple, la sensibilité de cette échelle aux paramètres cosmologiques standards est

$$0.17 \frac{\Delta \Omega_{\Lambda 0}}{\Omega_{\Lambda 0}} - 0.11 \Delta w - 0.07 \frac{\Delta f_{\text{bo}}}{f_{\text{W2}}}$$

autour de la mode ! $(f_{\text{bo}}^{\wedge \text{mo}^2}, \wedge_{\Lambda 0}, w, \wedge_{\text{CI}}^{\wedge h^2}) = (1, 0.15, 0.65, -1, 0.02)$, w étant l'équation d'état de la matière noire. Ces dégénérescences sont illustrées sur la figure 6.18.

6.5.2 Paramètres décrivant la physique primordiale

La physique primordiale fournit les spectres de puissance initiaux pour les perturbations scalaires et tensorielles qui sont caractérisées par leurs amplitudes, leurs indices spectraux et leur variation de



Fg. 6-17 Influence de la courbure sur le spectre de puissance angulaire. (à gauche) : espaces spatialement hyperboles. La densité de matière est constante et C_0 vaut respectivement 1 (ligne pointillée), 0,8, 0,6, 0,4 (lignes pleines) et 0,2 (ligne pointillée). Les pics sont décalés vers des échelles angulaires plus petites et la décroissance des potentiels gravitationnels induit un effet Sachs-Wolfe plus intégré de signe opposé à celui du terme Sachs-Wolfe ordinaire. (à droite) : espaces spatialement sphériques. La densité de matière est constante et $\tilde{T}_0$ vaut respectivement 1 (ligne pointillée), 1,2, 1,4, 2,0 (lignes pleines) et 4,0 (ligne pointillée). Les potentiels de Bardeen augmentent avec le temps puisqu'ils augmentent avant que l'expansion ne s'arrête. Le terme Sachs-Wolfe intégré a donc le même signe que le terme Sachs-Wolfe, ce qui se traduit par une augmentation de la puissance à grande échelle. De la Réf. (3).

leurs indices spectraux (Chapitre 8). Il fournit également une indication sur le caractère adiabatique ou iso-courbure des conditions initiales des perturbations.

6.5.2.1 Indice spectral

Comme le montrent (6.50) et (6.96), la quantité $^{(6+1)}C_{\ell}$ est des proportions ℓ^{-n_s-1} et ℓ^{-n_T} pour les modes scalaire et tensoriel, respectivement.

Pour un spectre incliné vers le rouge ($n_s < 1$, $n_T < 0$), le spectre de puissance angulaire présente un excès de puissance aux grandes échelles angulaires, tandis qu'un spectre incliné vers le bleu présente un excès de puissance aux échelles angulaires courtes.

Une déviation du spectre primordial par rapport à une invariance d'échelle induit donc une inclinaison du plateau de Sachs-Wolfe et une modification de l'amplitude relative des pics acoustiques par rapport au plateau de Sachs-Wolfe. Cet effet est illustré sur la figure 6.19.

6.5.2.2 Ondes gravitationnelles primordiales

La contribution des ondes gravitationnelles est dominante aux grandes échelles angulaires, de sorte qu'elles tendent à diminuer la hauteur relative des pics acoustiques (d'origine purement

scalaire) par rapport au plateau de Sachs-Wolfe.

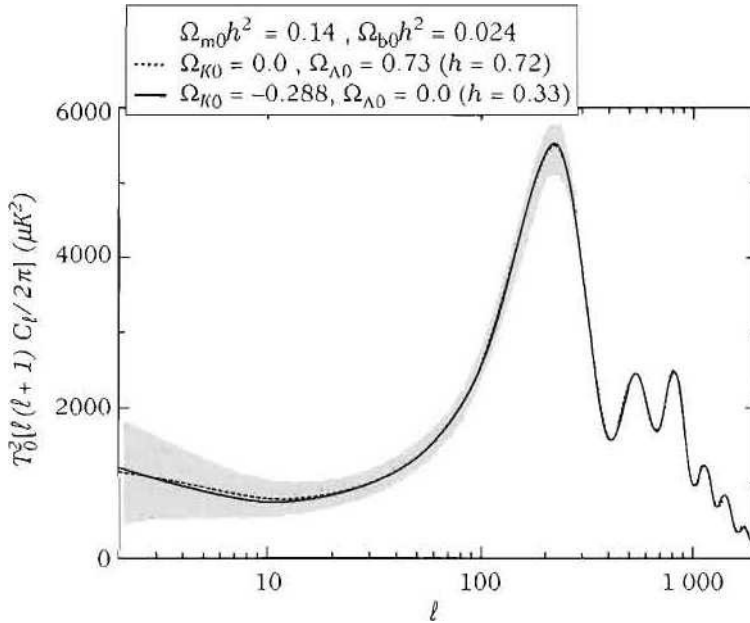


Fig. 6.18 Illustration de la dégénérescence des paramètres cosmologiques. Les deux modèles sont impossibles à distinguer étant donné la limitation due à la variance cosmique. Ils ont en commun $(\Omega_{m0} h^2, \Omega_{b0} h^2) = (0.14, 0.024)$. Le premier modèle (ligne pointillée) est le modèle Λ CDM le mieux adapté avec $\Omega_{K0} = 0.0$, $\Omega_{\Lambda0} = 0.73$ ($h = 0.72$), tandis que le second (ligne continue) est un modèle ouvert avec une faible constante de Hubble, $(\Omega_{K0}, \Omega_{\Lambda0}) = (-0.288, 0)$ et $h = 0.33$.

La structure des pics acoustiques est toujours celle des modes scalaires et la normalisation du spectre des modes scalaires est plus faible lorsque les ondes gravitationnelles contribuent à de grandes échelles angulaires.

6.5.2 3 Conditions initiales adiabatiques et isocourbures

Le choix du type de conditions initiales influence la position des pics et leur amplitude relative. Ceci est dû à la relation (6-74) qui explique comment la structure des pics est modifiée. En particulier, la position du premier pic est décalée d'un facteur $3/2$ pour un modèle d'isocourbure.

Une deuxième différence apparaît dans la normalisation des spectres puisque $G_{gw} = \mathcal{S}/3$ pour un modèle adiabatique pur et $2\mathcal{S}$ pour un modèle isocourbure pur.

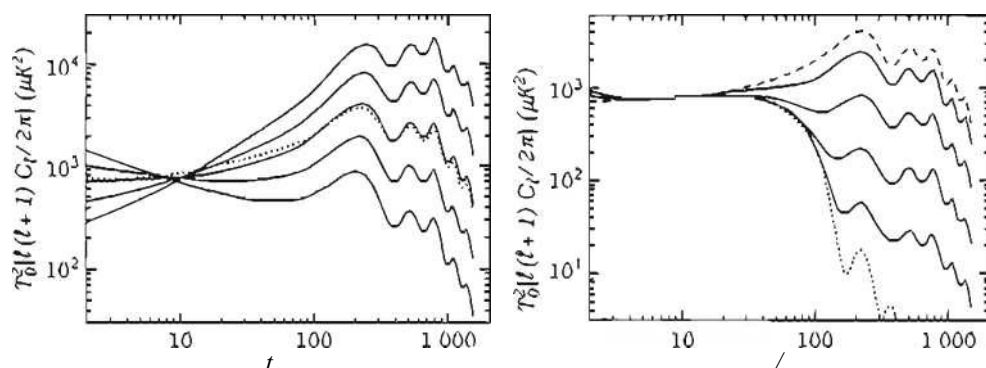


Fig. 619 (à gauche) : Influence de l'indice spectral des modes scalaires sur le spectre primordial . n_s prend les valeurs 0,5, 0,75, 1,0, 1-25 et 1,5 (Jines solides) de bas en haut dans la région Doppler. Le spectre en pointillés correspond au cas $n_s = 1,5$ multiplié par en accord avec le spectre obtenu pour $n_s = 1$. (à droite) : Influence du rapport T/S . Les spectres en pointillés et en pointillés représentent les contributions des seuls modes scalaire et tensoriel, et nous interpolons entre ces deux courbes lorsque T/S varie de 0 à ∞ . Bal de promo Réf. [3].

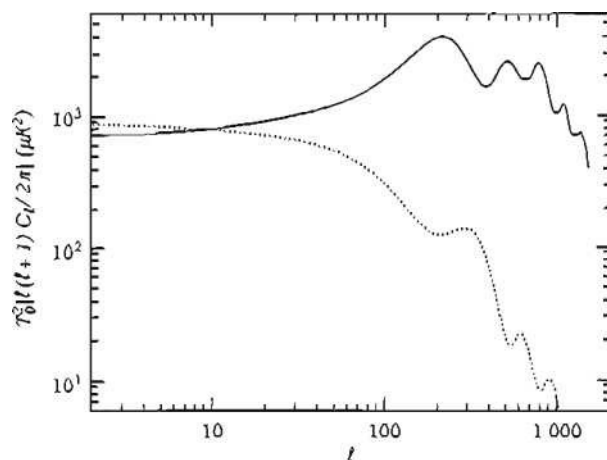


Fig. 6.20 Comparaison du spectre de puissance angulaire température pour des conditions initiales adiabatiques et d'isocourbure. De la Réf. [3].

Les références

- [1] R. DURRER, 'La théorie des anisotropies CMB', *J. Phys. Goujon*. 5, 177, 2001.
- [2] W. Hu, *Wandering the background: a cosmic background explorer*, Thèse, Université de Berkeley, 1995, [astro-ph/9508126j].
- [3] A. RIAZUELO, *Signature de divers modèle d'univers primordial dans les anisotropies du rayonnement fossile*, Thèse de doctorat, Université Paris XI, 2000
- [4] A. KOSOWSKY, *Le fond cosmique des micro-ondes*, dans *Cosmologie moderne*, S. Bonometto *et al.* (éd.), Institut de physique, 2002.
- [5] R. K. SACHS et AM WOLFE, « Perturbations d'un modèle cosmologique et variations angulaires du fond micro-ondes », *Astrophys. J.* 147, 73, 1967.
- [6] M. PANEK, « Fluctuations de fond micro-ondes à grande échelle : formalisme invariant de jauge », *Phys. Rev.D* 34, 416 , 1986.
- [7] W. Hu et N. SUGIYAMA, «Vers la compréhension des anisotropies du CMB et de leurs implications», *Phys. Rev. D* 51, 2599, 1995 ; W Hu et N. SUGIYAMA, « Anisotropies dans le CMB : une approche analytique », *Astrophys. J.* 444, 489, 1995.
- [8] A. SAKHAROV, *Zh. Ex. Théor. Fiz.* 49, 345, 1965, [Sov. Phys. JETP 22, 241, 1966].
- [9] J. SILK, « Rayonnement cosmique du corps noir et formation de galaxies », *Astrophys. J.* 151, 459, 1968.
- [10] M. BIRKINSHAW, *L'effet Sunyaev-Zeldovich*, Phys. Rapport 310 (1999) 97.
- [11] J. BERNSTEIN, *Théorie cinétique dans l' univers en expansion* , Cambridge University Press, 1988.
- [12] J STEWART, *Théorie cinétique relativiste hors équilibre*, Lect. Notes en physique. 10, Springer, Berlin, 1971.
- [13] J.-P. UZAN, 'Dynamique des gaz en interaction relativiste : d' une description cinétique à une description fluide', *Classe. Quant. Grav.* 15, 1063, 1998.
- [14] M. HILLERY, 'Fonctions de distribution en physique : fondamentaux', *Phys. Rep.* 106 , 121, 1984.
- [15] PJE PEEBLES et T. J. Yu, « *Perturbation adiabatique primitive dans un univers en expansion* », *Astrophys. J.* 162, 815, 1970.
- [16] J.R. BOND et G. EFSTATHIOU, « Anisotropies du rayonnement de fond cosmique dans les univers dominés par la matière noire non baryonique », *Astrophys. J. Lett.* 285, L45, 1984.
- [17] CP MA et E. BERTSCHINGER, « Théorie des perturbations cosmologiques dans les jauges synchrones et conformes », *Astrophys. J.* 455, 7, 1995.
- [18] H. KODAMA et M. SASAKI, « Théorie des perturbations cosmologiques », *Prog. Théorique. Phys. Supplément.* 78, 1, 1984.
- [19] C. PITROU, 'Équation de Boltzmann invariante de jauge et limite de fluide', *Class. Quant. Grav.* 24, 6127, 2007.

- [20] K. THORNE, « Expansions multipolaires du rayonnement gravitationnel », *Rev. Mod. Phys.* 52, 299, 1980.
- [21] R. DuRRER, 'Théorie des perturbations cosmologiques invariantes de jauge : une étude générale et son application au scénario de texture de formation de structure', *Fund. Cosm. Phys.* 14, 209, 1994.
- [22] MJ REES, ¹ *Polarisation et spectre du rayonnement primitif dans un univers anisotrope*, *Astrophys. J.* 153, L1, 1968.
- [23] W. Hu et M. WHITE, « Une amorce de polarisation CMB », *New Astron.* 2, 323, 1997.
- [24] M. ZALDARRIAGA et D. HARARI, 'Approche analytique de la polarisation du fond cosmique des micro-ondes dans les univers plats et ouverts', *Phys. Rev. D* 52, 3276, 1995.
- [25] A. KOSOWSKY, « Polarisation du fond cosmique des micro-ondes », *Annales. Phys.* 246, 49, 1995.
- [26] M. ZALDARRIAGA, *La polarisation du fond diffus cosmologique*, dans *Mesurer et modéliser l'univers*, Ed. WL Freedman, Carnegie Observatories Astrophysics Series, 309, CUP 2004[astro-ph/0305272].
- [27] W. Hu et M. WHITE, « Anisotropies CMB : méthode du moment cinétique total », *Phys. Rev. D* 56, 596, 1997.
- [28] J. JACKSON, *Classical electrodynamics*, Wiley, 1998.
- [29] E. NEWMAN et R. PENROSE, *J. Math. Phys.* 7 863, 1966 ; NJ VILENKIN, *FONCTIONS spéciales et théorie des représentations de groupe*, American Mathematical Society Press, Providence, 1968.
- [30] S. CHANDRASEKHAR, *TRANSFERT radiatif*, Douvres, 1960.
- [31] M. KAMIONKOWSKI *et al.*, 'Une sonde d'ondes gravitationnelles primordiales et de vorticité', *Phys. Lett. B* 78, 2058, 1997 ; M. KAMIONKOWSKI *et al.*, 'Statistiques de la polarisation du fond diffus cosmologique', *Phys. Rev. D* 55, 7368, 1997 ; W Hu *et al.*, ■ « Un traînement complet des anisotropies CMB dans un univers FRW », *Phys. Rev. D* 57, 3290, 1998.
- [32] U. SELJAK, « Une approximation à deux fluides pour calculer les anisotropies du fond cosmique des micro-ondes », *Astrophys. J.* 435, L87, 1994.
- [33] U. SELJAK et M. ZALDARRIAGA, 'Une approche d'intégration en ligne de mire des anisotropies cosmiques du fond des micro-ondes', *Astrophys. J.* 469, 437, 1996.
- [34] CMBFAST : <http://cmbfast.org>, développé par U. Seljak et M. Zaldarriaga.
- [35] CAMB : <http://camb.info>, développé par A. Lewis et A Challinor.
- [36] CMBEASY : <http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~doraji/cmbeasy> , développé par C. Doran.
- [37] COSMICS : <http://acturus.mit.edu/cosmics> , développé par E Bertschinger et C P. Ma.
- [38] GF SMOOT, «Expériences CMB», *Phys. Rep.* 333, 269, 2000
- [39] Rapport 'Le rayonnement fossile à 3 K', *CR Acad. Sci. (Paris)* 4 (2003) ; S. Eidelman *ET al.*, Particle Data Group, Chap. 23 « Fond cosmique de micro-ondes », *Phys. Lett. B* 592, 1, 2004.
- [40] AW JONES et AN LASENBY, « Le fond cosmique des micro-ondes », *Living Rev. Relativity* (1998)
- [41] DASI. <http://astro.uchicago.edu/dasi> .

- [42] CAT : <http://www.mnrao.cain.ac.uk/telescopes/cat/index.html> .
- [43] VLA : <http://www.nrao.edu/vla/html/VLAhome.shtml> .
- [44] BOOMERang : <http://www.physics.ucsb.edu/~boomerang/> .
- [45] MAXIME; <http://cfpa.berkeley.edu/group/cmb/> .
- [46] AR.CHEOPS : <http://www.archeops.org> .
- [47] COBE :
http://espace.gsfc.nasa.gov/astro/cobe/cobe_home.html .
- [48] WMAP : <http://map.gsfc.nasa.gov>
- [49] Géomètre Planck : <http://astro.estec.esa.nl/Planck>
- [50] L. PAGE et al., « Observations WMAP sur trois ans : analyse de polarisation », *Astrophys. J. Suppl.* 170, 335, 2007.
- [51] DN SPERGEL et al., 'Résultats WMAP sur trois ans : implication pour la cosmologie', *Astrophys. J. Suppl.* 170, 377, 2007.
- [52] JM KOVAC et al., "Détection de polarisation dans le fond cosmique micro-ondes à l'aide de DASP, *Nature* 420, 772, 2002.
- [53] Centre d'analyse M. TEGMARK CMB :
<http://space.mit.edu/home/tegmark/cmb/experiments.html> .

Lentilles gravitationnelles et matière noire

7.1 Lentille gravitationnelle et ses applications

La lumière est déviée par tout champ gravitationnel inhomogène (voir chapitre 1). Cette propriété fut à l'origine des premiers tests de relativité générale dans le système solaire. Il est aujourd'hui devenu un outil informatique permettant de cartographier la répartition de la matière dans l'Univers, et en particulier celle de la matière noire. Les applications de la lentille gravitationnelle sont nombreuses. Le tableau 7.1 donne une classification des différents systèmes de lentilles gravitationnelles et de leurs applications physiques.

Diverses études complémentaires peuvent être trouvées dans les deux monographies [1,2] et dans les récentes revues [3,4] qui détaillent les aspects historiques, théoriques et observationnels.

Tableau 7.1 Classification des différents systèmes de lentilles gravitationnelles (les plus étudiés, avec des observations bien établies) en termes de source et de lentille. Les effets sont classés en lentilles fortes (SL), microlentilles (ML), lentilles faibles (WL) et statistiques (st).

Applications d'effets de lentille		source	
Étoile (gaiactique)	Étoile (gaiactique)	ML : courbes légères	Planètes extrasolaires Structure interne de la Voie Lactée
Étoile (extragalactique)	Objet compact (gaiactique)	ML : courbes légères	La matière noire dans Auréole de la Voie lactée
Gai axy	Galaxie	StWL : biais d'ellipticité, corrélation cisaillement-galaxie	Paramètres de la galaxie, propriétés des halos
Galaxie	Grappe	SL : arcs géants, images multiples WL : arcllets, biais de grossissement	Masse totale du cluster, $\dot{U}_A$, redshifts Profil de masse des grappes, morphologie des grappes
Galaxie	Grande-focale Structure	StWL ; cisaillement cosmique, corrélation cisaillement-cisaillement	Paramètres cosmologiques Spectre de puissance cosmologique,
Quasar	Galaxie	SL ; images multiples, Einstein sonne,	Masse des galaxies, sous-structures.
Quasar	Structure à grande échelle	StWL : grossissement cosmique, corrélation quasar-galaxie	paramètres cosmologiques, spectre de puissance, biais
Dernière surface	Grande échelle Structure	StWL : lissage de C_t , Modes B	Paramètres cosmologiques, spectre pû'ver

7.1.1 Lentilles gravitationnelles dans le régime des lentilles fines

7.1.1.1 Déflection de la lumière par une masse ponctuelle

Équation de lentille

L'équation de la lentille relie la position réelle d'une source à sa position observée (voir Fig. 7.1). Tout d'abord, nous définissons l'*axe optique* comme la ligne joignant l'observateur au centre de la lentille (OL). Le *plan source* et le *plan lentille* sont les deux plans perpendiculaires à l'axe optique situés respectivement à des distances D_{OS} et D_{OL} de l'observateur.

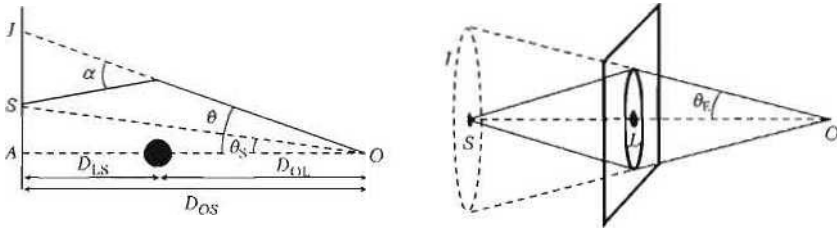


Fig. 7.1 (left): Gravitational lens configuration. L is the gravitational lens. θ , θ_s and α are, respectively, the angular position of the image, the angular position of the source and the deflection angle. D_{OL} and D_{OS} are the angular distances between the observer and the lens and between the observer and the source, respectively, and D_{LS} is the angular distance between the lens and the source, (right): When the source, the lens and the observer are aligned, the image of the source takes the shape of a circle, called an Einstein ring.

Les positions de la source et de son image sur le plan source sont liées par $AS = SI$, où SI peut être exprimé en fonction de la position angulaire de la source θ_s par $dS = \theta_s D_{OS}$ et de même, AI est donné par $AI = \theta D_{OL}$, avec θ la position angulaire de l'image, et $SI = \alpha D_{LS}$ étant l'angle de déflexion. On constate ainsi que dans la limite des petits angles, la position angulaire de l'image θ est

$$\theta = \theta_s + \alpha(\theta_s). \quad (7.1)$$

A faire

Notez que les distances impliquées dans cette équation sont les distances angulaires puisqu'elles relient les distances physiques transversales à leur diamètre angulaire. La valeur de l'angle de déflexion par une source ponctuelle a été obtenue au chapitre 1 [voir (1.143)] ; $\alpha = \frac{4GM}{c^2 b} = \frac{4R_s}{b}$, où $b = D_{OL}\theta$ est le paramètre d'impact et R_s le rayon de Schwarzschild. L'équation de la lentille devient donc

$$\theta = \theta_s + \frac{R_s}{D_{OL}\theta} \quad (7.2)$$

où nous avons introduit le facteur géométrique $D = D_{OS}D_{OL}/D_{LS}$.

Rayon d'Einstein

L'invariance rotationnelle autour de l'axe optique implique qu'une source située exactement sur cet axe ($\theta_s = 0$) sera observée comme un anneau de diamètre angulaire

$$\sqrt{\frac{4G_N M}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_{OS} D_{OL}}} \quad (7.3)$$

Ce rayon angulaire, appelé *rayon d'Einstein** dépend à la fois de la masse de la lentille et du facteur $-D_{LS}/-D_{OS} \cdot C_{OL}$ qui caractérise la géométrie du Système. Son rayon physique est $R_E = \theta_{EDOL}$ (voir Fig. 7.1).

Le rayon d'Einstein est une échelle angulaire naturelle pour le problème. Si la lentille donne lieu à plusieurs images, θ_E sera la séparation angulaire typique entre ces images. Les sources situées à plus de θ_E de l'axe optique sont sujettes à de forts effets de distorsion, donnant lieu par exemple à des arcs et seront fortement amplifiées et déformées. Les sources avec $\theta_s \gg \theta_E$ ne sont presque pas affectées par l'objectif. Les ordres de grandeur typiques du rayon d'Einstein pour la lentille gravitationnelle par une étoile dans la Galaxie ($M \sim M_\odot$ et $D \sim 10$ kpc) et par une galaxie ($M \sim 10^{12} M_\odot$) dans le contexte cosmologique ($z \sim 1$ — PH 6) sont

$$\theta_E, \text{Rla.i} = \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{1/2} \quad (7.4)$$

$$\theta_E, \text{gal} = \left(\frac{M}{10^{12} M_\odot} \right)^{1/2} \sim 3000 \text{ Mpc } \theta_E \quad \text{arcsec.} \quad (7.5)$$

Par exemple, pour une lentille à $z = 0,5$ et une source à $z = 2$, nous obtenons $\theta_E \sim 2,13$ arcsec pour un univers d'Einstein-de Sitter avec $h = 0,7$.

Images multiples et grossissement

L'équation (7.2) peut être réécrite en termes de rayon d'Einstein sous la forme simplifiée

$$\quad (7.6)$$

La résolution de cette équation pour θ donne deux solutions

$$\theta = \frac{1}{2} \left(\theta_s \pm \sqrt{\theta_s^2 + 4\theta_E^2} \right) \quad (7.7)$$

de sorte que chaque source possède deux images gravitationnelles. Ces deux images sont situées de part et d'autre de la source, l'une à l'intérieur du rayon d'Einstein ($\theta_- < \theta_E$) et l'autre à l'extérieur ($\theta_+ > \theta_E$), et sont séparées par $\Delta\theta > 2\theta_E$.

La détection de lumière n'étant associée à aucune absorption ou émission, la lentille gravitationnelle conserve la luminosité de la surface. La luminosité de la surface de l'image, $I(6)$, est liée à celle de la source, $I_s(6_s)$, par

$$I(6) = I_s \left(\frac{\theta_s}{\theta} \right)^2 \quad (7.8)$$

Le champ gravitationnel de la lentille déforme le faisceau lumineux et modifie l'angle sous lequel la source est observée. Le flux total est ainsi proportionnel au rapport entre

les angles solides sous lesquels la source et l'image sont observées. Pour une lentille symétrique, telle qu'une lentille ponctuelle, le grossissement est donné directement par

$$\frac{3 DO}{\hat{O}_s d3_s'} \quad (7.9)$$

puisque l'élément de surface est proportionnel à $\sin \theta d\theta \sim \theta d\theta$, pour les petits angles. Dans le cas d'une lentille ponctuelle, on obtient, après utilisation (76),

$$M_{\pm} = \quad (7.10)$$

où u est le paramètre d'impact en unités du rayon d'Einstein. Puisque $0 < u < 1$ et $p < 0$. Cela signifie que l'image à l'intérieur du rayon d'Einstein a une parité inversée ; c'est l'image de la source dans un miroir. La figure 7.2 représente la position et l'orientation relative des deux images.

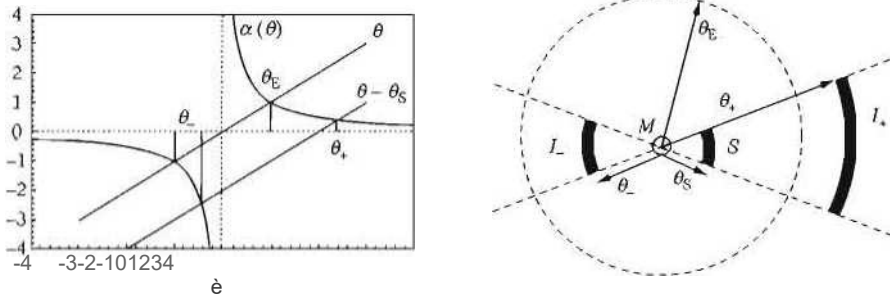


Fig. 7.2 (left): The solution of the lens equation can be obtained graphically through the intersection of the curve $\alpha(\theta)$ and the line of equation $\theta - \theta_s$ (right): The relative position of the two images of the source and their relative magnification.

Le grossissement total est défini comme la somme des grossissements de chaque image.

$$M = 1 + \frac{1}{4} \frac{H M - I}{- \sqrt{r - r_{ii}}} \left(\frac{7}{-} \right)$$

ou 4-4

De plus, on peut vérifier que $p_+ + p_- = 1$. Remarquons que p est toujours supérieur à 1, par exemple, pour une source sur le rayon d'Einstein, $u = 1$ et $p \sim 1.34$. Au fur et à mesure que la source se rapproche de l'axe optique, les θ tendent vers zéro et le grossissement diverge, donc le grossissement d'un anneau d'Einstein serait infini. Cette divergence disparaît pour les objets qui ne sont pas ponctuels (et est donc un artefact de cette approximation).

7.1.1.2 Cas général

approximation en lentille fine

L'exemple précédent illustre les différents effets produits par une lentille gravitationnelle, dans l'approximation où elle est ponctuelle, approximation au-delà de laquelle il faut aller. Puisqu'une lentille réelle n'est a priori pas symétrique sous une rotation autour de l'axe optique, il faut remplacer les angles par des vecteurs bidimensionnels représentant la position angulaire dans le ciel, en supposant qu'elle soit plate.

Comme vu au chapitre 1, la déviation totale à laquelle un photon est soumis est

$$\alpha = \frac{1}{c} \int \nabla_{\perp} \Phi dz, \quad (7.12)$$

où $\nabla_{\perp}$ représente un gradient bidimensionnel perpendiculaire à la ligne de visée et Φ est le potentiel gravitationnel. Dans le cas d'une lentille ponctuelle de masse M , ce potentiel est explicitement donné par $\Phi = -\frac{GM}{\sqrt{b^2 + z^2}}$ où b est le paramètre d'impact du faisceau lumineux non dévié et z est la coordonnée le long de l'axe optique. Cela implique que $\nabla_{\perp} \Phi = \frac{GMb}{(b^2 + z^2)^{3/2}}$ et, après intégration sur z , que $\alpha = 4G_{\odot} M b / c^2 b^2$.

Tant que l'angle de déviation est petit, le rayon lumineux n'est que faiblement dévié par rapport à la trajectoire non déviée. L'intégrale (7.12) peut ainsi être calculée par intégration le long de la trajectoire non déviée. Une telle approximation de Born est tout à fait justifiée pour les galaxies et les amas de galaxies pour lesquels les angles de déviation sont typiquement $\alpha < 1''$ et $\alpha < 3\theta''$, respectivement.

De plus, la principale contribution à l'intégrale (7.12) vient de l'intervalle $\Delta z \sim \pm b$ autour de la lentille. Cette distance sur laquelle la déflexion est effective est très faible par rapport aux autres distances le long de l'axe optique. On peut donc supposer que la lentille est mince dans la direction de la ligne de visée et que sa distribution de masse tridimensionnelle, $\rho(\mathbf{r})$, peut être remplacée par une distribution de masse bidimensionnelle, Σ , obtenue en intégrant le long de la ligne de visée

$$\Sigma(b) = \int \rho(\mathbf{r}) dz. \quad (7.13)$$

Cette approximation simplificatrice est bien adaptée à l'étude de la lentille par galaxies ou amas de galaxies. Il code toute l'information sur le déflecteur dans une seule fonction, $\Sigma(b)$, sa densité de masse surfacique, localisée dans le plan de la lentille à $Z=0$. Dans le cas de la lentille ponctuelle étudiée dans la section 7.1.1.1. on a $\Sigma(b) = M \delta(b)$ et donc, en termes de coordonnées angulaires, $E(\theta) = (M/Z_{\odot}) \delta(\theta)$.

Équation de lentille

Dans l'approximation discutée ci-dessus, l'équation de lentille (7.1) prend la forme vectorielle

$$\hat{\theta} = \theta_s + \frac{2}{c^2} \frac{W}{L_{OS}}. \quad (7.14)$$

Pour exprimer α en fonction de E , notons que le Laplacien tridimensionnel du potentiel gravitationnel peut être décomposé en $\nabla^2 \Phi = \nabla_{\perp}^2 \Phi + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$. L'équation de Poisson (5.5) peut alors être réécrite sous la forme

$$\Delta_{\perp} \Phi = 4\pi G_N \rho_L(b, z) - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}, \quad (7.15)$$

de sorte que l'angle de déviation est la solution de

$$\nabla_{\perp} \cdot \alpha = \frac{2}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[4\pi G_N \rho_L(b, z) - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right] dz. \quad (7.16)$$

L'intégrale du terme $(\partial^2 \Phi / \partial z^2)$ disparaît et après intégration sur z , on obtient

$$\alpha = \frac{8\pi G_N}{c^2} \Sigma(b) \quad (7.17)$$

qui est résolu par

<718>

Afin d'éviter toute confusion, nous dénoterons par A le Laplacien tridimensionnel habituel, A_j le Laplacien bidimensionnel dans l'espace physique (ie par rapport à b) et A_2 le Laplacien bidimensionnel dans l'espace angulaire (ie par rapport à θ) de sorte que $A_j = \nabla_j^2$ et $A_2 = \nabla_2^2$. Nous utiliserons la même convention pour le dégradé. Après avoir introduit la densité surfacique critique

$$\Sigma_{\text{crit}} = \frac{c^2 D_{0S}}{4\pi r_{GN}^2 \Omega_m} \approx 0.35 \left(\frac{D}{1 \text{ Gpc}} \right)^{-1} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-2}, \quad (7.19)$$

l'équation de la lentille dans le régime des lentilles minces se réduit à

$$\alpha(\theta) = \frac{1}{\pi} \int \Sigma(\theta') \frac{\theta - \theta'}{|\theta - \theta'|^2} d^2\theta' \quad (7.20)$$

Une lentille de densité surfacique constante égale à Σ_{crit} induit un angle de déflexion $\alpha = \delta$ de sorte que $\delta_c = 0$ pour tous les δ . Un tel objectif focalise parfaitement la lumière et une focale peut lui être associée. Ce n'est pas le cas des lentilles arbitraires qui déforment les images et sont donc *astigmatiques*. Il est également utile de comparer Σ_{crit} à la valeur typique de la densité surfacique d'une galaxie et d'un amas, $\Sigma \sim M/R^2$,

$$\Sigma_{\text{gal}} \simeq 0.3 \left(\frac{M}{10^{11} M_{\odot}} \right) \left(\frac{R_{\text{gal}}}{10 \text{ kpc}} \right)^{-2} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-2}, \quad (7.21)$$

$$\Sigma_{\text{cluster}} \simeq 0.03 \left(\frac{M}{10^{15} M_{\odot}} \right) \left(\frac{R_{\text{cluster}}}{3 \text{ Mpc}} \right)^{-2} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-2}. \quad (7.22)$$

Potentiel projeté

Il est utile d'introduire le potentiel gravitationnel projeté obtenu en intégrant le long de la ligne de visée

$$(7.23)$$

En utilisant $V^{\text{ln}} =$ le potentiel ci-dessus est lié à l'angle de déviation (7.12) à travers

$$v^{\wedge}(0) = 1^{\wedge}1^*.$$
(7.24)

En utilisant (7.17) et la propriété $A_2 Jn0 = 27T5^{(2)} >(0)$, on obtient finalement

$$;M(\ll) = \frac{a-JcHt}{a-JcHt}$$
(7.25)

La solution de cette équation de Poisson bidimensionnelle nous donne l'expression du potentiel projeté en fonction de la densité surfacique

$$(7.26)$$

Grossissement et distorsion

L'équation (7.8) implique que

$$7(0) = 7s|0sWI = 7s(^ + -4(0o).(\text{£} - M.$$
(7.27)

où nous avons développé la relation $\#s(0)$ obtenue à partir de l'équation de lentille au premier ordre autour de $-r^*(i9o)$. Cela nous permet de comparer l'effet différentiel sur rayons lumineux voisins. La distorsion de l'image est donc caractérisée par la *matrice de distorsion*

$$w^3$$
(7.28)

dont l'expression est obtenue à partir de l'équation de lentille (7.20)

$$UNE = X$$
(7.29)

Cette matrice symétrique (2 x 2) implique 3 paramètres, qui peuvent être décomposés en termes de convergence, K , et de cisaillement, γ — (71,72), comme

$$(7.30)$$

La convergence induit une focalisation isotropie du faisceau lumineux et est liée au potentiel projeté et à la densité surfacique par

$$2K(0) = A_{21}/>(0) = 2 \frac{\Sigma}{\Sigma_{\text{crit}}}, \quad (7.31)$$

tandis que le cisaillement cosmique décrit une déformation anisotrope et est lié à l'astigmatisme du cristallin. Ses deux composantes peuvent être réécrites comme

$$\gamma_1(0) = -\gamma_2 = \gamma(0) \cos[2\alpha(0)], \quad \gamma_2(0) = \gamma(0) \sin[2\alpha(0)]. \quad (7.32)$$

Comme représenté sur la Fig. 7.3, une source initialement circulaire de rayon unité aura une image elliptique avec des axes mineurs et majeurs $(1 - \gamma/c + \gamma)^{-1}$ et $(1 - \kappa - \gamma)^{-1}$, respectivement, de sorte que la surface de l'image, S , soit liée à celle de la source, S_0 , par

$$\frac{1}{\det A} = \frac{1}{|(1 - \kappa)^2 - \gamma^2|} \quad (7.33)$$

Puisque la déviation différentielle induit une variation de la forme et de la surface de la source, elle modifie également le flux lumineux qui est proportionnel à sa surface. est donc l'inverse de la matrice d'amplification, A_4 , qui généralise l'expression (7.9) et on a

$$u = \frac{1}{\det A} = \det A_4. \quad (7.34)$$

Notez que A_4 est différent pour différentes images multiples. La comparaison des flux relatifs peut en principe être utilisée pour contraindre la répartition de la matière cristalline.

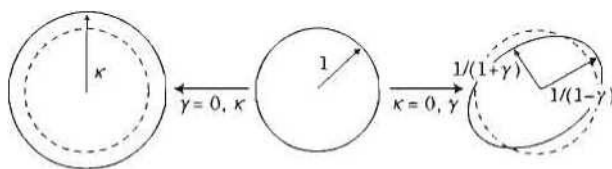


Fig. 7.3 Distortion of a circular source under the effect of the convergence κ and the cosmic shear γ .

Par exemple, dans le cas d'une lentille ponctuelle, lorsque $\beta \ll \theta_E$, la deuxième image est fortement atténuée et est généralement indétectable. La quantité p peut être aussi bien positif que négatif. Son signe s'appelle la *parité*.

En conclusion, le champ de distorsion d'une lentille gravitationnelle dans le régime des lentilles minces est caractérisé par la matrice

$$A = \frac{1}{\sin[2\alpha(0)]} \begin{bmatrix} 1 - \kappa(0) & \gamma(0) \cos[2\alpha(0)] \\ \gamma(0) \sin[2\alpha(0)] & 1 - \kappa(0) \end{bmatrix} \quad (7.35)$$

où le potentiel projeté est lié à la densité surfacique Σ/Σ_c , $a = \kappa$ par

$$\kappa(0) = 1/2 \nabla^2 \psi(0) / \Sigma_c. \quad (7.36)$$

Différents régimes

L'amplitude de la lentille dépend de E/ξ_{crit} . Deux régimes principaux peuvent être distingués.

- Si $E/\xi_{crit} > 1$, la lentille est dite supercritique ou forte . La convergence et le cisaillement cosmique sont importants. Des arcs géants ainsi que plusieurs images peuvent apparaître.
- Si $E/\xi_{crit} < 1$, on est dans un régime de faible distorsion ; $\kappa < 1$ et $\gamma < 1$. Il n'y a pas d'images multiples et la distorsion des sources de fond est si faible qu'elle ne peut pas être détectée à l'œil nu.
- En dehors de la zone critique , les images peuvent également subir de fortes distorsions sans nécessairement produire des images multiples. Ce régime intermédiaire est appelé *régime arclet*.

La figure 7.4 décrit la transition entre les deux régimes dans le cas d' une lentille ponctuelle. Si la source est éloignée du rayon d'Einstein, seule sa forme est affectée et d' autant plus qu'elle se rapproche du déflecteur . Lorsqu'elle entre dans le rayon d'Einstein, de multiples images apparaissent, puis des arcs géants avant de finalement recouvrir entièrement le rayon d'Einstein lorsque la source coïncide avec l' axe optique. La figure 7.5 illustre ces différents régimes dans le cas de l' amas de galaxies Abell 2218.

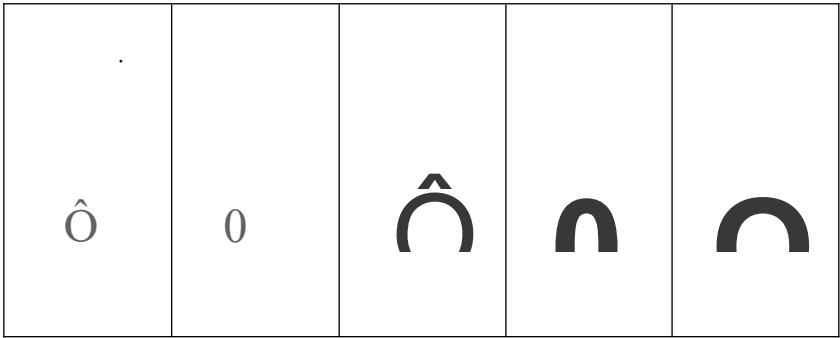


Fig. 7.4 Distorsion d'une source étendue par une lentille ponctuelle. Le cercle représente le rayon d'Einstein. Les images multiples et les forts effets de distorsion n'apparaissent que lorsque la source se trouve dans le rayon d'Einstein . De la Réf. [3].

Les lignes fermées sur le plan image pour lesquelles $\det A = 0$ sont appelées *lignes critiques*. Ils caractérisent les positions des zones de fort grossissement. Le lieu des points du plan source qui ont leur image sur la ligne critique est appelé caustique . Il indique la position des sources qui seront soumises à de fortes lentilles et formeront des arcs. On peut montrer que lorsque la source traverse une caustique, le nombre d' images saute de ± 2 , de sorte que deux images apparaissent ou se mélangent. Une source proche à l'intérieur d'un caustique produit deux images très lumineuses proches de la ligne critique. Une source proche d' un *point de rebroussement* produit trois images (voir l' illustration de la Fig. 7.7).

Pour une lentille à symétrie sphérique, la ligne critique est circulaire. Pour une masse ponctuelle, elle coïncide avec le rayon d'Einstein et la caustique associée se réduit à un point



Galaxy Cluster Abell 2218

HST - WFPC2

NASA, A. Fruchter and the ERO Team (STScI, ST-ECF) ■ STScI-PRCOO-(j)8

Fig. 7.5 The galaxy cluster Abell 2218 provides especially spectacular lensing effects. The different régimes described in the text can be observed: giant arcs and multiple images close to the heart of the cluster, strong distortions without multiple images (arclets) and weak distortion effects for sources far away from the deflector. (Picture from the spatial Hubble telescope, © A. Fruchter, HST/WFPC2).

l'intersection de l'axe optique et du plan source (voir Fig. 7.1).

On peut aussi montrer [5] que si la fonction S est lisse, bornée (pour que a ne diverge pas), et non singulière (pour que a soit continue), alors le nombre d'images de (presque) toutes les sources est impair. De plus, si L ne devient jamais négatif, alors au moins une des images est amplifiée. En général, ces relations et théorèmes sont violés par les observations, principalement en raison de l'existence de nombreuses sous-structures dans les lentilles. De plus, les images très amorties ($|\mu| < 1$) ne peuvent pas être détectées en général.

Temporisation

En utilisant la relation (7.24), l'équation de la lentille (7.14) peut être réécrite comme

où le terme qui apparaît entre parenthèses est proportionnel à la temporisation

$$r(M_s) = \frac{1 + \int_{\mathcal{L}} \frac{D_O D_S}{c} \left[\frac{1}{2} (\theta - \theta_s)^2 - \psi \right]}{c \int_{\mathcal{L}}}, \quad (7.37)$$

entre la trajectoire réelle et la trajectoire non perturbée. Le premier terme, quadratique en $(\theta - \theta_s)$, a une origine purement géométrique et reflète la différence de longueur entre

le vrai chemin de lumière et celui imperturbable. Le deuxième terme a une origine relativiste et est identique à l'effet Shapiro (voir chapitre 1), $c\delta t = \frac{1}{2}(1+z)\int dz/c^2$ où le facteur $(1+z)$ prend en compte l'expansion cosmique ; elle est alors approximative $^{\wedge} (1+zt)$ dans l'approximation lentille mince. Toutes les équations que nous avons obtenues peuvent être dérivées en recherchant l'extremum de la fonction $T(\hat{\theta}, \hat{\theta}_S)$. La figure 7.6 compare cette approche à celle basée sur l'équation de la lentille. Cette fonction possède diverses propriétés intéressantes.

- La différence $T(0,0_S) - T(0,0_S)$ des délais entre deux points stationnaires donne le délai de réception des deux images. Toute variabilité de la source est d'abord observée dans l'image correspondant à la plus petite valeur de $r(0,0_S)$.
- Il existe trois types de points stationnaires, les maxima, les minima et les points selle, dont la nature dépend du signe des valeurs propres de la matrice $T = d^2 T / d\theta_o d\theta_b$, qui est simplement la matrice de distorsion. Il décrit donc la courbure locale des surfaces isotimes. On peut ainsi définir trois types d'images.
 - Type I : images correspondant aux minima de T . Les deux valeurs propres sont positives et donc $\det > 0$ et $\text{Tr}.A > 0$.
 - Type II : images correspondant aux points sels de T . Les deux valeurs propres sont de signe opposé, et donc $\det < 0$.
 - Type III : images correspondant aux maxima de T . Les deux valeurs propres sont négatives, et donc $\det > 0$ et $\text{Tr}.A < 0$.
- Les images de type I et II ont une parité positive et seules les images de type III ont une parité négative.

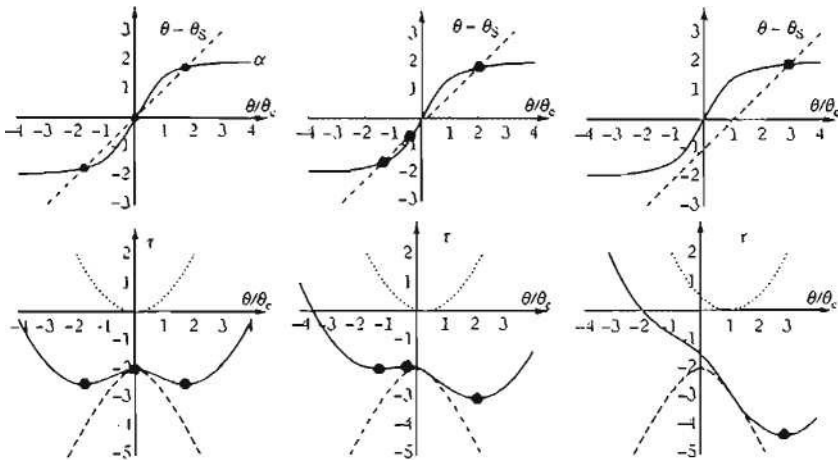


Fig. 7.6 Nombre d'images pour une lentille isotherme lisse déterminé par l'équation de la lentille (en haut) ou par le retard (en bas) pour une source localisée à $\delta s / \hat{\theta}_c = 0, 0.3, 1$ de gauche à droite. Les paraboles en pointillés représentent la contribution géométrique, tandis que l'autre courbe en pointillés représente la contribution gravitationnelle.

7. 1.1.3 Modèles d'objectifs

La séparation entre les multiples images et la position des lignes critiques nous permettent de reconstruire la distribution de densité surfacique de la lentille. Le but est d'ajuster cette répartition et la position de la source pour que $\theta_s = 0$, $-a(\theta_s)$ pour toutes les images

Nous présentons ici quelques modèles de lentilles illustrant les effets évoqués dans les sections précédentes.

7. 1.1.4 Sphère isotherme singulière

UN mode simple! car la distribution de masse d'une galaxie repose sur l' hypothèse selon laquelle les étoiles se comportent comme un gaz parfait confiné dans un potentiel gravitationnel. Son équation d'état sera donc $P = \rho kT/m$, où m est la masse de chaque étoile, supposée toutes égales, et $p = Nm/V$. La température est liée à la dispersion de la vitesse par $ma^2 = kT$. Pour un gaz isotherme, T est uniforme dans le gaz de sorte que l'équation d'équilibre hydrostatique implique que $dP/dr = -GM(r)/r^2$, avec $dM/dr = 4\pi r^2 \rho$, en supposant une symétrie sphérique. En conséquence, le profil de densité d' une telle galaxie est

$$\rho(r) = \frac{1}{2\pi(7N r^2)}, \quad (7.38)$$

Cette distribution est singulière au centre et la masse totale contenue dans une sphère de rayon r , $M(r)$, croît avec r , de sorte que la vitesse képlérienne d'une particule test sur une

$$v^2(r) = \frac{GM(r)}{r} = 2\sigma_v^2,$$

orbite circulaire à la distance r du centre est

$$(7.39)$$

qui est constante. Nous pouvons également conclure que la densité surfacique est

$$\Sigma(b) = \frac{\sigma_v^2}{2G_N} \frac{1}{b}. \quad (7.40)$$

En utilisant (7.26) et (7.24), nous trouvons que l'angle de déflexion est indépendant du paramètre d'impact et est donné par

$$a = 4\pi \frac{\sigma_v^2}{c^2} r = 1,4 \left(\frac{\sigma_v^2}{c^2} r \right) \text{ arcsec}. \quad (7.41)$$

Le rayon d'Einstein est obtenu en résolvant (7.14) pour $\theta_s = 0$ et est $\theta_E = (-DLS/-DOS) \angle$. L'équation de la lentille (7.14) prend la forme simple $0 \pm = 0_s \pm \theta_E$ et il n'y a plusieurs images que si la source est à l'intérieur de l'anneau d'Einstein ($0_s < \theta_E$) et que leur séparation angulaire est toujours $A_0 = 2\theta_E$. En fait, il existe une troisième image avec un flux nul à $0 = 0$ qui devient visible si le profil est lissé à $r = 0$. Le grossissement (7.33) des deux images est $p_{\pm} = (1 \mp \theta_E/\theta_s)^{-1}$. Si $0_s > \theta_E$ alors il n'y a qu'une seule image localisée à $0 = 0_g + \theta_E$. La Figure 7.6 compare la résolution graphique de ce système à partir des équations de lentille et celle obtenue en recherchant l'extremum du retard.

7.1.1.5
Autres modèles de halos

Le modèle isotherme singulier n'est pas réaliste pour diverses raisons. En particulier, la lentille doit avoir un noyau où la densité ne diverge pas. Le tableau 7.2 résume les propriétés optiques de certains modèles fréquemment utilisés à symétrie sphérique.

Tableau 7.2 Propriétés de certains modèles de halos à symétrie sphérique.

Modèle d'objectif		
Masse ponctuelle	$(4G_N Af/Pc^2) \text{En } 6$	
Sphère isotherme singulière	$(D_{os}/D_{os})4ir(o^2/c^2)0$	$4-rre^2/c^2$
Sphère isotherme lissée	$(D_{LS}/D_{os})4tr(o^2/c^2)(0_c+\hat{o}^2)^2$	$4Tt(ol/c^2)0/(0^2+0^2)^2$
Feuille de masse	$\kappa.0^2/2$	$(D_{os}/DL_s)^\wedge$

Ces modèles sont encore trop idéalisés pour décrire de vraies galaxies. Il faut notamment aller au-delà des modèles à symétrie sphérique . Par exemple, on peut utiliser des modèles elliptiques [6] pour lesquels la densité surfacique prend la forme

$$E(0)=Eo\left[\xi+(1-\frac{b^2}{a^2})\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\right]^{-1/2} \bullet \tag{7-42}$$

En général, le potentiel projeté est difficile à obtenir. On peut donc choisir de modéliser directement ce potentiel en supposant qu'il est elliptique

$$\varphi_{os}^{LJ}=\frac{GM}{a}\left[\frac{a}{r}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\right] \bullet \tag{7-43}$$

La figure 7.7 représente les lignes critiques et caustiques pour un modèle de lentille elliptique.

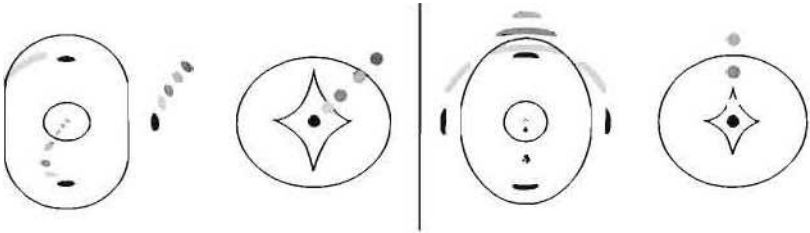


Fig. 7.7 Deux exemples de lentilles gravitationnelles. Pour chacun d' eux, la figure de gauche représente le plan image avec les lignes critiques et la figure de droite le plan source avec les lignes caustiques et les différentes positions des sources. De la Réf. [4].

7.1.1.6
Effet de l'environnement

Une galaxie n'est pas isolée, en général elle appartient à un amas ou à un groupe qui induit

une distorsion gravitationnelle externe de l'ordre de quelques pour cent. Un autre problème se pose

en raison de la dégénérescence des feuilles de masse. Ajoutons une feuille de masse de densité constante tout en effectuant la transformation

$$K \rightarrow K(1-s) + sK, \quad \#s \sim 's_0s- \quad (7.44)$$

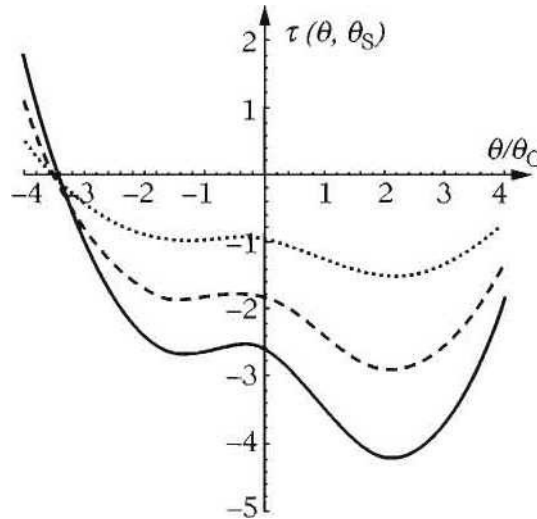


Fig. 7.8 Modification de la fonction $\tau(\theta, \theta_s)$ pour un profil isotherme lissé lors de l'ajout d'une feuille de masse caractérisée par $s = 1$ (tirets), $s = 0,5$ (points) et $s = 1,5$ (ligne continue). Les positions angulaires des maxima et minima restent inchangées.

L'angle de déviation se transforme *alors* en $\alpha \rightarrow \alpha(1-s)$ de sorte que l'équation de lentille (7.20) reste inchangée puisqu'elle n'est multipliée que par le facteur global s . De manière analogue, en négligeant le terme θ du retard (7.37) (de toute façon ce n'est pas observable puisque seules les différences $\Delta\tau = \tau(\theta, \theta_s) - \tau(0, \theta_s)$ entre différentes images peuvent être mesurés) et en remarquant que le potentiel projeté se transforme comme $\Phi \rightarrow \Phi(1-s)$, puis $\Delta\tau \rightarrow \Delta\tau(1-s)$. Tous les délais sont ainsi dilatés de la même manière, conservant la structure de l'image. Puisque le plan source est dilaté de s , tous les grossissements sont amortis de $1/s$, laissant ainsi les grossissements relatifs inchangés (voir Fig. 7.8).

7.1.2 Lentille par les galaxies et les amas de galaxies

Cette section décrit quelques applications de la lentille gravitationnelle dans le régime des lentilles minces. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur aux Réf. [7, 8] pour microlentilles, selon Réf. [9] pour les arcs géants et le régime des arçlets dans les amas de galaxies, aux Réf. [3, 10] pour la lentille sur les quasars, et aux Réf. [4, 11, 12] pour un examen complet de toutes les observations.

7.1.2.1 Les microlentilles dans notre galaxie

Si un corps massif passe devant une source de fond, il peut induire une variation temporaire de sa luminosité apparente même si la masse de la lentille est trop petite pour induire

des images multiples ou des détections importantes. Ce phénomène est alors appelé *microlentille*.

L'estimation (7.4) montre qu'une lentille de quelques masses solaires a un rayon d'Einstein de quelques milliarcsecondes, ce qui est bien en dessous de la résolution spatiale de nos instruments (même si plusieurs images étaient produites, nous ne pourrions pas les distinguer chacune d'elles). Cependant, si la source passe près du rayon d'Einstein ($0s - 0E$). le grossissement total (7.11) serait ~ 1.34 . Ainsi, si le paramètre d'impact de la source est inférieur à $0E$, le pic de la courbe de lumière est $> 1,34$. Cela correspond à une variation de magnitude supérieure à 0,32 magnitude, qui est en principe détectable.

Paczynsky [7] a eu l'idée d'utiliser ces phénomènes de microlentilles pour contraindre la densité des MACHO (objets halo compacts astrophysiques massifs) dans notre Galaxie. Le temps caractéristique d'évolution de la luminosité d'une source dépend du rayon d'Einstein et de la vitesse de la lentille, v ,

$$\tau_* = \frac{D_{OL}\theta_E}{v} \quad (7.45)$$

Using the estimate (7.4) for the Einstein radius, we get

$$\tau_* = 0.214 \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{1/2} \left(\frac{D_{OL}}{10 \text{ kpc}} \right)^{1/2} \left(\frac{D_{LS}}{D_{OS}} \right)^{1/2} \left(\frac{v}{200 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}} \right)^{-1} \text{ years.} \quad (7.46)$$

Si la lentille est située dans notre Galaxie et la source dans le grand nuage de Magellan, alors D_{LS}/D_{OS} est d'ordre unité. Ensuite, un échantillonnage de courbes de lumière avec des intervalles de temps compris entre une heure et un jour permet de détecter des masses comprises entre $10^{-5} M_\odot$ et $10^{-2} A7_\odot$. Il faut cependant souligner que la mesure de r , ne donne pas directement accès à la masse du cristallin.

7.1.2.2 Courbes légères

La courbe de lumière de la source en fonction du temps peut être obtenue en utilisant (7.11) pour l'amplification par une source ponctuelle, où $x(t) = x/u^{\wedge}_{\text{in}} + o^{-2} t$, u_{min} étant le le paramètre d'impact en unités du rayon d'Einstein et a est lié au temps caractéristique (7.46). De telles courbes de lumière sont représentées sur la figure 7.9 pour divers paramètres d'impact.

$$A(t) = \frac{2 + x^2}{x\sqrt{4 + x^2}}, \quad (7.47)$$

Les deux paramètres, a et u_{min} , peuvent ainsi être déterminés en ajustant une courbe de lumière observée. La largeur de la courbe donne accès et il existe une relation entre l'amplitude du pic et u_{min} . Ceci n'est cependant pas suffisant pour déterminer l'ensemble des caractéristiques du Système puisqu'il existe trois inconnues (M , Dot et v).

7.1.2.3 Coupe transversale

Pour évaluer la probabilité d'une microlentille, il est pratique de définir une section transversale comme la surface autour de la lentille à travers laquelle la lumière émise par la source doit

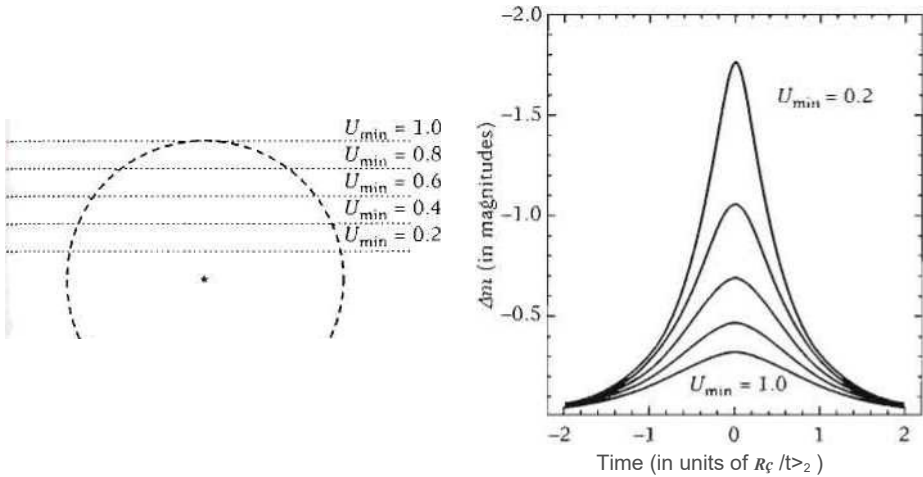


Fig. 7.9 Light curves during a microlensing event for different values of the impact parameter in units of the Einstein radius.

passer afin d'être soumis à un grossissement supérieur à A . Pour une source ponctuelle, la surface de cette surface est $7\pi R_E^2 \sqrt{1 - A^2}$ et donc

$$N(> A) = \frac{2M}{\Sigma_{\text{crit}}} \frac{1}{A^2 - 1 + A^2 - 1} \tag{7.48}$$

en utilisant (7.11). Le nombre de lentilles avec un grossissement supérieur à A est donc donné par

$$N(> A) = \int_{J < D_{OL}} I dV n(D_{OL}) p(> A). \tag{7.49}$$

Cette quantité peut être exprimée en termes de profondeur optique τ , définie comme l'intégrale de la surface contenue à l'intérieur de l'anneau d'Einstein de toutes les lentilles dans un angle solide $\Delta\Omega$,

$$\tau = \frac{1}{\Delta\Omega} \int_{D_{OL}} \int_{\Delta\Omega} dV n(D_{OL}) \pi \theta_E^2. \tag{7.50}$$

Puisque $dV = D_{OL}^2 dD_{OL} d\Omega$ et exprimer cette expression se réduit à

$$\tau = \frac{4\pi G_N}{c^2} \int_0^{D_{OL}} D_{OL}^2 dD_{OL} \int_{\Delta\Omega} n(D_{OL}) \pi \theta_E^2 d\Omega \tag{7.51}$$

où ρ_{macho} est la densité des MACHO. En introduisant $x = D_{OL}/D_{OS}$, on obtient finalement

$$\tau = \frac{4\pi G_N}{c^2} \int_0^1 x^2 dx \int_{\Delta\Omega} n(x) \pi \theta_E^2 d\Omega \tag{7.52}$$

Nous avons supposé que l'espace étant euclidien à ces échelles, nous pouvons faire l'approximation $\theta_E = D_{OL} \alpha$. Pour une densité constante, nous obtiendrons ainsi $\tau =$

$(2\% j 3)G_N \rho_{\text{MACHO}} r^2$ ■ Les estimations théoriques prédisent que $r \sim 10^{-6}$. Le nombre d'événements qui produisent un grossissement supérieur à A est donc donné par

$$N(> A) = \frac{2\tau}{A^2 - 1 + A\sqrt{A^2}} \quad (7.53)$$

pour $A = 1,34$, $N \sim r$ et plusieurs millions d'étoiles doivent être surveillés avant de pouvoir observer un événement.

7.1.2.4 À la recherche des MACHO

Plusieurs expériences ont réalisé cette idée afin de contraindre la densité de MACHOs dans le halo de notre Galaxie.

Le principal problème réside dans la quantité de données nécessaires (plusieurs millions d'étoiles sont observées) et dans les détections qui ne sont associées à aucun effet de lentille. En particulier, une surveillance automatisée permettra de détecter de nombreuses étoiles variables et supernovæ. Deux critères peuvent être utilisés pour distinguer le grossissement induit par la lentille de ces variations intrinsèques ; la courbe de lumière doit être symétrique et le grossissement doit être achromatique.

La figure 7.10 résume les résultats des deux expériences MACHO [13] et EROS [14] qui ont recherché les effets de microlentilles sur les étoiles du grand nuage de Magellan.

7.1.2.5 Lentille gravitationnelle par les galaxies

Quasars

Le premier quasar multiple, QSO0957+561 ($z = 1,41$), a été découvert en 1979 [16] et nous en connaissons aujourd'hui plus de 10 4. La microlentille a été initialement observée sur les quatre images du quasar QSO2237-I-0305 [17] en 1989. Le déflecteur est une galaxie spirale à redshift $z = 0,04$. Les variations non corrélées de la luminosité des quatre images permettent d'établir que la microlentille est induite par les étoiles de la galaxie. Dans cette situation, un réseau caustique complexe apparaît et peut être utilisé pour imposer des contraintes sur la structure et la taille intrinsèque de la source. De plus, on peut déterminer le spectre de masse de ces microlentilles et montrer ainsi que sa distribution stellaire est analogue à celle de notre Galaxie. Notons quelques-uns des résultats obtenus par ces observations.

- L'image centrale est absente dans presque toutes les observations. Cela implique qu'il est très amorti et que presque toutes les galaxies doivent avoir un rayon de noyau très petit, < 200 pièces.
- On peut montrer [18] que la plupart des galaxies doivent avoir un halo de matière noire avec une dispersion de vitesse de l'ordre de 220 ± 20 kms/h. Si ce n'était pas le cas, aucune image multiple avec une séparation angulaire supérieure à $2''$ ne serait produite. La plus grande taille estimée pour un halo est celle de la lentille galactique QSO0957+561 qui est supérieure à $15 h^{-1}$ kpc.
- La profondeur optique dépend de la distribution du redshift des lentilles. Si les galaxies se sont formées récemment, leur principale contribution proviendrait des galaxies à faible redshift.

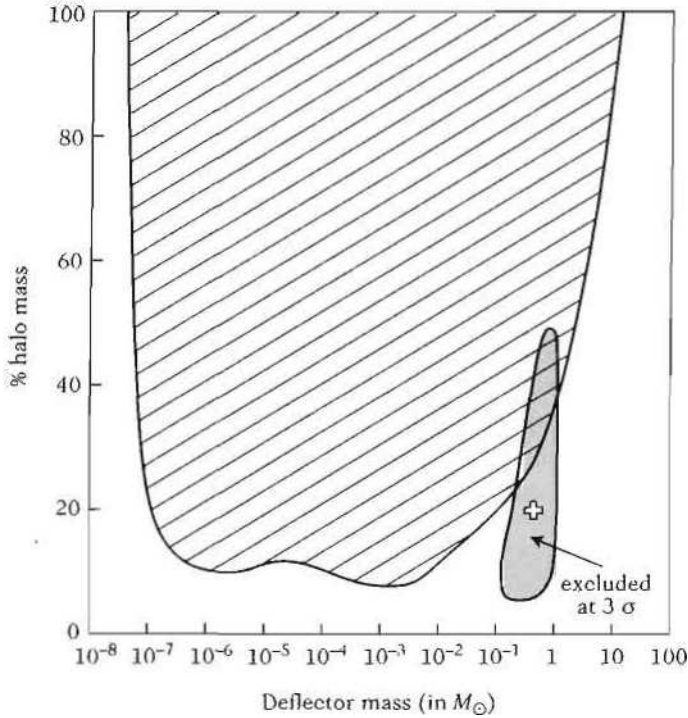


Fig. 7.10 Constraints stemming from the results of the MACHO (grey tint) and EROS (hatched) experiments on the contribution of MACHOs to the halo of our Galaxy (modelled by a mass of $4 \times 10^{11} M_{\odot}$ and a radius of 50 kpc). The allowed région is the one below the U curve. From Ref. [15]

En utilisant les informations sur le redshift des lentilles et des sources, on peut conclure que la plupart des galaxies doivent avoir été formées avant $z \sim 0,8$ en supposant un mode de l'Univers d'Einstein-de Sitter) [19].

- Le modèle standard de matière noire froide prédit la formation de halos sombres , qui tendent à induire davantage de paires de quasars avec de grandes séparations que celles observées. Cela pourrait poser un problème potentiel pour ce scénario mais la conclusion dépend des propriétés de ces halos (rayon du noyau...) et du spectre de puissance de la matière noire [20] . Cela illustre le potentiel de cet outil pour tester la distribution de la matière noire.
- Une constante cosmologique a pour effet d' augmenter dV/dz at. grands redshifts. Cela implique [21] que le nombre relatif de sources lentillées doit rapidement augmenter avec A , ce qui peut ainsi être estimé en utilisant la probabilité de lentille. La limite supérieure actuelle obtenue à partir de cette méthode est $QAO < 0-65$ ($2 < r$) pour un univers fiat [22]. Une autre approche [23], utilisant la comparaison entre les séparations observées entre plusieurs quasars et celles attendues compte tenu des redshifts des sources , a conduit à $0,48 < f_A < 0,93$.

- Une dernière application, non encore exploitée, concerne le grossissement différentiel par les étoiles du renflement, de petit rayon d'Einstein, du disque d'accrétion des quasars. Cet effet pourrait permettre de sonder le disque et d'étudier sa structure.

Constante de Hubble

La mesure du délai entre différentes images d'une même source donne accès à la constante de Hubble, comme le note Refsdal [24], puisque le délai est proportionnel à HQ .

Pour comprendre cela, considérons le modèle d'une lentille isotherme. L'équation de l'objectif donne accès à $\delta - 0\delta$ (qui est proportionnel à l'angle de déflexion) pour chaque image. On obtient que $\delta \propto \sqrt{0}/2 \sim \sqrt{0}/2$. Pour une lentille isotherme, la déviation l'angle est constant de sorte que le premier terme ne contribue pas et $\delta r \propto \sqrt{0} \sim \sqrt{0}$ — $= 2\#g$. On en déduit finalement que

$$c\delta r = 87r \sqrt{0} (1 + \dots) \quad (7.54)$$

Dans cette équation, seul $E > OL$ est proportionnel à HQ . Bien entendu, la détermination de HQ dépend du modèle de lentille et est très sensible à l'existence d'un feuillet de masse (voir Réf. [25] pour une modélisation de ces effets).

Par exemple, pour le quasar QSO 957+561, on peut montrer [26] que

$$h = (0,82 \pm 0,06)(1 - K) f \quad \Delta 1,14 \text{ année } J \quad (7.55)$$

où K est la convergence inconnue du halo contenant la galaxie. Pour mesurer de tels retards, il faut donc surveiller ces galaxies pendant plusieurs années. Pour QSO 957+561, le retard est de

$$\delta r = (417 \pm 3) \text{ jours.} \quad (7.56)$$

Puisque AC est positif, on en déduit une borne supérieure pour la constante de Hubble ($h < 0,88$). AC peut être estimé à partir de la faible lentille, donnant $n = 0,24$ à $0,12$, ce qui nous permet de conclure [27] que $h = 0,49 - 0,74$. Les mesures de dispersion de vitesse des galaxies peuvent également être utilisées pour contraindre K et donne [28] $h = 0,66 \pm 0,07$.

Cette méthode nécessite de bien comprendre la géométrie de la lentille et celle de son environnement. Il présente cependant certains avantages. Cela évite par exemple de construire une échelle de distance calibrée pas à pas et de travailler avec des sources à grands redshifts ($z \sim 0,5$). Si le potentiel du déflecteur est parfaitement connu, le résultat ne devrait pas dépendre de la physique de l'objet particulier (céphéïdes, supernovæ...), et la seule hypothèse sous-jacente est la validité de la relativité générale dans la limite des champs faibles. **Contraintes sur la densité des objets compacts**

Il a été suggéré qu'une partie importante de la matière noire pourrait se trouver dans des objets compacts. La densité d'un tel composant de la matière noire peut être limitée par les effets de microlentille.

Pour cela, il faut estimer l'optica ! profondeur (7,50) dans le contexte cosmologique. On ne peut plus supposer que $DES = Dos \text{ --- } Dot$ et il faut utiliser les expressions obtenues au chapitre 3. En supposant une densité p_v / constante, on obtient

$$r(z_s) = \frac{3Q_sSQ \int^{z_s} z_{>Ls}(2.2_s) E_{>OL(*)} dz}{2 \int_n Dos \zeta z_s) D''_o E(z)' \text{ où nous avons utilisé le}} \quad (7-57)$$

fait que $dF(z) = DQ_1 dydO^2/(1+z)^2$ et $dx = dz/H(z)$. Pour un univers d'Einstein-de Sitter, on obtient

$$r(z_s) = 3 - \left[(z_s + 2 + 2y\sqrt{T}) \ln(1 + z_s) - 4z_s \right] \quad (7.58)$$

Ce taux est proportionnel à $Q_{jv/o}$ de sorte que le nombre d'événements dans un catalogue donné est une estimation directe de la valeur de ce paramètre. Différentes analyses peuvent être utilisées pour exclure $CLMO = 1$ et donner la contrainte $QMO < 0,05$ pour les masses $M = 10^6 \text{ --- } 10^{12} M_\odot$.

7.1.2.6 *Objectif par clusters g&laxy*

Les premiers arcs géants ont été découverts en 1986 dans les amas Abell 370 [29], Abel ! 2218 et Cl 2214 [30]. Les nombreuses propriétés du champ de distorsion des amas permettent de reconstituer son potentiel gravitationnel et ainsi d'étudier sa structure.

Reconstruction de la distribution de la matière noire

Avec les analyses de la dispersion de vitesse et de l'émission de rayons X, les lentilles gravitationnelles fournissent une méthode indépendante pour déterminer la masse totale des amas.

De fortes lentilles apparaissent principalement dans les zones centrales de l'amas ($< 50b. ' ^1$ kpc) et peut être utilisé pour mesurer la masse interne. Une première estimation de cette masse est donnée par $M(< 0E)$ puisque, pour une lentille sphérique, la position des lignes critiques donne une mesure du rayon d'Einstein. Cette estimation a une précision de l'ordre de 50% et dépend fortement du degré d'asymétrie du cluster. Lorsque plusieurs arcs et plusieurs images sont présents (voir Fig. 7.5), la modélisation du cluster est affinée. On peut alors procéder par itération : une fois un premier modèle obtenu, la position d'autres images multiples peut être prédite et leur présence peut être vérifiée. Dans ce cas, on peut déduire la morphologie attendue déduite du modèle et l'itérer. Ces modèles deviennent suffisamment précis pour déterminer les redshifts des arcs et arceaux [31].

gaz chaud de l'amas émet un rayonnement de Brehmsstrahlung dont l'intensité dépend de la densité des ions (principalement des protons) et du nombre d'électrons, de la température du gaz ainsi que de sa composition chimique. A partir des mesures de l'émission de rayons X et du profil de température, on peut reconstruire le profil de masse de l'amas, $Af(r)$. L'écart entre les mesures de rayons X et celles des lentilles est principalement attribué à l'influence des sous-structures sur l'émission de rayons X et à la triaxialité du potentiel tridimensionnel.

Ces méthodes nous ont permis de déterminer des propriétés génériques de la distribution de matière noire en amas, indépendamment de tout modèle donné. Les amas semblent être dominés par la matière noire et leur rapport masse-luminosité typique serait $M/L > 100A\tilde{Q}/LQ$. La répartition de la matière noire semble suivre celle de la matière lumineuse

, notamment dans les régions centrales. Le rayon de courbure de nombreux arcs géants est comparable à leur distance au centre de l'amas, ce qui implique que le rayon du noyau de l'amas doit être du même ordre de grandeur. Les éléments internes des clusters comportent de nombreuses sous-structures.

Biais de grossissement

Le biais de grossissement exprime deux effets simultanés et opposés au grossissement gravitationnel : il augmente le flux reçu devant les galaxies soumises à la lentille et permet ainsi de détecter un plus grand nombre d'objets. mais il dilate aussi les angles solides considérés de même quantité et diminue ainsi la densité des galaxies.

Si $n_0(\theta, z)$ est le nombre de galaxies en absence de lentilles par unité d'angle solide avec un flux supérieur à f à des redshifts compris entre z et $z + dz$, alors la densité de galaxies dans une direction $\hat{\theta}$ devient, à cause du grossissement,

$$n(f, z) = \frac{1}{\mu(\theta, z)} n_0 \left[\frac{f}{\mu(\theta, z)}, z \right]. \quad (7.59)$$

Le grossissement peut ainsi augmenter ou diminuer localement le nombre de galaxies. Si nous n'avons accès qu'au nombre intégré, nous pouvons faire l'hypothèse simplificatrice que $n(\theta) \propto \mu^{-1}$. En supposant que le nombre de galaxies en fonction de la magnitude a un slope α alors

$$\hat{\theta} = \mu^{-1/\alpha} \quad (7.60)$$

Un effet n'apparaît donc que si $\alpha > 0.4$. La variation de la densité des objets en fonction de la distance au centre de l'amas donne donc une courbe de déplétion qui permet de mesurer le grossissement et, par exemple, de localiser une ligne critique même si aucun arc géant ne lui est associé [32].

Paramètres cosmologiques

Une fois qu'un modèle robuste de l'amas est construit, on peut utiliser la redondance des informations pour mesurer les paramètres cosmologiques à l'aide de méthodes géométriques. Les équations de lentille peuvent toujours être décomposées comme

$$\mu = \frac{D_s}{D_{s0}}$$

La fonction $\mu = D_s/D_{s0}$ dépend du redshift source et f est une fonction qui dépend de la modélisation du cluster. Si l'on a accès à différents ensembles d'images multiples centrées sur la même lentille gravitationnelle, alors on peut estimer

$$\mu(z)$$

On obtient ainsi une mesure de $\mu(z)$ à différents redshifts. Cette méthode, simple dans son principe, est cependant difficile à appliquer en pratique car la fonction f n'est pas bien connue.

Détection de galaxies lointaines

Une source proche d'un caustique peut être énormément amplifiée. Géant, les arcs peuvent ainsi permettre l'observation de galaxies avec une faible luminosité de surface avec un redshift élevé. La lentille joue ici le rôle d' un télescope gravitationnel permettant d'observer des objets qui autrement seraient indétectables

Les informations ainsi obtenues sur le redshift auquel se forment les premières structures de l'Univers permettent de contraindre les modèles de formation de structures à grande échelle et les paramètres cosmologiques.

Actuellement, plusieurs (5 à 10) galaxies avec un redshift supérieur à 7 ont été détectées, parmi lesquelles une candidate a un redshift de 10. Cette galaxie [33], qui est proche d' une ligne critique, a un grossissement estimé de 25 à 100. . Dans un univers fiat, avec $Q_{AO} = 0,7$ il se serait donc formé environ 460 millions d'années après le Big Bang

7.1.3 Distorsion gravitationnelle par la structure à grande échelle

Jusqu'à présent, nous n'avons considéré que les effets de la lentille gravitationnelle dans le régime des lentilles minces. Les faisceaux lumineux émis par les galaxies sont néanmoins continuellement déformés et déviés par le champ gravitationnel des structures à grande échelle de l'Univers. Ces effets sont faibles et ne donnent pas lieu à plusieurs images. Cependant, la distorsion de la forme des galaxies lointaines et les statistiques de ces distorsions reflètent certaines propriétés de la structure à grande échelle.

7.1.3.1 Équation de Sachs

Nous commençons par étudier la déformation d'un fibré géodésie lors de sa propagation à travers un espace-temps inhomogène [34]. Comme nous l'avons vu au chapitre 1, la lumière suit les géodésiques nulles . Deux géodésiques d'un même fibré seront soumises à une déviation relative définie par l'équation de déviation géodésie (1.118).

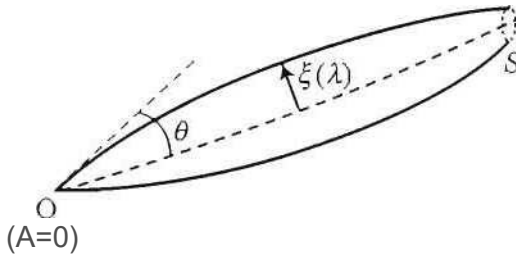


Fig. 7.11 Déviation of a géodésie bundle converging at the observer.

Les différentes géodésiques d'un fibré géodésie peuvent être paramétrées comme suit

$$\hat{\gamma}(\text{UNE}) = \hat{\gamma}(\text{UNE}) + \hat{\gamma}(\text{UNE}), \quad (7.62)$$

où est la ligne d'univers d'une géodésie arbitraire du fibré choisi comme référence et est un vecteur caractérisant le déplacement entre deux géodésiques voisines (voir Fig. 7.11) ; A est un paramètre affine le long de la géodésie de référence. On suppose qu'elle est nulle en O (position de l'observateur) et augmente vers le passé.

En O , on peut choisir une base orthonormée, (A^μ, n_j) composée de la tangente vecteur à la référence géodésie nulle,

du vecteur tangent à la ligne du monde de l'observateur, z^μ , et de deux vecteurs de type espace dans le plan orthogonal à la ligne de visée. Ils satisfont ainsi

$$k^\mu k_\mu = 0, \quad u^\mu u_\mu = -1, \quad n_a^\mu n_b^\mu = \delta_a^b, \quad n_a^\mu k_\mu = n_a^\mu u_\mu = 0, \quad (7.63)$$

avec $a, b = 1, 2$. A partir de cette base définie en O , on peut construire une base en tout point de la géodésie de référence par transport parallèle (soit selon $\frac{D}{d\lambda} = 0$ et $\frac{D}{d\lambda} = 0$). Tout vecteur peut alors être décomposé en ¹

$$(7.64)$$

α

et on peut toujours mettre $\xi_0 = 0$ puisque deux valeurs différentes de λ paramétrisent toujours les mêmes géodésiques. L'équation de propagation pour découle de l'équation de déviation géodésique (1.118)

$$\frac{D^2}{d\lambda^2} \xi^\mu = R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} k^\nu k^\alpha \xi^\beta \quad (7.65)$$

où $R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}$ est le tenseur de Riemann et $Z/dA = A : M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. En utilisant la décomposition (7.64), cette équation devient

$$\frac{d^2}{d\lambda^2} \xi = \mathcal{R} \cdot \xi, \quad \mathcal{R}_a^b = R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} k^\nu k^\alpha n_{a\mu} n^{b\beta} \quad (7.66)$$

où nous avons utilisé la notation $\xi = \xi_a$ et $TL \xi = R^b{}_a \xi^a$. Ici a et b ne sont que des étiquettes et non des indices tensoriels. La matrice $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}^b{}_a$, peut être décomposée en termes de tenseurs de Ricci et de Weyl comme

$$\mathcal{R}_a^b = -\frac{1}{2} R_{\mu\nu} k^\mu k^\nu \delta_a^b + C^\mu{}_{\nu\alpha\beta} k^\nu k^\alpha n_{a\mu} n^{b\beta} \quad (7-67)$$

La linéarité de l'équation géodésique implique que ξ est lié à la valeur initiale de sa dérivée par une transformation linéaire

$$\xi(\lambda) = \mathcal{D} \frac{d\xi}{d\lambda} \bigg|_{\lambda=0} \quad (7,68)$$

'A priori we should have added a term Au in this decomposition. But, it can be shown that

$= -A\xi$, avec $\xi = -(t c^p u_m)$, est constant le long de la géodésie. Il s'ensuit que ce terme peut être mis à zéro sans perte de généralité.

Le fibré convergeant en O , $\xi(0) = 0$ et (7.66) donne une équation d'évolution pour la matrice $\mathcal{D}$?

$$\frac{d^2}{d\lambda^2} \mathcal{D} = \mathcal{R} \cdot \mathcal{D} \quad (7.69)$$

Les conditions initiales en O sont alors donnés par

$$\mathcal{D}(0) = 0, \quad \frac{d}{d\lambda} \mathcal{D}(0) = I \quad (7.70)$$

je étant la matrice unitaire 2×2 . La direction d'observation, θ , et de la source sans lentille, θ_s , sont liés au champ de déplacement par

$$\theta = \frac{d\xi}{d\lambda}(0), \quad \theta_s = \frac{\xi(\lambda_s)}{D_A(\lambda_s)} \quad (7.71)$$

où λ_s est la valeur du paramètre affine à la source et où la distance D_A est par construction la distance angulaire. On trouve alors de (7.68) que

$$\theta_s = \mathcal{A} \cdot \theta \quad \text{with} \quad \mathcal{A} = \frac{\mathcal{D}(\lambda_s)}{D_A(\lambda_s)} \quad (7.72)$$

On reconnaît la matrice de déformation (7.28) qui peut être décomposée, comme précédemment, en une convergence n et un cisaillement cosmique, γ [voir (7.30)].

7.1.3.2 Application à la cosmologie

Les équations que nous venons de dériver ne dépendaient d'aucune hypothèse concernant la symétrie espace-temps. Nous les appliquons maintenant aux cas pertinents pour la cosmologie.

Espaces homogènes et isotropiques

Pour un espace-temps de Friedmann-Lemaître, la métrique prend la forme (3.3) et est conforme à la métrique statique, $g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a^2(t) \gamma_{ij} dx^i dx^j$ avec les notations Chapter 3. de

Pour résoudre (7.69) nous utilisons le fait que deux espaces conformes ont les mêmes géodésiques nulles (voir section 6.1) et auront donc la même matrice optique. L'équation (7.69) prend alors la forme simple où K est la courbure de l'espace tridimensionnel de

$$\frac{d^2}{d\lambda^2} \mathcal{D} = -K \mathcal{D}, \quad (7.73)$$

métrique γ_{ij} [voir (3.4)]. La solution de cette équation est

$$\mathcal{D}(\lambda) = \frac{1}{K} \left(\frac{D(\lambda)}{D(\lambda_s)} \right)^2 \mathcal{D}(\lambda_s), \quad (7.74)$$

je étant défini par (3.5) tel que $D(\lambda) = \int_{\lambda_s}^{\lambda} \frac{d\lambda'}{a(\lambda')}$, où D a été exprimé à l'aide de (3.74).

Contributions des perturbations

Pour prendre en compte les effets des inhomogénéités, nous travaillons dans le cadre de la théorie des perturbations cosmologiques présentée au chapitre 5. La métrique espace-temps

est supposé être de la forme $ds^2 = \hat{U}^2(T)(5_{MI} / + h_{JL})dr^J dr^L$ et on développe la matrice $T_{>}$ en perturbations comme $T_{>} = T_{>}^{(0)} + \dots$, le premier terme étant donné par (7.74).

Au premier ordre, (7.69) se réduit à

$$dX = \int_X(A) \gamma^{\hat{A}}(A), \tag{7.75}$$

qui est la solution intégrale

$$\tilde{I}^{>^{(1)}}(A) = \int_0^{\infty} \gamma^{>}(A') / \gamma^{>}(AA') - R_{>}^{>}(A') dA', \tag{7.76}$$

ce qui implique que la matrice d'amplification est donnée par

$$\gamma^{>^{(n)}}(A) = \int_{J_0} J_X(A) \sim^X \wedge^X J_X^a \parallel \cdot \cdot \cdot dX'. \tag{7.77}$$

Enfin, il faut calculer et remonter à l'espace-temps initial, celui en expansion. La définition (7.66) implique que ²

$$27\mathfrak{L}^{(n)} = h^{\wedge}_{610} k^{\wedge} k^{\wedge} n^{\wedge} n^{\wedge}. \tag{7.78}$$

En utilisant maintenant la décomposition (5.52) en jauge newtonienne pour les modes scalaires uniquement, on obtient

$$7\mathfrak{L}^{(1)} = -\delta_{ab} (\mathfrak{S} + T) = -2cU\mathfrak{L}, \tag{7.79}$$

•où la seconde égalité n'est valable que si la pression anisotrope est négligeable, ce qui est a priori le cas à l'ère de la matière [voir (5.118)]. La matrice d'amplification dans un espace-temps cosmologique peut ainsi être exprimée en termes de potentiel gravitationnel.

$\gamma^{>}U = f_{\hat{a}} \gamma^{>}W(\hat{a}, x), = 4 / \star$
$c \int_0^{\infty} J_X(X)$
(7.81)

La distorsion est ainsi obtenue par intégration le long de la géodésie non perturbée et prend une forme analogue à celle obtenue dans le cas de l'approximation lentille mince, mais en introduisant un potentiel projeté qui prend en compte toute la distribution de matière. Notons qu'il s'agit donc d'une expression du premier ordre si bien que toutes les contributions provenant du couplage lentille-lentille sont négligées. Pour la plupart des applications pratiques, il s'agit cependant d'un

² Ici, nous allons faire un. hypothèses simplificatrices. Puisque nous nous intéresserons aux modes plus petits que l'échelle de Hubble. Nous avons supposé que la courbure spatiale n'influence pas les perturbations et l'avons négligée dans le calcul tout en la gardant dans les facteurs géométriques.

³ Notez que cette équation peut être réécrite sous la forme équivalente

$$\text{Ait} \sim \int_{J_0} p(\hat{o}, x). \int_{J_0} \gamma^{>} \gamma^{>} \gamma^{>} dy, \tag{7.80}$$

ujher-e les « dérivés sont désormais pris avec respect co $\hat{O}_A$.

excellente approximation. Le régime des lentilles minces peut être retrouvé en supposant que le potentiel gravitationnel est localisé sur un plan de lentille en XL, $\Phi = \Phi[K(x) \delta(x - x_L)]$. La convergence et le cisaillement cosmique sont obtenus comme

$$\begin{aligned} \kappa(0, x) &= 2 (\nabla^2 \Phi) = 2 \\ \gamma_i(\nabla x) &= 0 \quad (\nabla^2 \Phi) = 0 \quad (\ddot{\gamma} - 6 \dot{\gamma} e < \sim \Lambda \ll \#) > \\ T_2(\nabla, x) &= \nabla \cdot \nabla \Phi = \nabla \cdot e \cdot \nabla \Phi \end{aligned}$$

7.1.4 Convergence cosmique

7.1.4.1 Convergence effective

La convergence, obtenue à partir du tracé de la matrice d'amplification, caractérise la densité de matière effective intégrée le long de la ligne de visée (7.25). On déduit de (7.81) et de l'équation de Poisson (5.117) qu'elle prend la forme⁷

$$\kappa(\theta, x) = \frac{3}{2} \frac{H_0^2}{c^2} \Omega_{m0} \int dx' \frac{f_K(x') f_K(x - x')}{f_K(x)} \frac{\delta[f_K(x') \theta, x']}{a(x')} \quad (7.82)$$

Si les sources ont une distribution redshift $p_x(z)dz = p_x(x)dx$, alors la convergence effective est obtenue en pondérant la convergence (7.82) avec la distribution des sources comme

$$\langle \langle \nabla \rangle \rangle = \int p_x(x) \langle \langle \nabla \cdot x \rangle \rangle dx$$

It then takes the final form⁵

$$\langle \langle \nabla \rangle \rangle = \int_{x_c \sim j\hat{u}}^{x_H} \frac{f_K(x)}{f_K(x)} \frac{[LM(x) \delta(x)]}{a(x)} a(x) \quad (7.83)$$

avec

$$(7.84)$$

où x_H est la valeur de x associée à la taille de l'Univers observable. Cette expression montre que la convergence dépend des propriétés du contraste de densité, de l'évolution cosmologique, mais aussi de la quantité totale de matière, Ω_{m0} .

7.1.4.2 Équation de Limber pour le spectre de puissance de convergence

Nous nous intéressons principalement aux propriétés statistiques de la convergence qui peuvent être liées, grâce à (7.83), à celle du contraste de densité. Comme discuté au chapitre 5, le

⁷Ici, nous avons divisé le Laplacien tridimensionnel pour obtenir $\nabla^2 \Phi = -\frac{4\pi G}{3} \rho$. Le terme impliquant $\nabla^2 \Phi$ donne une contribution vanishing lorsque l'intégrale sur x' est calculée.

⁵ — dss .

density field is a Gaussian stochastic variable whose statistical properties are described by its power spectrum [see (5.36)]. Just as the density contrast was expanded into Fourier modes as in (5.33), the convergence can be expanded into bidimensional Fourier modes as⁶

$$\ll W=y \wedge \wedge i e \hat{u}_- \tag{7.85}$$

The convergence power spectrum can then be defined by the relation

$$(WW) W(i+ 'W \tag{7.86}$$

La relation (7.83) exprime la convergence comme une projection du contraste de densité avec le poids $q(y)$ comme $K(0) = J g(x)^\wedge [K(X)0, X] \hat{a}X$ - On peut alors facilement corjvince nous-mêmes que cela implique que $\&$ est aussi un champ gaussien bomogène et isotropie. Sa fonction de corrélation angulaire ($\ll(\$) = (K(<\wedge>))K(<!/? 4-$ prend alors la forme

$$C\ll(\wedge) = y \hat{a}y\hat{a}y'q(y)q(y')\} (6[f_f< (*)<AXM[/ K (X')(<F + 0), ZD \blacksquare \tag{7-87}$$

La fonction de corrélation du Champ de densité introduite dans cette intégrale peut être calculée en développant $\&$ comme dans (5.33) et prend la forme

$$m \bigcup e^{-\wedge \wedge \wedge \wedge} e^{“\wedge x} e^{“i k i} \wedge (f c . x)^\wedge \wedge , /)) \blacksquare \tag{7.88}$$

If we only consider smajl angles ($\hat{o} 1$) then $k_{\pm} >> k\%$ and the power is mainly carried by $k_{\pm}$. 'We can thus make the approximation

$$I^{k \hat{a} 2 k}$$

$$X)^\wedge , /)) > X > /)) *(* 3 +$$

L'intégrale sur k , donne $2 T T < 5 (X - V)^{S \hat{u}}$ qu'après intégration sur y' on obtient $\wedge (< 9) = y < W(x$

$$) I \wedge P s (. k L, X^\wedge \wedge e / " M d_X. \tag{7.8\hat{O}}$$

Au sein de cette approximation, le spectre de puissance de convergence est donc donné par ⁷

	$'g$ $(x$	^{2}	$\blacksquare$ $\blacksquare$	Z	$\propto \chi$

(7.91)

Une telle expression permet de prédire l'amplitude de la convergence en fonction de l'échelle angulaire et du modèle cosmologique utilisé.

⁵ Nous sommes toujours dans un. approximation du ciel plat. En généralité, $*(\&)$ est une fonction sur la sphère céleste et devrait être développé en harmonies sphériques, comme, par exemple, les anisotropies de température du CMB. Pour plus de détails sur cette approche et sur sa relation avec la limite flat*\$ky, voir, par exemple, Réf. [25].
⁷ Notons que si nous n'avions pas utilisé l'équation de Poisson, la même dérivation aurait donné

Une telle expression est plus générale puisqu'elle suppose la vaudité de l'équation de Poisson.

En pratique, le champ est lissé avec un filtre, soit une fonction fenêtre $U(0, \theta_c)$ de rayon angulaire θ_c comme

$$\kappa(\theta_c) = \int \kappa(\theta') U(\theta', \theta_c) d^2\theta', \quad (7.92)$$

then the variance of the averaged field is given by

$$\langle \kappa^2 \rangle = \frac{1}{\pi \theta_c^2} \int \int \kappa(\theta') \kappa(\theta'') U(\theta', \theta_c) U(\theta'', \theta_c) d^2\theta' d^2\theta'' \quad (7.93)$$

où J_0 est une fonction de Bessel (B.30).

7.1.4.3 Dérivations ciel plein versus ciel plat

Le calcul précédent peut être effectué sans utiliser l'approximation du ciel plat. À partir de (7.80) réécrit comme

$$\langle \kappa \rangle = \frac{1}{4\pi} \int \kappa(\theta) d^2\theta$$

où l'on rappelle que le potentiel déflecteur intégré sur la ligne de visée est

$$V(\mathbf{n}) = \frac{2}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \nabla^2 \phi(\mathbf{x}) d\chi \quad (7.94)$$

où est le Laplacien sur la 2-sphère. Comme toute fonction sur la sphère, elle peut être décomposée en harmonies sphériques, de la même manière que pour les anisotropies de température du fond diffus cosmologique comme

$$V(\mathbf{n}) = \sum_{\ell m} V_{\ell m} Y_{\ell m}(\mathbf{n})$$

En décomposant le potentiel gravitationnel en modes de Fourier dans (7.94) puis les exponentielles avec (B.21), on obtient où $\bar{y}(y) = \langle y^2 \rangle / \langle y \rangle^2$ d'où on déduit

$$\bar{\psi}(\mathbf{n}) = \sum_{\ell m} \left[8\pi i^\ell \int_0^\infty \bar{g}(\chi) j_\ell(k\chi) \Phi(k, \chi) Y_{\ell m}(\hat{k}) \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} d\chi \right] Y_{\ell m}(\mathbf{n}),$$

$$\bar{\psi}_{\ell m} = \delta_{\ell m} \int_0^\infty J_\ell(k\chi) \bar{g}(\chi) \Phi(k, \chi) Y_{\ell m}(\hat{k}) \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} d\chi. \quad (7.95)$$

Le spectre angulaire de puissance défini par $\langle \bar{\psi}_{\ell m} \bar{\psi}_{\ell' m'}^* \rangle = C_{\ell} \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'}$, est ainsi donné par

$$C_\ell = \frac{1}{4\pi} \int \int \bar{g}(x) \bar{g}(x') j_\ell(kx) j_\ell(kx') P(k, x, x') dx dx', \quad (7.96)$$

où l'on rappelle que

$$(\mathcal{S}(\mathbf{c},\mathbf{7i})\mathcal{S}^*(\mathbf{f}\mathbf{c}',\mathbf{7i}'))=^{-\wedge}(k,MW^{3i}(k-k')).$$

La convergence étant donnée par $n(n)=|\mathbf{A}_2\mathbf{V}\rangle\!\rangle(n)$, on en déduit que

so that

$$\frac{+~\mathbf{U}2}{-~4~\blacksquare}\hspace{10cm}(7.97)$$

Cette expression est à comparer à celle que nous avons obtenue précédemment dans l'approximation ciel plat en utilisant l'approximation Limber qui, réécrite en terres de $i/\rangle$, prend la forme

$$PM=8\%~^2\mathbf{r}~^3$$

et

$$PM=$$

qui est la même expression que dans (7.90). Sur les petites échelles angulaires (c'est-à-dire le grand P), les deux quantités $P_K(P)$ et $C^*{}^K$ coïncident.

7.1.5 Cisaillement cosmique

Comme nous le verrons, les propriétés statistiques du cisaillement cosmique peuvent être extraites des observations. Nous nous concentrons donc sur la définition de ces grandeurs et sur leur lien avec la convergence. Il conviendra d'utiliser une notation complexe pour la convergence, $\mathbf{7}=\mathbf{7i}+{}^*\mathbf{72}$ - 7. 1.5.1 *Algorithme de Kaiser et Squires*

Le cisaillement et la convergence sont définis à partir des dérivées secondes du potentiel $\mathbf{V}\rangle$ et ne sont donc pas indépendants. Une méthode efficace pour reconstruire la distribution de masse projetée (la convergence) à partir du cisaillement a été proposée par Kaiser et Squires [36]. L'expression (7.81) implique qu'elle caractérise le cisaillement induit par un déflecteur ponctuel. La convolution de la distribution de masse effective $\pounds~ex~K$ avec cette réponse donnera donc le cisaillement associé à cette distribution effective. Le but est d'inverser cette relation pour reconstruire K à partir de $\blacksquare\mathbf{y}$ -

$$\gamma(\boldsymbol{\theta})=\frac{1}{\pi}\int\mathcal{K}(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\theta}')\kappa(\boldsymbol{\theta}')\mathrm{d}^2\boldsymbol{\theta}',\hspace{1cm}(7.98)$$

where the function $\mathcal{K}$, defined as

$${}_{/C}=\frac{0\%{-0?}{-}}{\mathrm{d}^4}\hspace{1cm}\frac{-1}{(\mathrm{d}\rangle-~\mathbf{W}}\hspace{1cm}(7.99)$$

For this, it is convenient to switch to Fourier space, where this convolution is converted into a simple multiplication

$$\gamma(\ell) = -\ell(\epsilon)^*(\epsilon)_{,T}$$

for the Fourier modes, for all non-vanishing $\ell = (\ell_1, \ell_2)$. This can be rewritten as

$$\gamma(\ell) = \frac{1}{\pi} \hat{\kappa}^*(\ell) \hat{\gamma}(\ell), \quad \hat{\kappa}(\ell) = \pi \frac{(\ell_1^2 - \ell_2^2 + 2i\ell_1\ell_2)}{\ell^2} \quad (7.101)$$

The convergence, and thus the mass distribution, can thus be reconstructed from the cosmic shear as

$$\kappa(\theta) = \kappa_0 + \frac{1}{\pi} \int \kappa^*(\theta - \theta') \gamma(\theta') d^2\theta' \quad (7.102)$$

The constant κ_0 is related to any uniform mass distribution that contributes to the convergence but not to the distortion. Notice that κ is real so that the imaginary part of the integral must vanish. What is obvious mathematically is no longer true with data since noise can generate such an imaginary part. Moreover, the integration can then no longer be performed on the entire plane but only on a support of the size of the receptor. The application of this method is thus not straightforward with real data where the noise, the need for smoothing, and the contribution from «0», related to the mass-sheet degeneracy discussed in (7.44), must be taken into account.

An important consequence of these results is that [since (7.101) implies that $|\hat{\kappa}|^2 = \gamma \cdot \gamma^*$ — $|\gamma|^2 = |\kappa|^2$] the convergence and the cosmic shear have the same power

spectrum

$$P_\gamma(t) = P_\kappa(t). \quad (7.103)$$

7.1.5.2 Statistiques en deux points pour le cisaillement cosmique

La cisaille cosmique comporte deux composantes qui peuvent être décomposées de différentes manières. Considérons un filtre à symétrie sphérique, centré en $\mathbf{z}$ et de rayon θ_c . Le centre du filtre peut être utilisé pour définir les composantes radiales et orthoradiales of the cosmic shear (see Fig. 7.12). Let $\mathbf{y}$ be the unit vector that joins the centre of

(également appelées tangentes) du filtre jusqu'au point où le cisaillement cosmique est défini (c'est-à-dire $\mathbf{z} = \mathbf{y} \exp(i\phi)$). Le cisaillement est une quantité de spin 2 (on rappelle que $\gamma(\mathbf{z}) = \gamma \exp[2i\phi]$). Ainsi, si l'on considère la base locale $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_t)$ à $\mathbf{z}$ défini par $\mathbf{e}_r = \exp(i\phi)$ et $\mathbf{e}_t = i\mathbf{e}_r$, on peut définir en $\mathbf{z}$ les deux polarisations

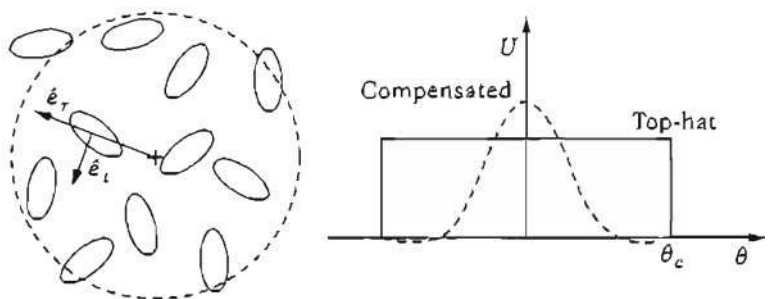
$$(7.104)$$

exactement de la même manière que pour les ondes gravitationnelles.

On peut alors définir les différentes fonctions de corrélation entre ces composantes

$$\langle \gamma(\mathbf{z}) \gamma(\mathbf{z}') \rangle = \langle \gamma_r(\mathbf{z}) \gamma_r(\mathbf{z}') \rangle + \langle \gamma_t(\mathbf{z}) \gamma_t(\mathbf{z}') \rangle + \langle \gamma_r(\mathbf{z}) \gamma_t(\mathbf{z}') \rangle + \langle \gamma_t(\mathbf{z}) \gamma_r(\mathbf{z}') \rangle \quad (7.105)$$

dépendent uniquement de la taille θ_c du filtre. Sous une transformation de parité, γ_r reste invariant tandis que γ_t change de signe pour que la fonction de corrélation $\langle \gamma_r(\mathbf{z}) \gamma_t(\mathbf{z}') \rangle = 0$. Ces deux fonctions de corrélation peuvent également être combinées comme



7.12 (left): To compute the variance of the shear, the galaxy ellipticity is averaged a filter of radius r . Given the centre of the filter, the radial and orthoradial (tangent)

Figure. avec les composantes du cisaillement cosmique peuvent être définies. (à droite) : Deux types de filtres sont généralement utilisés : les filtres haut-de-forme et les filtres compensés.

$$U_{\pm}(0_c) = \pm 4r. \tag{7.106}$$

En utilisant ces définitions avant de développer $K(\mathcal{E})$ en modes de Fourier comme (7.85) et en utilisant les relations (7.101) entre le cisaillement cosmique et la convergence, on obtient

$$W_{\pm}(r) \tag{7.107}$$

En utilisant (7.103), la moyenne du cisaillement cosmique avec une fenêtre chapeau en fonction de la variance

$$\tag{7.108}$$

7.1.5.3 Masse d'ouverture

Pour un filtre arbitraire, l'effet d'un feuillet de masse inconnu (7.102) biaise la reconstruction. Cependant, si l'on utilise un filtre compensé, c'est à dire satisfaisant, alors toute contribution constante à l'intégration (7.92) ne jouerait aucun rôle. Définir la masse d'ouverture par

$$\tag{7.109}$$

on peut alors montrer que cette quantité peut être exprimée uniquement en termes de cisaillement tangent comme

Une famille de fenêtres très populaire et utile [11] est

$$U(\theta, \theta_c) = \frac{3}{\pi\theta_c^2} \left[1 - \left(\frac{\theta}{\theta_c} \right)^2 \right] \left[1 - 3 \left(\frac{\theta}{\theta_c} \right)^2 \right] \Theta(\theta < \theta_c) \quad (71H)$$

Ce filtre est un filtre passe-bande à moyenne nulle, qui donne la variance

$$M2P >_{-v/d\epsilon PM} \quad (71I2)$$

7.1.5.4 Relations entre les spectres de puissance

Toutes ces fonctions de corrélation à deux points sont liées au spectre de puissance de convergence. Ils ne sont donc pas indépendants. Par exemple, on peut montrer, en utilisant les propriétés des fonctions de Bessel, que

$$P_K(\ell) = 2ir M_c \theta_c J_0(M_c) t_+(0_c) = 2ir dO_c \theta_c J_4(te_c) i_-(0_c). \quad (7.113) \quad JO \quad JO$$

De même (fVf^2_p) et (77*) peuvent également être exprimés en fonction de [37].

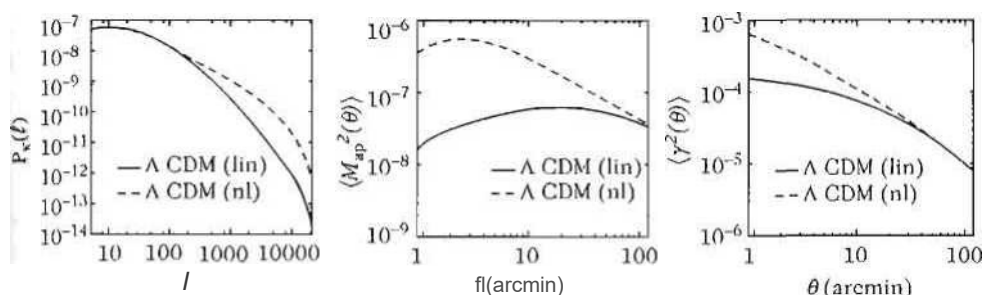


Fig. 7.13 Prédiction des différentes observables pour un modèle Λ CDM avec la contribution devant les régimes linéaire (traits pleins) et non linéaire (lignes pointillées) du spectre de puissance (voir chapitre 5, notez que même dans ce régime, la lentille peut être traitée de manière linéaire). De gauche à droite, le spectre de puissance de convergence, la masse d'ouverture et l'espace cosmique. cisaillement de la variance du chapeau haut de forme, $\langle \gamma^2(0) \rangle$ - De la réf. [34].

7.1.6 Mesure du cisaillement cosmique

La clé de la mesure du cisaillement cosmique repose sur la mesure de la forme des galaxies de fond et sur leur ellipticité (voir Réf. [11,12,38] pour les détails et les problèmes). Si l'image d'une telle galaxie est représentée par une ellipticité $e = Si + if2 = (1 - r)/(1 + r)\exp(2i\langle \rangle)$, $r = b/a$ étant le rapport entre la majeure et la mineure axes, alors

$$\langle \epsilon \rangle = \left\langle \frac{\gamma}{1 - \kappa} \right\rangle.$$

Dans le régime de faible distorsion ($\kappa \ll 1$), les ellipticités donnent accès au cisaillement (voir 7.14).

La mesure est donc basée sur l'hypothèse cruciale que les galaxies sources ont une ellipticité intrinsèque aléatoire et non corrélée, de sorte que tout écart par rapport à une distribution aléatoire et toute corrélation dans les ellipticités sont attribués à des effets de lentille.

En supposant que les ellipticités sont distribuées avec une dispersion $a_e \sim 0,3$, comme le suggèrent les relevés de galaxies proches dans le champ profond de Hubble , alors on peut mesurer une ellipticité, ϵ , induite par un cisaillement gravitationnel de l'ordre de $7 \sim 0,1$ en faisant la moyenne sur le nombre de galaxies

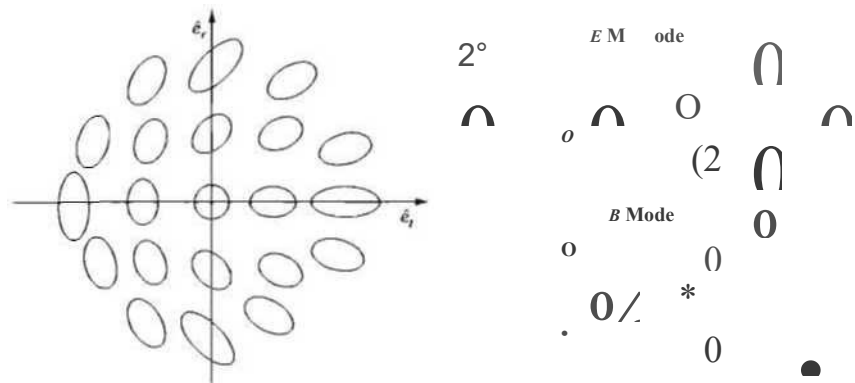


Fig. 7.14 (left) : Value of $\langle \gamma_r, \gamma_t \rangle$ as a function of the shape of the galaxy with respect to the local reference frame. The ellipticity is invariant under a rotation of angle x . (right): E and B modes. Only E modes are produced by a gravitational field.

Il semble donc aisé de mesurer un cisaillement gravitationnel de 10 %. Néanmoins, mesurer un cisaillement de l'ordre de 1 % nécessite 900 galaxies, ce qui est difficilement réalisable sur de petites échelles angulaires, à moins de faire une moyenne sur plusieurs champs de 1 arcmin.

Néanmoins, de nombreux problèmes d'observation existent (voir Réf. [12, 38] pour des discussions détaillées sur les aspects observationnels). En particulier, il faudra résoudre les problèmes (1) de dégénérescence d'un feuillet de masse (par exemple, la statistique $(A/\wedge_p)$ l'évite), (2) de résolution angulaire limitée par la densité surfacique des galaxies, (3) de la distribution redshift des sources qui est importante pour l'étalonnage, (4) des alignements intrinsèques qui peuvent biaiser les mesures, (5) de la turbulence atmosphérique qui rend chaque objet plus circulaire et dilue ainsi le signal et (6) des aberrations optiques qui introduisent des ellipticités artificielles. Des relations telles que (7.113) peuvent permettre de contrôler le niveau de ces sources d'erreur pour lesquelles les effets sur le cisaillement ne satisfont pas a priori à ces contraintes.

Par analogie avec la terminologie utilisée pour la polarisation du fond diffus cosmologique, on peut définir E et B modes comme

$$\begin{aligned} \hat{U}E &= (d^2 - d^2_{bi} + 2d_j d_{272}), \\ AB &= -2010271 + (5^2 - \#2)72- \end{aligned} \tag{7,114}$$

Comme le montrent les définitions du cisaillement, la lentille gravitationnelle n'induit que E modes (voir Fig. 7.14) et la polarisation E est en fait simplement la convergence. Les deux composantes du cisaillement ne sont en réalité pas indépendantes, ce qui implique par exemple que la partie imaginaire de (7.102) disparaît. Les définitions de E et B étant non locales, leur reconstruction dans l'espace réel dépend, en tout point, de la valeur du cisaillement dans tout l'espace. Une façon de résoudre ce problème est de filtrer le cisaillement par un filtre qui élimine les grandes longueurs d'onde. Ceci peut être réalisé en envisageant un filtre compensé. En particulier, on peut montrer que (M^2_p) n'est sensible qu'aux modes E alors que

$$M_L(0_c) = \int d^2\theta Q(0) A_r(0), \quad (7.115)$$

n'est sensible qu'aux modes

B . doit strictement disparaître si la distorsion a

une

origine gravitationnelle afin que toute déviation de M_j from zéro puisse être utilisée pour contrôler la précision de l'analyse des données.

71.61 Statut d'observation

La première détection du cisaillement cosmique a été réalisée en mars 2000 [39] puis par trois autres groupes [40-42]. Ces relevés ont dénombré environ 10^5 images de galaxies sur une surface d'environ 1 degré^2 . La figure 7.15 résume les résultats de ces différentes analyses pour la variance du cisaillement et les différents corrélateurs à deux points.

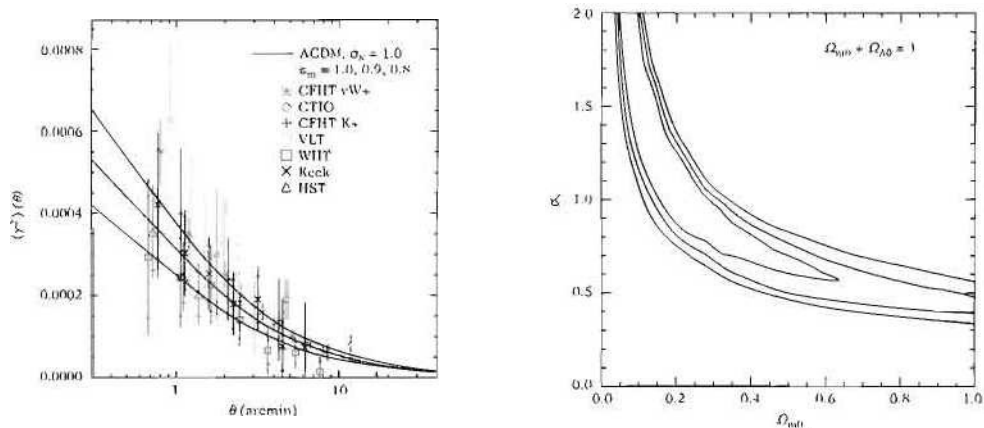


Fig. 7.15 (left): Compilation of the first observations of the cosmic shear variance (using a top-hat filter). The three curves correspond to the three redshifts 1, 0.9 and 0.8, and data are in good agreement with the behaviour of (7.116). (right): Constraints for the parameters Ω_{m0} and σ_8 obtained from the survey VIRMOS-DECArt [43]. The contours are at 1, 2 and 3 σ and they were obtained after marginalization over z_s and n .

Ces mesures permettent de contraindre les paramètres cosmologiques. Le cisaillement cosmique est particulièrement sensible à la densité totale de matière et à la normalisation du spectre de puissance. Par exemple, on peut montrer que pour des perturbations gaussiennes d'indice spectral n ,

$$(kV \text{ WO-Olas} Q^{\wedge 5 \wedge 8} > \tag{7.116}$$

pour les sources à redshift z_s . La non-gaussianité induite par la dynamique non linéaire (voir chapitre 5) a une dépendance différente

$$\wedge i(\delta)cr-42a_{un}Qj^{un}<^{135}.\tag{7.117}$$

Cela nous permet d'obtenir des contraintes fortes sur les paramètres $Q_m o$ et (voir Fig. 7.15). Les dernières données CFHTLS [44] couvrent 57 degrés carrés et nous permettent de mesurer les statistiques de cisaillement en 2 points de 1 arcmin à 4 degrés. Son analyse conduit à la contrainte

$\sigma_8 \left(\begin{matrix} O \setminus^{0.54} - \wedge \\ 0,25 \end{matrix} \right) = 0,785 \pm 0,043,$
En supposant $K = 0$. En supposant un redshift moyen de 0,5, la plus grande échelle physique sondée par cette analyse est de 85 Mpc. En utilisant uniquement les données avec $\delta > 85$ arcmin, pour que seules les échelles en régime linéaire soient prises en compte, on en déduit que

$$\begin{matrix} /O \setminus^{0,53} cr_8 \mid \\ \pm 0,029. \\ \wedge 0,25 \end{matrix} = 0,771$$

Cela illustre le potentiel des futures observations à grand champ pour sonder la structure à grande échelle.

7.1.7 Objectif sur le fond cosmique des micro-ondes

Après découplage, les photons du fond diffus cosmologique sont découplés de la matière et se propagent le long des géodésiques. Comme nous l'avons vu à plusieurs reprises dans ce chapitre, ces géodésiques sont déviées par le champ gravitationnel de la structure à grande échelle. Les champs de température et de polarisation du CMB observés $T = (\delta, Q \pm iU)$ dans une direction donnée n sont liés à leurs valeurs au moment du découplage par

$$T[n] = T[n + \pounds(n)], \tag{7.118}$$

où $\pounds$ est le champ de déplacement induit par la lentille gravitationnelle. Pour les petits déplacements, chaque quantité peut être étendue au deuxième ordre comme

$$X(n) = X(n) + (n)e(n)X_{i3}.\tag{7.119}$$

7.1.7.1 Effets sur la température

L'impact de la lentille gravitationnelle sur le spectre de puissance angulaire des anisotropies de température peut être illustré dans l'approximation du ciel plat, dans laquelle nous pouvons

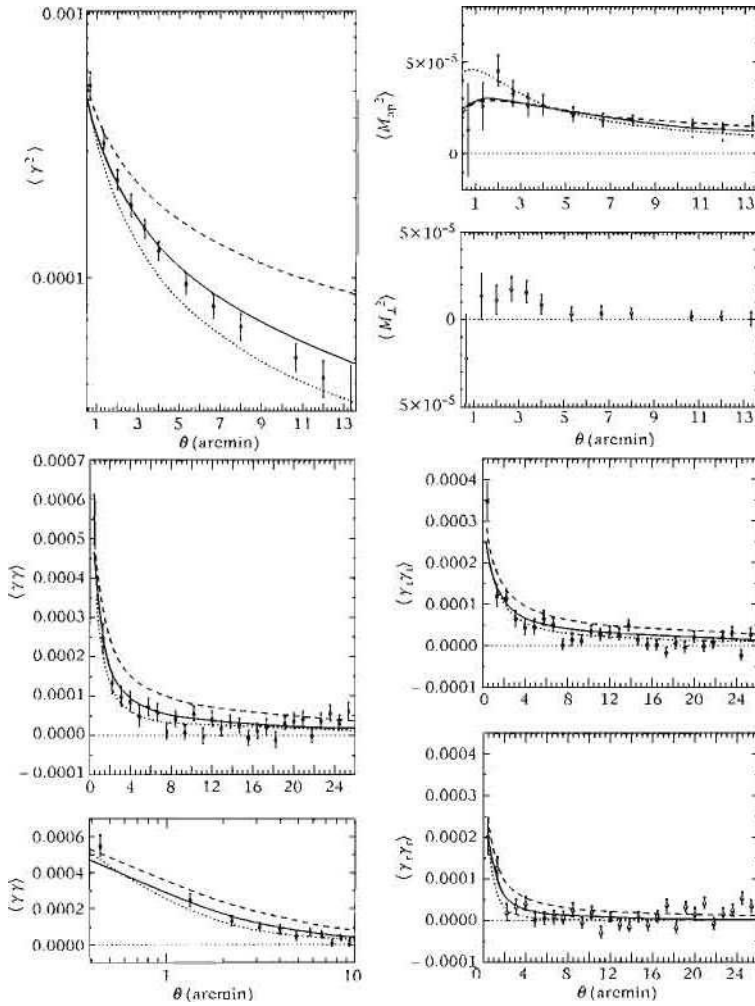


Fig. 7.16 Measurements of two-point statistics in the survey VI RM OS-DES CA RT [43]. (top left): Variance of the shear with a top-hat filter, (top right) aperture mass of the E and B modes. The B modes must a priori vanish so that the deviation of with respect to zero can control the data analysis, and in particular the systematic effects. (bottom left): Correlation function of the shear and (bottom right) tangent and radial projections of the shear.

élargir les anisotropies de la température de fond cosmique des micro-ondes dans les modes de Fourier comme

$$\Theta(\mathbf{n}) = \int \frac{d^2\ell}{2\pi} \Theta(\ell) e^{i\ell \cdot \mathbf{n}} \quad (7.120)$$

Pour un champ gaussien, la fonction de corrélation à deux points est donnée par

$$cw = \text{moi}(n) = \quad (7.121)$$

avec $(\Theta(\ell)\Theta(\ell')) = C\ell\ell' \langle \ell + \ell' \rangle$. D'après (7.118), cette fonction de corrélation angulaire est modifiée par des effets de lentille comme

$$\langle \hat{\Theta}(0)\hat{\Theta}(n) \rangle = \langle \hat{\Theta}(0 + \xi(0))\hat{\Theta}(n + \xi(n)) \rangle \quad (7.122)$$

$$\begin{aligned} &= C(\theta) + \langle \xi^i(0)\xi^j(n) \rangle \langle \Theta_i(0)\Theta_j(n) \rangle + \frac{1}{2} \langle \xi^i(0)\xi^j(0) \rangle \langle \Theta_{ij}(0)\Theta(n) \rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} \langle \xi^i(n)\xi^j(n) \rangle \langle \Theta_{ij}(n)\Theta(0) \rangle. \end{aligned} \quad (7.123)$$

Cette fonction doit être étendue au second ordre dans la décomposition des perturbations dans

displacement vanishes, $(\cdot)' = \hat{\cdot}$, it is at this order that the contributions from the f pour obtenir la principale contribution à C_f . En effet, puisque la moyenne sur le couplage lentille dans les fonctions de corrélation à deux points apparaît.

En utilisant la relation entre ℓ et le potentiel gravitationnel puis en effectuant une transformée de Fourier, on obtient

$$\hat{C}_\ell = C_\ell \left[1 - \int \frac{d^2 \ell'}{(2\pi)^2} \frac{(\ell' \cdot \ell)^2}{\ell'^4} \bar{P}(\ell') \right] + \int \frac{d^2 \ell'}{(2\pi)^2} \frac{(\ell' \cdot \ell)^2 - \ell'^4}{\ell'^4} \bar{P}(\ell)$$

où P est le spectre de puissance intégré le long de la ligne de visée.

Deux effets apparaissent, (1) une renormalisation qui affecte tout le spectre et qui n'est pas directement détectable et (2) un couplage de modes. Le deuxième terme de l'expression précédente est une convolution qui tend à lisser le spectre de puissance angulaire dont son the température anisotropies. This term is too weak to affect the first acoustic peak so effet affectera principalement la queue du spectre. Cela implique que le spectre de puissance angulaire des anisotropies de température, à lui seul, ne donne que peu d'informations sur la lentille.

Il existe d'autres effets sur les anisotropies, par exemple des effets de morphologie. En particulier, les pics et les creux de la courbe de température sont modifiés. Ces effets sont liés aux écarts par rapport aux propriétés gaussiennes des perturbations. Par exemple, le terme dominant de la fonction à quatre points du champ de température est plus ses permutations.

$$(\hat{e}(n_1)\hat{e}(n_2)\hat{e}(n_3)\hat{e}(n_4))_c = (f(n_1)\wedge(n_3))(\wedge\hat{O}(n_1)\hat{O}(n_2))(a_3O(n_3)\hat{O}(n_4)) \quad (7.125)$$

7.1.7.2 Effets sur la polarisation

Les paramètres de Stokes sont modifiés selon (7.119). Seule la relation entre l'observation et les points d'émission change et la lentille gravitationnelle n'induit aucune rotation du vecteur polarisation ($Q \pm iU$). De plus, aucune polarisation ne peut être créée, car si le champ de polarisation disparaît initialement, il le restera.

Cependant, la lentille gravitationnelle modifiera les propriétés du champ de polarisation. Pour cela, nous considérons la décomposition de ce champ en modes E et B , (6.2U4).

De plus, il faudrait établir l'analogue de la relation (7.119) mais pour les dérivées secondes

$$a \text{ fait, } [X(n)] = [\% \ddot{y} + 2 \epsilon^i X_{jz} + C^i X_{\text{once}}] (n), \quad (7.126)$$

au premier ordre en 4- Cette relation peut ensuite être utilisée pour obtenir les effets sur les modes E et B ,

$$\begin{aligned} A\hat{E} &= (1 - 2\kappa)AE - \epsilon V(AE) - 25^U(7, AP_J + V_7, \bullet VP), \quad (7.127) \\ AB &= (1 - 2\kappa)AB + \epsilon V(AB) - 2^J(7, AP, + V_{\pi} \bullet \text{Vice-président}), \end{aligned} \quad (7.128)$$

où $P = Q + iU$. Les effets de lentille peuvent ainsi être décomposés comme suit :

- Un déplacement, donné par le terme $(1 + \epsilon \blacksquare V)A(B, B)$, qui est le déplacement perturbatif développement du Laplacien de (B, B) au point $n + \zeta$. Ce terme est identique à celui apparaissant pour la température.
- Un grossissement, contrôlé par le terme -2κ qui introduit la convergence. Un tel terme n'a rien de surprenant.
- Un mélange de modes E et B , dicté par la contraction entre le cisaillement cosmique et le vecteur polarisation. Ce terme de couplage est composé de deux contributions qui domineront à différentes échelles, celle impliquant le gradient du cisaillement dominant aux petites échelles.

Plus de détails sur les effets de la lentille sur la température et la polarisation sont donnés dans les réf. [45,46],

Comme vu au chapitre 6, les modes B sont uniquement générés par des ondes gravitationnelles primordiales. En supposant qu'il n'y ait initialement qu'une polarisation scalaire, alors la lentille gravitationnelle induit des modes B ,

$$AB = -2^{\wedge}(\gamma_i AP, + V_{\pi} VP,). \quad (7.129)$$

Cela a une conséquence importante : la détection de B Ces modes apporteront beaucoup d'informations sur la lentille gravitationnelle par structure à grande échelle mais, de plus, ils auront tendance à cacher les modes B générés par les ondes gravitationnelles primordiales . La figure 7.17 illustre ces effets sur le spectre de puissance .

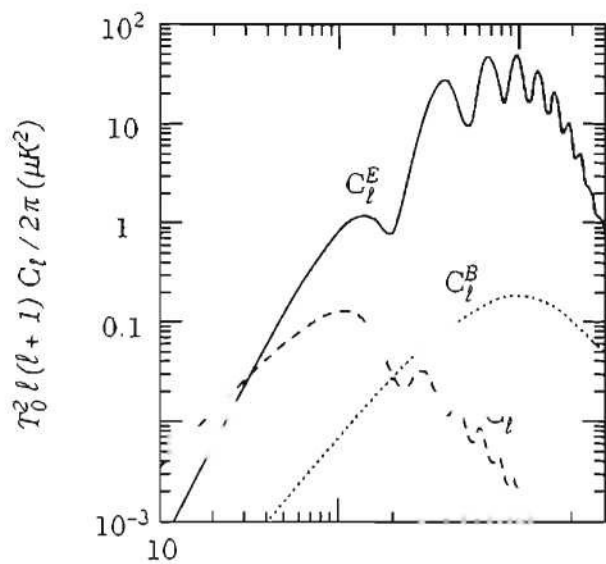
7.2 Preuve de l'existence de la matière noire

Dans le modèle cosmologique moderne, la matière noire joue un rôle central dans la formation de structures à grande échelle. Nous passons en revue les différentes « preuves » de l' existence, ou plus exactement de la nécessité, de cette matière. Ces conclusions s'appuient sur la validité de la relativité générale pour décrire la gravité, ce que nous supposons ici. Pour finir, nous considérerons également la possibilité d'une modification de cette loi de la gravité.

7.2.1 La matière noire dans les galaxies

La preuve la plus convaincante et la plus directe de l' existence de la matière noire vient de l'observation des courbes de rotation des galaxies spirales. Les galaxies spirales ont un disque plat dans lequel les étoiles suivent des orbites circulatoires. Les courbes de rotation donnent

la vitesse orbitale des étoiles en fonction de leur distance au centre de la galaxie.



Fi
gr
w

7.
N
in

$$\frac{v^2(r)}{\quad},$$

w
fc

$$\left(-\frac{r}{R_d}\right),$$

w
G
g α
b α

A
re
ar

$$v_\infty$$

$M(< r) \propto r$ à grande distance, ce qui indique l'existence d'une matière non lumineuse avec un profil de densité se comportant comme $\rho \propto 1/r^2$ à grande distance du centre.

À grande distance, nous pouvons exprimer cette vitesse asymptotique, comme

$$v_{\infty} = \sqrt{a r} \quad (7.133)$$

où a est une constante cotée d'une accélération. Cela implique en particulier qu'à grande distance, l'angle de déflexion, voir (7.1), est donné par

$$\alpha = \sqrt{a} / G_N M_0 \quad (7.134)$$

72.1.2 Description des courbes de rotation

Pour mieux comprendre les implications des courbes de rotation, nous devons introduire quelques quantifications utilisées dans la littérature astrophysique (voir Réf. [47] pour une revue).

La masse dynamique est la masse déduite de l'observation de ces courbes de rotation

$$G_N M_{\text{dyn}}(r) = r v^2(r) \quad (7.135)$$

La mesure de la masse dynamique repose sur la mesure des vitesses de rotation des étoiles dans les 2 faces extérieures du disque à partir de leur effet Doppler qui donne accès à la vitesse de la ligne de visée.

$$\langle v \rangle = v_{\text{ga}} \sin i + v \sin i, \quad (7.136)$$

où i est l'inclinaison du disque galactique et v_{ga} est la vitesse de la galaxie. Nous obtenons le rayon du dernier point observé, r_{max} , auquel la vitesse est appelée w_{max} ou V_{OQ} .

Cependant, la masse dynamique n'est pas entièrement sous forme de matière noire. Les observations des raies moléculaires du CO permettent de reconstituer la partie interne de la courbe de rotation et l'apport du gaz dans cette zone où il domine. Les observations radio du gaz HI, utilisant la raie de l'hydrogène de 21 cm, permettent de reconstituer la partie la plus extérieure, au-delà du disque stellaire, où domine la matière noire.

On peut ainsi décomposer la courbe de rotation en une contribution du disque stellaire et du gaz comme

$$\langle v \rangle^2 = \langle v_{\text{baryon}} \rangle^2 + \langle v_{\text{DM}} \rangle^2 \quad (7.137)$$

où la composante baryonique est elle-même décomposée en

$$\langle v_{\text{baryon}} \rangle^2 = \langle v_{\text{g}}^2 \rangle + \langle v_{\text{star}}^2 \rangle$$

Chacune de ces vitesses est liée à la contribution massique du composant correspondant, où le lien est assuré par la loi de Kepler.

$$v_x^2 = \frac{G_N M_X}{r_x}$$

Etant donné le rapport masse-luminosité m/L de la population stellaire de la galaxie, on peut reconstruire le profil de masse du halo (voir Fig. 7.18) en distinguant

les contributions du gaz, des étoiles et, en prenant la différence, du halo de matière noire. En fait, à partir du profil de luminosité (7.131), on peut définir, pour les galaxies spirales, un profil de densité surfacique par

$$\Sigma = \Sigma_0 \exp(-\frac{R}{R_d}) \quad (7.138)$$

Le rayon optique, R_{opt} , est défini comme le rayon contenant 80% de l'énergie lumineuse. Il est lié au rayon du disque par $\sim 3,2 R_d$. On obtient des profils équivalents pour le gaz.

En conclusion, on voit qu'il existe deux notions importantes de masse : la masse dynamique, liée aux courbes de rotation, et la masse baryonique, supposée proportionnelle à la masse lumineuse. Nous avons une troisième notion de masse à considérer, qui est la masse d'Amiens qui peut être déterminée par lentille. Dans le modèle standard de matière noire, ces masses devraient satisfaire

$$M_{Sloan} M_{DM} = M_{dyn} \quad (7.139)$$

Dans ce qui suit, nous testerons cette relation par rapport à des observations.

7.2.1.3 Galaxies spirales

voie Lactée

La courbe de rotation de la Voie Lactée (MW) est actuellement connue avec une grande précision. Dans la partie centrale de notre Galaxie, la dispersion des vitesses des étoiles s'explique par la présence d'un trou noir de masse $M_{\bullet}$ ($2,87 \pm 0,15$) $\times 10^6 M_{\odot}$ qui a été déterminé à partir des paramètres orbitaux des étoiles en orbite proche du centre galactique [48]. La présence de trous noirs supermassifs est aujourd'hui admise dans de nombreuses galaxies.

Notre Galaxie peut être grossièrement décomposée comme (a) un noyau de haute densité, contenant un trou noir, (b) une région centrale (< 100 pc) où la densité augmente rapidement avant (c) d'atteindre un maximum à environ 300 pc et puis diminue vers un minimum à environ 2 kpc avant (d) un pull-up progressif pour atteindre le maximum du disque à environ 6 kpc et (e) un plateau avec des trous à environ 8 kpc et 15 kpc.

En prenant comme référence le Soleil, la masse dynamique (7.135) est alors

$$M(< r) = 9,6 \times 10^{10} M_{\odot} \left(\frac{v(r)}{220 \text{ km/s}} \right)^2 \left(\frac{r}{7 \text{ kpc}} \right)^2 \quad (7.140)$$

Puisque la luminosité du MW est estimée à $LMW = 2,3 \times 10^{10} L_{\odot}$, on obtient le rapport masse/luminosité de la Voie Lactée.

$$\frac{M_{MW}}{L_{MW}} = 5,5 \frac{M_{\odot}}{L_{\odot}} \quad (7.141)$$

Le dernier gaz détectable se trouve vers 20 kpc, pour lequel il n'y a toujours aucun signe d'un quelconque régime képlérien, de sorte que $v(r) > 20$ kpc. La dynamique des amas globulaires et des nuages de Magellan permet de déduire que $M_{\bullet} > 75$ kpc, de sorte que

$$Q_{MW} - (10 - 40) Q_g >. \quad (7.142)$$

Plus localement, la comparaison entre la masse des étoiles proches et du gaz à la masse dynamique permet d'obtenir que

$$(7.143)$$

dans une région d'une centaine de parsecs. Cette limite, obtenue à partir de la dynamique des étoiles normales au plan du disque, est appelée limite d'Oort.

Le Groupe Local, c'est-à-dire principalement la galaxie d'Andromède et quelques galaxies satellites, peut être considéré comme un système isolé puisque la galaxie la plus proche, M81, se trouve à une distance d'environ 3 Mpc. Andromède et la Voie Lactée sont séparées d'environ $r = 10^3$ kpc et ont une vitesse relative de $v \sim 10^2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, de sorte que $vHQ/TC \sim 0(1)$, qui montre que le système est lié gravitationnellement. Cela signifie que la masse dynamique est de l'ordre de $10^{12} M_\odot$. Une estimation plus précise donne $M = (3,2 - 5,5) \times 10^{12} M_\odot$ et la luminosité totale des deux compagnons peuvent être estimées à $L \sim 4,2 \times 10^{10} L_\odot$ de sorte que

$$Q_{\text{groupe}} = (76 - 130) Q_\odot. \quad (7.144)$$

Galaxies spirales

Aujourd'hui, les courbes de rotation de plusieurs centaines de galaxies spirales ont été cataloguées. Ils se comportent différemment dans la zone interne, en fonction principalement de l'importance du renflement. Selon le type de galaxies, ces courbes de rotation ont des morphologies différentes mais elles semblent toutes atteindre un plateau.

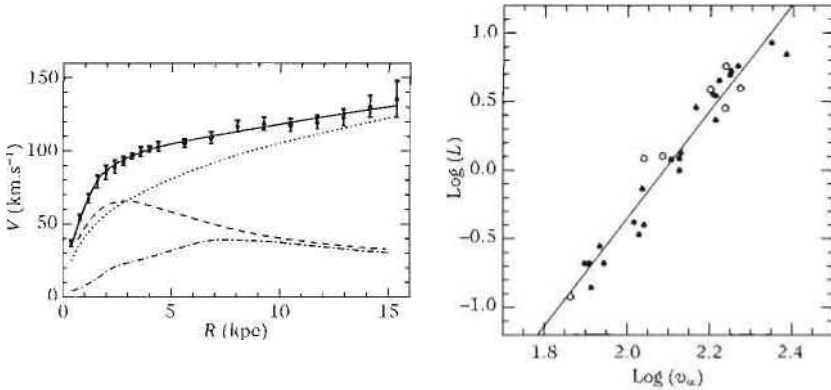


Fig. 7.18 (left): Rotation curve of the galaxy M33. The observations (points and circles) are compared to a model of dark-matter halo (solid line). The contributions from the halo (dashed-dotted line), from the stellar disk (short dashes) and from the gas (long dashes) are also represented. (right): Tully-Fisher relation for various spiral galaxies.

La figure 7.18 représente la courbe de rotation de la galaxie M33 et de nombreux autres exemples peuvent être obtenus, voir par exemple Réf. [49], Notez le fait que la courbe de rotation reste



fiat tandis que la matière dominante passe des étoiles et des gaz à la matière noire ; cela ressemble peut-être à une conspiration. Il semble qu'il existe un « accord » entre la matière baryonique et la matière noire, sans lequel le plateau aurait pu présenter quelques bosses ou trous.

la situation est telle que les deux profils s'adaptent l'un à l'autre.

Il existe une relation, sans trop de dispersion, entre la luminosité d'une galaxie spirale et

$$L_{ex} \quad ce = 3.9 \pm 0.2 \quad (7.145)$$

la vitesse maximale de son plateau de courbe de rotation. Relation Tully-Fisher nous dit que pour ces galaxies, il existe une relation d'échelle entre leur masse et celle du gaz size. This relation is no longer valid for galaxies of small luminosity for which the mass qui doit être prise en compte dans la luminosité.

Variations autour de la relation Tully-Fischer

La loi de Tully-Fisher (7.145) relie la luminosité totale à la vitesse des galaxies spirales. Une loi de Tully-Fisher *généralisée ou baryonique a également été proposée [50]*. Cette loi relie la masse baryonique totale à

$$(7.146)$$

avec $n \sim 4$ Cette loi inclut donc à la fois la contribution du gaz et des étoiles et devient ainsi générale pour tout type de galaxie spirale (naine, faible luminosité de surface, etc).

Il a été supposé [51] que la matière noire suivait la distribution des gaz et, en particulier, que leurs courbes de rotation étaient homothétiques

$$v_{DM}^2 = \gamma v_{gas}^2 \quad (7.147)$$

Avec cette hypothèse, la courbe de rotation totale peut être décomposée en deux contributions, celle des étoiles et celle du gaz, et n'introduit qu'un seul paramètre arbitraire $u^2 = u_{st}^2 + (1 + \gamma)u_{gas}^2$ - Des études de variantes [52,53] ont montré que cette hypothèse in to be in good agreement with observations and that the parameter γ must be in semble être comprise entre $7 = 3 - 16$.

Enfin, aux échelles caractéristiques de ces galaxies, le rapport entre les densités surfaciques de matière noire et baryonique est de l'ordre de [52]

$$(7.148)$$

Ces relations ont conduit à émettre l'hypothèse que la matière noire issue des halos galactiques pourrait se présenter sous la forme d'un gaz trop froid pour être détectable [54].

Profils universels

La description des halos des galaxies a été initialement abordée en établissant des density profiles [55] that have the property of decreasing as r^{-2} at large distances. An résultats empiriques. Un exemple de ces profils est le modèle isotherme [voir (7.38) pour sa

dérivation], ce

modèle est singulier au centre et a été amélioré avec un mode isotherme ! avec rayon de noyau.

Un paramétrage empirique couramment utilisé décrit le halo avec le profil

$$\rho_{\text{MDM}} = \rho_s \frac{1 + 3(r/a)^2}{3[1 + (r/a)^2]^2} \quad (7.149)$$

Sa seule différence notable avec le modèle isotherme avec rayon de noyau est son comportement dans les quelques kpc centraux. Il semble que tous les halos des galaxies spirales suivent une loi de ce genre [55]. Cela suggère de rechercher un profil général de halo de matière noire de la forme

$$\rho_{\text{MDM}}(r) = \quad (7.150)$$

f étant une fonction universelle. Soulignons que la fonction ρ pourrait dépendre d'autres paramètres comme la luminosité de la galaxie. La masse de matière noire est donc donnée par

$$M_{\text{MDM}}(r) = 4\pi \int_0^r \rho_{\text{MDM}}(a) a^2 da, \quad F(r) = \int_0^r f(u) du. \quad (7.151)$$

Les observations [56] tendent à prouver que, sous l'hypothèse d'un profil de la forme $\rho \propto (r^2 + r_c^2)^{-1}$, la masse dynamique $M_{\text{dyn}}(a) \propto a^2$ et $a \sim 2,3 r_c$, ce qui implique notamment que la quasi-totalité de la composante baryonique de la galaxie se trouve au cœur du halo de matière noire puisqu'elle se développe principalement à partir de r_c .

De plus, dans les galaxies spirales la matière baryonique est distribuée sous forme de disque de telle sorte que $M_{\text{baryon}}(a) \propto a^2$, d'où on peut déduire que $M_{\text{MDM}}(r) \propto a^2$. En utilisant la forme (7.151), cela implique que

$$\rho(a) \propto a^{-1} \Rightarrow \rho(a) \propto \frac{1}{a} \quad (7.152)$$

De plus, de ces observations on comprend que non seulement nous avons une loi de Tully-Fischer généralisée, mais qu'en fait elle est vraie pour chaque composante puisque $M_{\text{QM}} \propto a^2$, de sorte que $\rho(a) \propto M_{\text{QM}}(a)/a^3 \propto a^{-1}$ et donc $f_{\text{QM}}(a) \propto a^2 \propto M_{\text{MDM}}(r)$.

Comme le montreront les simulations numériques, chaque profil diffère principalement par son comportement au centre et à très grande distance. Il est difficile de déterminer à partir de la cinétique de la région centrale si la distribution de matière noire atteint son maximum ou si la galaxie possède un noyau. La dynamique de cette région est en effet en général dominée par la matière visible. Lorsque ce n'est plus le cas, comme pour les galaxies à faible luminosité de surface, la région centrale est si petite que la résolution d'observation devient un facteur limitant.

7.2.1.4 Autres observations

Galaxies elliptiques

Les galaxies elliptiques sont particulièrement intéressantes pour l'étude de la matière noire car elles ont une géométrie plus simple et leur masse baryonique est presque uniquement sous forme d'étoiles (elles contiennent une petite quantité de gaz). Les informations sur ces galaxies proviennent de

trois sources : observations optiques, observations concernant la matière noire (lentille gravitationnelle, virial, courbes de rotation) et simulations numériques.

Les observations optiques ont montré qu'il existe une relation entre la luminosité L^* et la dispersion de la vitesse centrale, σ_c ,

$$\sigma_c \propto L^{0.12} \tag{7.153}$$

Cette *relation de Faber-Jackson* est l'analogue de la relation de Tully-Fischer. Des milliers de galaxies du SDSS [57] ont été utilisées pour établir que

$$\sigma_c \propto L^{0.12} \tag{7.154}$$

De plus, ces observations optiques ont pu établir qu'il existait une relation très précise [58] entre le rayon effectif R_e , c'est-à-dire le rayon contenant la moitié de la luminosité, la dispersion de la vitesse centrale et la luminosité L^* . Le SDSS [57] a établi que

$$R_e \propto L^{0.75} \sigma_c^{-1.5} \tag{7.155}$$

avec $p = Lx/R_e^2$. En coordonnées logarithmiques, cette relation définit le *plan fonctionnel* de la galaxie. La projection de cette relation implique que $R_e \propto L^{0.6310,025}$. Elle conduit également à la conclusion que la densité surfacique $\Sigma^*(r)$ peut être décrite par une fonction de trois paramètres.

Il a en effet été montré observationnellement qu'un profil à trois paramètres, appelé profil *Sersic*, de la forme

$$\Sigma(r) = \frac{L}{2\pi R_e^2} \left[1 - \exp\left(-\frac{r}{R_e}\right) \right]^{-n} \tag{7.156}$$

avec $n = L/R_e^2$ et $X = R/R_e$, reproduit bien les observations. En particulier, pour toute galaxie elliptique, $6(n) = (2n - 0.324)$ avec n compris entre 0,1 et 100. La dispersion de n est aujourd'hui comprise comme résultant en partie de la triaxialité des galaxies elliptiques,

Les données d'observation conduisent à la conclusion que les étoiles dominent au centre. En particulier, la masse dynamique varie très peu jusqu'en 2×10^5 pc qui montre que la matière noire est soit sous-dominante au centre, soit qu'elle a une densité sensiblement constante ou enfin que sa densité suit celle de la distribution lumineuse. Les observations de la distribution des vitesses stellaires tendent à prouver que la première hypothèse est privilégiée. Rappelons cependant que les galaxies elliptiques se forment par fusion successive avec des galaxies précoces qui induit l'existence d'orbites stellaires radiales, rendant l'analyse dynamique des étoiles plus délicate. A grand rayon, l'observation de multiples images de quasars montre que la matière noire domine la répartition de la matière. Malgré la géométrie simple de ces galaxies, la répartition de la matière noire reste mal connue, faute de mesures précises de la dynamique stellaire.

Galaxies à faible luminosité de surface

Les galaxies à faible luminosité de surface semblent être entièrement dominées par la matière noire, la population stellaire ne contribuant que marginalement à la masse totale. En particulier, le profil de densité de matière noire ne semble pas atteindre son maximum au centre.

Les contributions et répartitions relatives de la matière noire dans différents types de galaxies contiennent des informations importantes pour comprendre la relation entre la matière noire et la matière ordinaire. Les galaxies elliptiques et spirales à faible luminosité de surface donnent accès à des cas limites dont les conséquences n'ont pas encore été tirées, faute d'observations suffisamment précises.

Relation avec la masse du trou noir central

Tout comme la Voie lactée, il semble que les galaxies elliptiques et les renflements de la plupart des galaxies spirales contiennent un trou noir central. Une loi empirique récente a été établie entre la masse du trou noir central, M_* , et la dispersion des vitesses du renflement,

$$M_* = 10^{(0.2 \pm 0.32) \ln \sigma + (-8.13 \pm 0.06)} \text{ (7.157)}$$

Cette relation a été établie à partir de l'observation de 30 galaxies spirales pour lesquelles la masse du trou noir central et la courbe de rotation ont pu être mesurées.

Puisque la dispersion de vitesse est proportionnelle à LV^4 (Faber-Jackson pour les vélos elliptiques ou Tully-Fisher pour les spirales), nous nous attendons à ce que

$$L_* \propto M_*.$$

Les observations semblent indiquer effectivement que

$$M_* \sim 10^{-3} M_{\text{gal}},$$

M_{gal} étant la masse stellaire de la galaxie elliptique ou du renflement de la galaxie spirale. Cette relation ($M_* \propto \langle v^2 \rangle$) apporte des informations qui peuvent être utiles à la compréhension de la formation des galaxies et du rôle de la matière noire. Il est encore trop tôt pour affirmer si une telle relation peut être exactement déduite d'un modèle de formation de structures à grande échelle, mais une telle corrélation semble « naturelle » dans un modèle hiérarchique de formation de structures.

7.2.2 Matière noire dans les amas et groupes de galaxies

La première indication de l'existence de la matière noire a été révélée par Zwicky' lors de son étude de l'amas de Coma en 1930 [60]. Les amas de galaxies contiennent entre une centaine et plusieurs milliers de galaxies.

7.2.2.1 Théorème virial

Les amas de galaxies sont des systèmes gravitationnellement découplés de l'expansion cosmique. On peut donc supposer qu'ils sont dans un état stationnaire. La vitesse des galaxies est faible et nous pouvons modéliser l'amas comme un gaz isolé composé de particules massives qui interagissent uniquement par gravitation. L'accélération d'une galaxie dans l'amas est donnée par l'énergie gravitationnelle est

$$\ddot{\mathbf{x}}_i = G_N \sum_{j \neq i} m_j \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|^3}. \quad (7.158)$$

$$(7.159)$$

tandis que l'énergie cinétique totale est donnée par

$$(7.160)$$

La deuxième dérivée du moment d'inertie total, $I = \sum_{i,j} r_{ij}^2 x_i^2$ est liée à l'énergie cinétique par

$$\ddot{I} = 4K - 2 \sum_{i,j} \dot{x}_{ij}^2 = X_L^2. \tag{7.161}$$

L'équation du mouvement (7.158) peut alors être utilisée pour déduire que 7.2.2.3 Masse des amas

$$\sum_i m_i \mathbf{x}_i \cdot \ddot{\mathbf{x}}_i = G_N \sum_{j \neq i} m_i m_j \frac{\mathbf{x}_i \cdot (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|^3}$$

the second equality being obtained after symmetrization. We thus obtain the relation known as the *virial theorem*

$$I = 2U + 4K. \quad (7.162)$$

For a stationary System* the value of the time average of the moment of inertia is constant so that $\langle Z \rangle = \dot{U}$, in which case one has

$$\langle U \rangle + 2\langle K \rangle = \dot{U}. \quad (7.163)$$

One can express the mean kinetic energy as $\langle K \rangle = \frac{1}{2} M \langle u^2 \rangle$ and the mean potential energy as $\langle U \rangle = -\frac{a}{r_h}$ where M is the total mass, a is a numerical coefficient that depends on the geometry and on the density profile ($a \sim 0.4$ for galaxy clusters) and r_h the radius in which half of the mass is contained. The virial theorem can thus allow us to estimate the mass of the structure

$$(7.164)$$

7.2.2.2 Coma cluster

The Coma cluster has a mean redshift of $z = 0.0232$, which places it at around $1 \hat{U} \hat{U}$ Mpc of the Galaxy. The velocity dispersion along the line of sight is $880 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, that is a mean square velocity of $\langle u^2 \rangle \sim 2.32 \times 10^{12} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ assuming that the velocity distribution is isotropic. The estimate of is difficult, mainly because the distribution of dark matter is unknown. Assuming a ratio M/L constant with the radius and a spherical geometry, one can estimate that $r_h \sim 1.5 \text{ Mpc}$, which gives an estimate of the mass of the Coma cluster of $M \sim 2 \times 10^{15} M_\odot$. Since its luminosity is of the order of $L \sim 8 \times 10^{12} A/Q$, this means that $Q_{\text{Coma}} \sim 250 Q_\odot$. A refined analysis actually gives

$$Q_{\text{Coma}} \sim 400 h Q_\odot \quad (7.165)$$

and a similar study in the Perseus cluster gives $Q_{\text{Perseus}} \sim 60 \hat{U} A Q_\odot$.

Il existe deux autres méthodes pour déterminer la masse d'un amas. La première, présentée dans la section 7.1.2.6, utilise soit une forte lentille au centre ($r < 200 \text{ kpc}$), ce qui donne des contraintes de l'ordre de

$$Q_{\text{Coma}} \sim (100 - 200) < 2 Q_\odot, \quad (7.166)$$

ou des mesures des distorsions gravitationnelles des étoiles de fond ($r < 1 \text{ Mpc}$), ce qui conduit à

$$\ll \text{Coma} \sim 300 Q_\odot. \quad (7.167)$$

Une autre méthode repose sur l'émission de rayons X du rayonnement chaud du gaz intra-

amas. La présence d'un tel gaz chaud capturé au centre de l'amas est la preuve de l'existence de matière noire créant un puits gravitationnel suffisamment puissant pour piéger le gaz. Sans matière noire, le gaz chaud serait dilué au-delà de l'amas en un temps inférieur au temps de Hubble. Pour estimer la masse de matière noire, supposons que ce gaz est en équilibre hydrostatique et que sa pression compense la gravité.

$$\text{docteur} \quad r^* \quad (7168)$$

La pression du gaz est obtenue par la mesure de sa température

$$P = \quad \text{---} \quad , \quad (7,169)$$

où p est la masse effective de ses constituants en unités de masse du proton. Tant que g est constant, c'est à dire si la composition chimique est uniforme, on a

$$\frac{G_N M_x(<r)}{r} \cdot A, T(r) / \text{dlnp}^{\wedge} + \text{dlnTX} \\ pm_p \setminus \text{dlnr dlnry}$$

Le profil de température est souvent difficile à mesurer et l'amas est souvent supposé isotherme et composé d'un gaz avec une distribution radiale suivant un profil dit $\beta/3$, $P_{\text{gas}} = P_0 [1 + (r/r_c)^2]^{-\beta/3 + 1/2}$. Ces hypothèses sont généralement satisfaites pour les clusters à géométrie quasi-sphérique.

L'analyse de l'amas de Coma avec cette méthode donne une masse de l'ordre de $M_x \sim (3 - 4) \times 10^{14} M_{\odot}$ dans une région de 0.7 Mpc autour du centre et de $\sim (1 - 2) \times 10^{15} M_{\odot}$ dans une région de 3,6 Mpc. Ces mesures sont compatibles avec la masse déterminée à partir du théorème du virial et par lentille gravitationnelle. Une analyse similaire avec le cluster Perseus donne $Q = (213 \pm 60) h Q_{\odot}$

7.2.2.4 Résumé

Les études mentionnées ci-dessus [61] permettent de montrer que, pour les clusters,

$$\frac{M_{\text{gas}}}{M_{\text{DM}}} = (15 \pm 5)\%, \quad \frac{M_{\text{gas}}}{M_{\text{DM}}} = (3 \pm 2)\% \quad (7.171)$$

et les profils de densité suivent les profils NFW.

Pour résumer, pour $r > 1$ Mpc, nous ne connaissons pas la distribution de la matière. Pour $10 \text{ kpc} < r < 100 \text{ kpc}$, la masse dynamique, la masse déduite de la lentille gravitationnelle et celle déduite de la masse d'émission de rayons X diffèrent environ d'un facteur 2, probablement lié aux effets de projection. Pour $100 \text{ kpc} < r < 1 \text{ Mpc}$, les trois types d'observations donnent la même valeur pour la masse et la répartition de la matière est compatible à la fois avec un profil NFW et une sphère isotherme à rayon de noyau. Pour $r < 10 \text{ kpc}$, les diagnostics observationnels sont insuffisants.

7.2.3 Preuve cosmologique

L' évolution d'un espace-temps homogène et l'analyse de l'évolution des perturbations en régime linéaire apportent deux arguments supplémentaires en faveur de l'existence de la matière noire (voir Fig. 7.19).

- La nucléosynthèse primordiale donne accès à la quantité de matière baryonique présente dans notre Univers (voir chapitre 4).
- La forme du spectre de puissance des fluctuations de la matière dépend du rapport entre les densités baryonique et sombre, $Q_{bo}/\wedge^{co-}$, en particulier lorsque la quantité relative de baryons augmente, des oscillations apparaissent dans le spectre de puissance de la matière. Ces oscillations sont liées au couplage entre matière baryonique et rayonnement (voir chapitre 5).
- L'analyse conjointe des résultats de différentes observables cosmologiques, par exemple le fond diffus cosmologique (type supernovæ) et la lentille gravitationnelle, indique qu'environ 30 % de la matière doit être sombre.

Ces analyses permettent d'établir les deux contraintes

$$fW? = 0.0224 \pm 0.0009, \qquad Q_{co}h^2 = 0.113 \pm 0.009. \qquad (7.172)$$

These measurements imply that

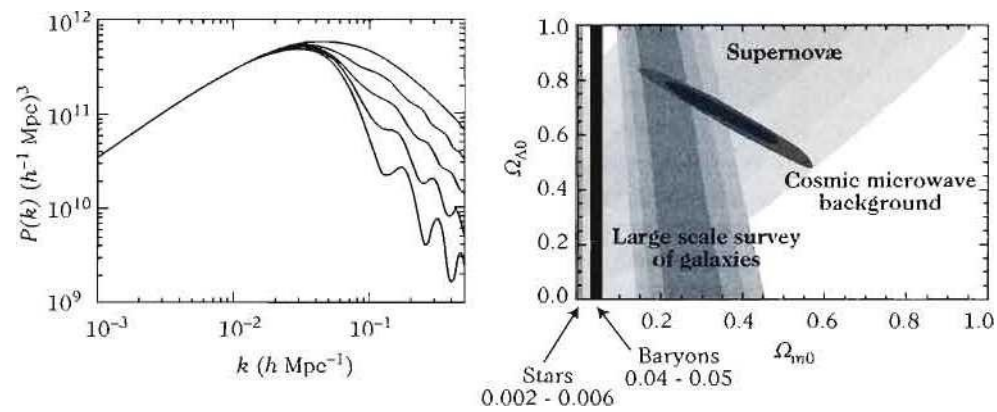


Fig. 7.19 (left); The matter power spectrum of large-scale structures is sensitive to the amount of baryons, pb/p_c increasing from the top to bottom curve. (right): The combiner! analysis of cosmological observations also indicates the necessity for 30% of dark matter.

$$\frac{\Omega_b}{\Omega_{\text{crit}}} = 4.83 \pm 0.87$$
$$P_b$$

(7.173)

aux échelles cosmologiques.

7.2.4 Résumé

Le tableau 7.3 résume les estimations du rapport masse/luminosité de différents systèmes et la quantité de matière noire qui peut être déduite de ces systèmes.

Ces analyses montrent qu’il est difficile de comprendre les structures de l’Univers, quelle que soit leur échelle, sans introduire la matière noire . Il reste encore beaucoup à comprendre concernant sa nature physique et sa distribution, en particulier sa relation avec la matière ordinaire. Cependant, comme le montre le tableau 7.4, à la plupart des échelles, la quantité de matière baryonique ne représente qu’une fraction de celle de la matière noire qui, de plus, semble diminuer avec l’ échelle .

Tableau 7.3 Résumé du rapport masse/luminosité estimé pour divers systèmes et implications pour la teneur en matière noire à différentes échelles.

Système		Échelle	Q/Qo	
voie Lactée	Limite de sortie	100 pièces	5(?)	0,003b ⁻¹
	courbes de rotation	20 kpc	dix	0,006b ⁻¹
	satellites	80 kpc	40	0,024b ⁻¹
	Courants de	100 kpc	80 £	0,05
Galaxies elliptiques	réglage du noyau	2 kpc	12b	0,007
	X auréole	100 kpc	750 £	0,46b ⁻¹
Galaxies spirales	courbes de rotation	50 kpc	£30h	0,018
Groupes	groupe local	800 kpc	100	0,06b ⁻¹
	autres	1 Mpc	260b	0,16
Groupes	Coma (bande B)	2 Mpc	400b	0,25
	Persée	2 Mpc	600b	0 37
Cosmologie		3000 Mpc	0,113b ⁻²	

Tableau 7.4 Rapport relatif de matière noire et baryonique. Ces contraintes indiquent que le ratio varie peu en fonction de l’ échelle de l’ ouvrage considéré.

Système	Amas	de galaxies spirales	Univers observable
DM vs baryon	E c/£b = 8,5 ±1,5	£ c/£b = 7,2 ±2,0	Pc/p >= 4 83 ±0 87

7.2.5 Candidats et contraintes

La matière noire est dite *chaude* ou *froide* selon que ses constituants sont relativistes ou non au moment du découplage du plasma cosmique (voir chapitre 4). Le seul exemple de matière noire dont l’existence a été prouvée est le neutrino, qui est un composant chaud de la matière noire. Nous savons cependant que les neutrinos ne peuvent pas représenter la totalité de la matière noire car ils sont trop légers.

Nous abordons maintenant les deux aspects suivants : (1) d'un point de vue structure-formation, quelles doivent être les caractéristiques de cette matière noire et (2) d'un point de vue physique des particules, quelles sont les candidates.

7.2.5.1 Phénoménologie cosmologique

Modèle standard de matière noire froide

Le modèle standard de matière noire froide (SCDM) suppose que la matière noire est composée de particules massives qui interagissent très faiblement entre elles et avec les autres composants de l'Univers. Ces particules sont généralement appelées WIMPs (particules massives à faible interaction).

Si ces particules sont thermiques, leur abondance dépend de deux paramètres, leur masse et leur section efficace. De manière générale, ces deux paramètres déterminent la nature de la matière noire (froide ou chaude). Pour la matière noire froide, nous avons établi [voir (4.76)] que la densité de référence est donnée par

D'un point de vue cosmologique, ce modèle se réduit à l'addition d'un fluide sans pression (c'est-à-dire sans collision), donc avec l'équation d'état $w = 0$, couplé à la matière ordinaire uniquement par la gravité. L'une des motivations pour considérer un tel modèle réside dans la croissance des perturbations cosmologiques (voir chapitre 5). Comme nous l'avons vu, à l'ère dominée par la matière, les fluctuations sub-Hubble augmentent comme un phénomène. Il est alors difficile de comprendre comment le contraste de densité peut devenir aujourd'hui de l'ordre de l'unité s'il était de l'ordre de 10^{-5} at. le temps de recombinaison à $z \sim 10^3$. La matière noire résout ce problème puisque, n'étant pas couplée au rayonnement, elle peut commencer à développer des puits de potentiel avant l'égalité matière-rayonnement.

Ce modèle de matière noire a été étendu au modèle dit Λ CDM, dans lequel la matière noire ne représente que 30 % de la quantité totale de matière. Elle offre aujourd'hui une bonne compréhension du régime linéaire et est en accord avec la plupart des observations cosmologiques (fond micro-ondes cosmique, structures à grande échelle, etc.). C'est à la base du *modèle de concordance* de la cosmologie.

Ce modèle de matière noire est considéré comme réussi pour trois raisons principales. (1) Ses prédictions sont en accord avec la plupart des observations de structures à grande échelle. (2) Il existe de nombreux candidats motivés par la physique des hautes énergies. (3) Si les particules de matière noire interagissent via l'interaction faible, alors leur densité de référence a le bon ordre de grandeur [cf. (7.174)].

Le modèle SCDM est un modèle *hiérarchique* de formation de structures (voir Section 5.5.2) dans lequel les petites structures sont formées avant les grandes. Ainsi, la distribution des halos smaJI ne devrait pas être fortement corrélée à celle des structures plus grandes qui se forment plus tard. Les propriétés des halos de matière noire dans ce modèle ont été étudiées de manière intensive au moyen de simulations numériques à N corps. Ils ont permis d'établir que les profils de densité des halos de matière noire prennent la forme

$$\rho(r) = \frac{\rho_s}{\left(1 + \frac{r^2}{r_s^2}\right)^{3/2}} \quad (7.175)$$

Ces profils se comportent comme $r \sim r^{-3}$ à grande échelle, contrairement au comportement comme r^{-2} des profils universels. Le comportement empirique en tant que r^{-2} , obtenu à partir des courbes de rotation, n'est qu'une approximation dans la région *de transition* entre le comportement en tant que r^{-1} au centre et $r \sim B$ à l'extérieur. Indépendamment des autres détails cosmologiques, ce mode ! prédit la formation de halos triaxiaux avec des noyaux très denses et

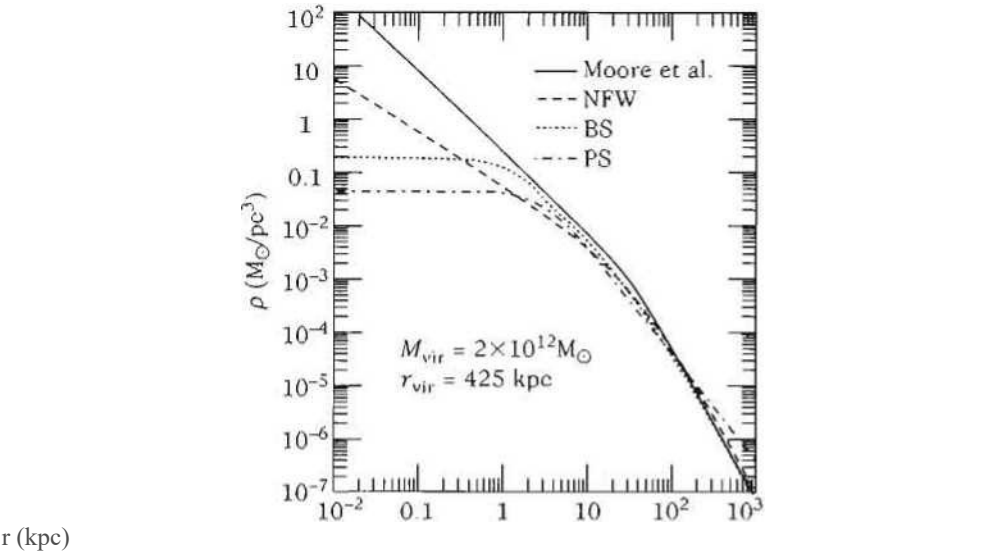


Fig. 7.20 Comparaison entre les profils de densité de halo obtenus par simulations numériques et les profils de densité universelle obtenus à partir d'un ajustement aux observations.

de nombreuses sous-structures. Ces sous-structures sont naturelles dans tout modèle hiérarchique de formation de structure. Les paramètres de ces profils (ρ_0 , γ , r_s) sont donnés dans le tableau 7.5.

La densité caractéristique est obtenue à partir de la masse totale et de la taille de la galaxie. La figure 7.20 compare les différents profils d'une galaxie typique.

Tableau 7.5 Paramètres des profils de densité de matière noire (7.175) obtenus par différentes études de simulations numériques à N corps

Modèle	γ	β	α	r_j (kpc)
Navarro Frenk-Blanc (NFW)	1	3	1	20
Moore	1,5	3	1,5	28
Kravstov	2	3	0,4	dix
Isotherme à rayon de cote	2	2	0	3.5

Les simulations les plus récentes [59] donnent d'autres profils avec une forme proche des profils

Sersic déprojetés

$$\rho(r) = \rho_0(a) \exp \left[-2\mu \left(\frac{r}{a} \right)^{1/\mu} \right] \exp(2\mu), \quad (7.176)$$

avec jj , $-6 \pm 0,2$ et a étant le rayon où la pente du profil est égale à -2 . De plus, dans ces modèles le profil $Po(a)$ se comporte comme $Po(a)$

La valeur, 7, de la pente du profil dans la partie intérieure du halo est source de nombreux débats. Ces simulations semblent montrer que le profil ne se comporte pas comme une loi de puissance au centre. Notez également que ces profils représentent un ajustement aux résultats de plusieurs simulations numériques et ne quantifient pas la dispersion autour de cet ajustement. Le modèle MDP doit toutefois faire face à des problèmes non résolus à petite échelle.

- Il prédit trop de sous-structures, de petits halos et de galaxies en orbite autour de structures plus grandes que ce qui est observé.

- Le nombre de ces halos varie comme l'inverse de la masse du halo. De nombreux satellites, comme le nuage de Magellan pour notre Galaxie, devraient ainsi être observés. L'observation du Groupe Local révèle moins d'une centaine de galaxies (36 galaxies naines sont connues dans un rayon de 0,5 Mpc) alors que les simulations numériques et les estimations analytiques prédisent environ un millier de satellites.

Ces satellites devraient induire un épaississement du disque galactique plus important que celui observé.

- Les profils de densité prévus des halos de matière noire sont plus élevés que ceux observés dans de nombreux systèmes autogravitants.

Les amas, observés par lentille gravitationnelle, ont des noyaux moins pointus que ceux prédits pour les halos massifs. A noter que les observations du noyau sont cependant difficiles puisque les baryons dominent. Soulignons également que l'interprétation des courbes de rotation suppose une symétrie axiale, alors que dans ces régions les étoiles ne sont pas toujours sur des orbites képlériennes.

- La densité centrale des galaxies naines et à faible luminosité de surface est trop faible et le profil de densité trop lisse par rapport à celui obtenu à partir de simulations numériques. Étonnamment, les plus petites galaxies (par exemple DD0210, DD0154, etc.) correspondent à un profil de matière noire quasi constant.
- La persistance des barres dans les galaxies à forte luminosité de surface implique également que ces galaxies ont des noyaux de faible densité.
- Si le noyau devient dense trop tôt, alors le refroidissement des baryons pourrait être trop efficace, ce qui conduirait à des disques galactiques avec un moment cinétique d'un ordre de grandeur trop petit.
- Les galaxies sphéroïdales naines sont également dominées par la matière noire, mais elles ne montrent aucun signe de profil pointu.
- Les galaxies naines de faible luminosité semblent être plus fortement corrélées qu'elles ne le devraient aux galaxies lumineuses. En particulier, ils ne comblent pas les grands vides entre la répartition des galaxies lumineuses et se localisent aux frontières de ces vides.
- L'observation de la formation des galaxies à $z \sim 3 - 4$, plus tardive que celle des

galaxies brillantes les plus massives, semble en contradiction avec un modèle hiérarchique de formation des structures. De même, il existe des trous noirs supermassifs ($10^6 - 10^9 M_{\odot}$) à des redshifts élevés, ce qui ne semble pas très compréhensible dans ce scénario.

Il ne faut néanmoins pas tirer des conclusions trop hâtives. Une des clés du débat réside dans le comportement à grande distance où les simulations prédisent que les profils se comportent comme $1/r^3$. Ces zones externes sont, à ce jour, difficiles à étudier par observation. Deux sources d'information peuvent être considérées : Premièrement, la lentille galaxie-galaxie est sensible aux objets les plus massifs et il semble [62] que les observations du cisaillement cosmique en fonction de la distance pour les galaxies de masse supérieure à $10^9 M_\odot$ est compatible avec les profils NFW. Deuxièmement, les données de l'enquête SDSS ont permis d'étudier des galaxies satellites de différents amas [63], dont le comportement semble compatible avec un profil NFW. Ces deux observations n'établissent pas de manière définitive le comportement du profil de densité à de grandes distances mais indiquent une tendance à se confirmer.

Autres modèles

Les problèmes du modèle Λ CDM à petite échelle ne doivent pas éclipser ses succès à grande échelle et en régime linéaire. Ces difficultés ont motivé le développement de nombreux modèles phénoménologiques de la matière noire avec pour objectif principal de modifier les propriétés des structures à petite échelle. Chacun de ces modèles apporte de nouvelles réponses à un ou plusieurs problèmes du modèle Λ CDM et possède de nombreuses signatures propres que les futures observations et simulations numériques devraient pouvoir discriminer. La liste suivante n'est pas du tout exhaustive mais illustre la variété des tentatives.

1. *Matière noire chaude* (HDM) : ce modèle a été motivé par l'étude des neutrinos. Cette forme de matière noire est relativiste au moment du découplage et au moment de la formation de structures à grande échelle. Le principal problème est que les particules de matière noire sont trop rapides pour être piégées et s'effondrer gravitationnellement. De plus, la formation des structures commence trop tard puisque l'égaleité est retardée. Une échelle importante est l'échelle de diffusion libre λ_{fs} d'une particule relativiste avant qu'elle ne devienne non relativiste. Dans les modèles HDM, les fluctuations sur des échelles inférieures à λ_{fs} sont effacées de sorte que le spectre des perturbations de la matière ait une coupure bien définie à λ_{fs} (voir Fig. 5.16). Par exemple, pour les neutrinos massifs, $\lambda_{\text{fs}} \sim 40$ (30 eV/ m_ν) Mpc. Cela implique que les protogalaxies de masse de l'ordre de $10^{15} M_\odot$ sont les premiers objets à se former. Des objets plus petits se forment alors par *fragmentation*. Le modèle de formation de la structure est alors très différent du modèle hiérarchique du modèle Λ CDM.
2. *Matière noire chaude* (WDM) : ce modèle [64] est un compromis entre les modèles HDM et CDM. La matière noire serait composée de couches thermiques relativistes au moment du découplage mais qui deviendraient non relativistes avant l'égaleité. La distance caractéristique en dessous de laquelle les fluctuations de densité sont effacées est donnée par

$$\lambda_{\text{fs}} \approx 17 \left(\frac{m_\nu}{\text{keV}} \right)^{-1} \text{ Mpc}. \quad (7.177)$$

Une matière noire chaude candidate doit donc avoir une masse de l'ordre de 0,1 à 1 keV. Les principales prédictions de ce modèle sont (1) le lissage du noyau du halo, qui se traduit par une diminution de la densité du noyau et une augmentation du rayon du noyau, (2) une diminution de la densité caractéristique des petites masses : auréoles, (3) un

réduction globale du nombre de halos de petite masse, (4) une diminution du nombre de halos de petite masse à l'intérieur de halos de plus grande masse, (5) la formation de vides ne contenant pas de halos de petite masse, (6) la formation de petits halos au redshift $z < 4$ via un processus de fragmentation et (7) la suppression de la formation de halo à de grands redshifts ($z > 5$). Les propriétés (1) et (5) apportent des solutions à certains problèmes Λ CDM tandis que (6) et (7) offrent la possibilité de tests spécifiques. Si le retard dans la formation de la structure était trop important, le mode Λ deviendrait alors incompatible avec les observations.

3. *Matière noire auto-interagissante Strongly Interacting Dark Matter (SIDM)* : ce mode Λ [65] suppose que la matière noire possède une section efficace d'auto-interaction qui ne peut être négligée alors que le taux d'annihilation reste très faible. Cette interaction ne modifie la dynamique de la matière noire que lorsque sa densité devient importante, de sorte que le fond diffus cosmologique et les structures à grande échelle restent insensibles à cette modification. Concrètement, le libre parcours moyen du SIDM devrait être compris entre 1 kpc et 1 Mpc lorsque la densité est de l'ordre de $0,4 \text{ GeV cm}^{-3}$ (densité typique à la position du Système Solaire). En effet, si le libre parcours moyen était plus grand, aucune interaction ne se produirait à des échelles de la taille du halo et s'il était inférieur à 1 kpc, la matière noire se comporterait comme un gaz collisionnel, ce qui modifierait grandement l'évolution et la structure de les auréoles. La masse de ces particules doit être comprise entre 1 MeV et 10 GeV et leur section efficace doit être de l'ordre de

$$\sigma \sim 8 \times 10^{-28} \left(\frac{v}{v_0} \right)^{-1} \left(\frac{m}{100 \text{ GeV}} \right)^2 \text{ cm}^2 \quad (7.178)$$

La structure du halo n'est modifiée qu'au-dessus d'une densité surfacique donnée et induit une redistribution de matière dans ces régions, produisant ainsi un noyau moins dense et plus sphérique. Notez que si σ est trop grand, le halo peut s'évaporer complètement, ce qui peut conduire à des effets catastrophiques, mais serait observable sans aucune difficulté dans la démographie du halo.

4. *Matière noire répulsive (RDM)* : ce mode Λ [66,67] suppose que la matière noire est un condensat massif de bosons avec un potentiel répulsif à courte distance. La partie interne du halo se comporte alors comme un superfluide, qui a tendance à lisser son profil. Les noyaux de halo auraient alors une taille minimale indépendante de leur densité. En régime linéaire, les échelles inférieures à quelques Mpc sont supprimées.

nombre d'onde $k \sim 4,5(m/10^{-22} \text{ eV})^{1/2} \text{ Mpc}^{-1}$ dans le spectre de puissance linéaire, ce qui peut affecter l'abondance des objets de petite masse. Cette échelle de masse peut cependant paraître artificielle dans le cadre de la physique des particules. Notez que la masse d'une particule avec une longueur d'onde Compton de la taille de l'Univers observable est de l'ordre de $m \sim 10^{33} \text{ eV}$ et qu'une masse de cet ordre peut aussi être mise en relation avec l'accélération de l'Univers (cf. Chapitre 12).

6. *Matière sombre auto-annihilante* (SADM) : ce mode ! [69] suppose que la matière noire peut s'annihiler dans les régions de forte densité où les interactions à deux corps deviennent importantes. L'annihilation produit un rayonnement qui ne devrait pas inclure de photons, car leur flux dépasserait les contraintes d'observation. L'annihilation a pour effet de diminuer la densité du noyau et d'induire une expansion globale du halo due à la diminution du potentiel gravitationnel. Le taux d'annihilation dépend de la densité et de la dispersion des vitesses, $T = n\langle cv \rangle$. Dans le cas particulier où $F =$ le profil de densité prend la forme

$$p(r) = p_s \left[\frac{r}{r_s} \left(1 + \frac{r}{r_s} \right)^2 + \frac{Ps}{m/(crt_0)} \right]^{-1} \quad (7.180)$$

où *aller* est l'âge de l'Univers. Une section transversale (cru) $\sim 10^{-29} (m/1 \text{ GeV}) \text{ cm}^2$ donne une densité centrale de 1 GeV/cm^3 , en accord avec les observations. Les effets sur le nombre de petits halos n'ont pas été étudiés.

7. *Matière noire en décomposition* (DDM) : si les halos denses peuvent se désintégrer en particules relativistes et en particules de plus petite masse, alors la densité des noyaux formés plus tôt peut être sensiblement réduite sans affecter la structure à grande échelle [70]. Un problème potentiel de cet inmodèle est que le taux de production d'amas denses et massifs doit être bien plus important qu'en mode SCDM) pour obtenir une distribution correcte après la désintégration de la matière noire.
8. *Trous noirs massifs* (BH) : si l'essentiel de la matière noire était composée de trous noirs massifs d'environ 10^3 masses solaires, le frottement dynamique entre les trous noirs et la matière ordinaire pourrait conduire à la migration de ces trous noirs vers le centre. Ils peuvent ainsi donner naissance au trou noir central de la galaxie, diminuant la quantité de matière noire dans le noyau. Mais il faut d'abord supposer que ces trous noirs sont présents.
9. *Spectre initial* : la rupture de l'invariance d'échelle du spectre de puissance des fluctuations primordiales aux environs de $k \sim 5 - 10 \text{ h}^{-1} \text{ Mpc}$ peut modifier marginalement les structures des halos à petite échelle [71].

Ces modèles introduisent deux types de modifications par rapport au modèle SCDM. (1) Le halo n'est affecté que lorsque le taux d'interaction devient supérieur à une valeur critique (SIDM, BH, SADM). (2) Les modèles disposent d'une échelle caractéristique de temps ou de distance en dessous de laquelle le halo est modifié (WDM, MDM, FDM, DDM). Ils conduisent donc à des prédictions observationnelles différentes. Par exemple, pour produire les mêmes structures aujourd'hui, les objets d'une masse donnée doivent se former plus tôt dans DDM, SADM et BH tandis que les objets

de forme de masse plus petite plus tard dans FDM et HDM et par fragmentation dans WDM. La démographie des halos et des satellites est modifiée ainsi que le profil de densité du cœur. Pour illustrer ces exemples, la figure 7.21 résume quantitativement les implications de ces scénarios. La structure centrale des halos, et principalement celle des naines et des galaxies à faible luminosité de surface, semble être la clé pour caractériser la matière noire.

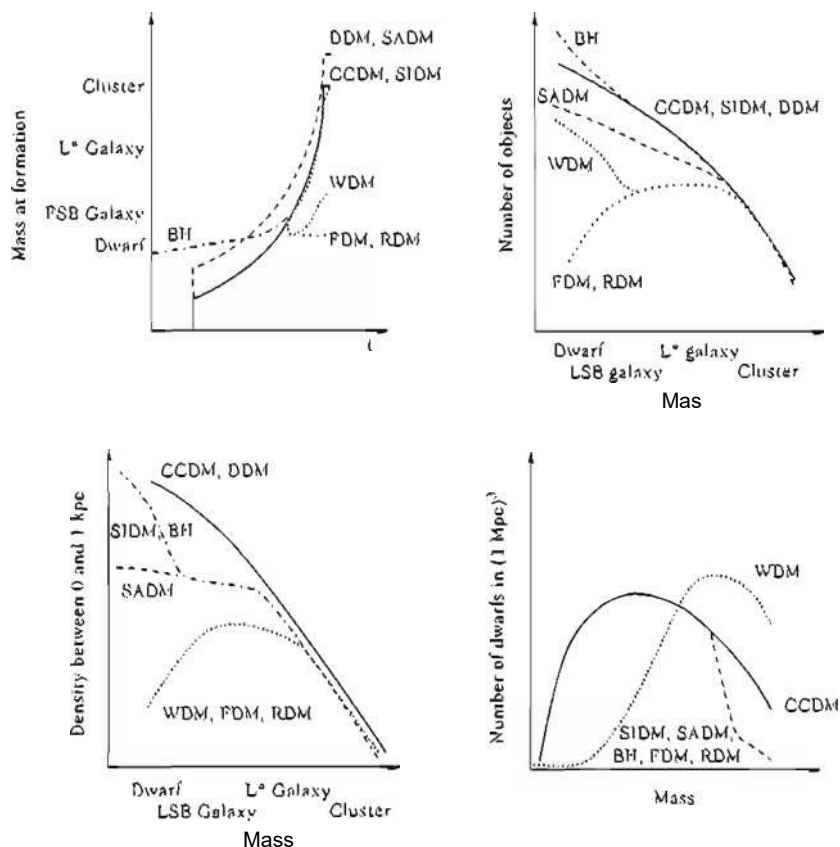


Fig. 7.21 Prédications and signatures for varians models of dark matter. (top left): the formation time of a structure with a given mass for structures of increasing mass (dwarfs, low surface brightness, galaxies, clusters), (top right): dependence of the number of objects as a function of its mass, (bottom left): density in the inner 1 kpc région as a function of the mass of the System, (bottom right): number of dwarfs in a volume of $(1 \text{ Mpc})^3$ as a function of the mean densjty in this volume. From Ref. [72].

7.2.5.2 Candidats à haute énergie

Le mode standard de la physique des particules (voir chapitre 2) ne fournit aucun candidat à la matière noire. Le seul fermion neutre (stable), le neutrino, a une

masse nulle, bien que l' on sache expérimentalement qu'il est massif. Néanmoins, presque toutes les extensions de ce mode standard ! fournissent plusieurs candidats, et notamment des neutrinos massifs.

Pour des revues détaillées concernant ces candidats, les méthodes de détection et les contraintes expérimentales , voir Réf . [73-76] .

Nous ne considérons ici que les candidats non baryoniques. Comme expliqué dans la section 7.1.2.1, la microlentille nous permet d'imposer une forte contrainte sur l'abondance des naines brunes. De plus, la nucléosynthèse et la formation de structures à grande échelle nous fournissent de solides arguments contre le fait que toute matière noire pourrait être baryonique. Les candidats à la matière noire peuvent être classés selon divers critères.

La première classification est basée sur la masse candidate au moment de la formation des galaxies, à une température de l' ordre de $T \sim 1$ keV. Les particules de masse $m \sim 1$ keV sont dites chaudes (comme les neutrinos), celles de masse $m \gg 1$ keV *froid* (neutralinos, axions,...) et ceux de masse $m \sim 1$ keV *chaud* (neutrinos stériles, gravitinos).

Une deuxième classification peut être effectuée sur la base du mécanisme de production . On peut distinguer les dépendances *thermiques* , qui étaient en équilibre thermique lors de l' Univers primordial (neutrinos, neutralinos,...) et *non thermiques* , produits par certains mécanismes non thermiques (axions produits par les cordes cosmiques, WILVIPZILLA,...).

Cette dernière classification repose sur le cadre de la physique des particules dans lequel ils apparaissent. On peut distinguer les candidats *existants* (neutrinos), les candidats motivés mais non encore observés (par exemple les particules légères supersymétriques, axion), c'est à dire qui apparaissent naturellement dans le cadre de la physique des particules indépendamment du problème de la matière noire et qui ont des masses. et des sections transversales conduisant à des densités de relief en accord avec les contraintes, et des candidats *exotiques* qui peuvent néanmoins être des idées intéressantes (par exemple, les WIMPZILLA). Cette dernière classification est en effet plus arbitraire et variable en fonction des progrès de la physique des particules.

7.2.5.3 Neutrinos

extensions , sinon la totalité, du modèle standard de physique des particules permettent l'inclusion d'un neutrino massif de masse < 100 eV.

Les expériences d'oscillations de neutrinos (voir Réf. [74]) permettent d' établir que

$$\Delta m^2_{21} \sim 3 \times 10^{-5} \text{ eV}^2, \quad \Delta m^2_{31} \sim 7 \times 10^{-3} \text{ eV}^2. \quad (7.181)$$

Cela conduit à la conclusion que la masse du neutrino le plus lourd doit être supérieure à 0,05 eV et les expériences en laboratoire montrent que la masse de chacun des trois neutrinos doit être inférieure à 2,8 eV.

Les neutrinos contribuent ainsi à la matière noire chaude et leur abondance (voir chapitre 4) peut être évaluée comme

$$\Omega_{\nu} h^2 \approx \sum_i \frac{m_i}{94 \text{ eV}} \quad (7.182)$$

avec $\sum_i = 1$ pour les neutrinos de Majorana et $\sum_i = 2$ pour les neutrinos de Dirac. Ainsi avec un seul neutrino de Majorana, la contrainte sur la masse du neutrino implique que

$$Cl_{uQ} h^2 < 0,0006. \quad (7.183)$$

L'analyse des données du fond diffus cosmologique, de la nucléosynthèse primordiale et des grandes structures implique que

$$Cl_{\nu} h^2 < 0,0076, \quad (7.184)$$

ce qui nécessite que $< 0,7 \text{ eV}$. En conclusion, la combinaison du laboratoire et les contraintes cosmologiques donnent

$$0,0006 < Cl_{\nu} h^2 < 0,0076, \quad 0,05 \text{ eV} < < 0,7 \text{ eV}. \quad (7.185)$$

Ces contraintes impliquent que les neutrinos ne peuvent pas représenter la majeure partie de la matière noire (pour une revue sur les neutrinos cosmologiques, voir [77,78]). Nous sommes donc amenés à considérer des particules dont l'existence n'est que suggérée à partir des extensions du modèle standard de la physique des particules.

7.2.5.4 *Autres types de neutrinos*

Les neutrinos sont des fermions. Le principe d'exclusion de Pauli implique que les neutrinos légers ne peuvent pas représenter l'essentiel de la matière noire. En effet, dans une galaxie naine, qui doit être dominée par la matière noire, ces neutrinos doivent être confinés dans l'espace des phases, avec un volume déterminé par le principe de Pauli. On peut montrer que pour expliquer la répartition de la matière noire dans les galaxies naines, il faut que la masse d'au moins une espèce de neutrino satisfasse [79]

$$m_{\nu} \geq 120 \frac{c_{\nu} \times i/4 / r_{\nu}}{V 100 \text{ km}^3} eV, \quad (7.186)$$

ce qui est en contradiction avec les contraintes (7.185).

Les neutrinos stériles [80], qui sont des neutrinos droitiers couplés uniquement à des neutrinos gauchers (neutrinos actifs), ont également été envisagés. Ces neutrinos sont principalement produits par des oscillations de neutrinos. Selon leur masse, ils peuvent se comporter comme de la matière noire chaude, tiède ou froide. A titre d'exemple, le terme de masse pour un modèle avec une seule génération de neutrinos droitiers est donné par le Lagrangien où $\langle j \rangle$ est le champ de Higgs et v sa valeur attendue du vide (VEV). Le cas de la matière noire bot correspond à $p \sim 10^2 \text{ eV}$ et $M \ll p$ ou $p/M \sim 90 \text{ eV}$ et $M \gg p$. Lorsque les neutrinos stériles sont candidats à la matière noire, M est la masse pertinente.

$$\mathcal{L} = \mu \left(\frac{\phi}{v} \right) \bar{\nu}_L \nu_R + M \nu_R \nu_R + \text{h.c.}, \quad (7.187)$$

7.2.5.5 *Axions*

L'action combinée de la conjugaison de charges et de la parité (voir chapitre 2) ne constitue pas une symétrie exacte, même dans le modèle standard de physique des particules décrit au chapitre 2.

CP une violation dans le secteur des interactions fortes est attendue dans le cadre de la chromodynamique quantique. Le lagrangien effectif contient alors un terme de la forme [81]

$$\mathcal{L} \supset \frac{g}{f_a} G^a_{\mu\nu} \tilde{G}^{\mu\nu} \quad (7.188)$$

$G^a_{\mu\nu}$ étant le tenseur des gluons. Ceci viole en effet la parité (P) et l'inversion du temps (T) et donc CP comme CPT doit être conservé. Un tel terme induit un dipôle électrique permanent pour les nucléons, qui n'est cependant pas observé jusqu'à la sensibilité expérimentale actuelle, correspondant à la contrainte $\theta < 10^{-10}$.

Les axions ont été introduits par Peccei et Quinn [82] pour résoudre ce problème. Pour cela, le groupe de symétrie du modèle standard est étendu par une symétrie globale, $U(1)_{PQ}$, qui se brise spontanément. La symétrie étant globale, son boson de Goldstone ne peut pas être absorbé par le degré de liberté de Higgs, et il doit donc exister un champ scalaire supplémentaire, appelé axion, a , qui est associé à la phase du $U(1)_{PQ}$ formation. Notez que de telles symétries globales supplémentaires $U(1)$ apparaissent également dans certains schémas de compactification de type I/II théories des cordes hétérotiques.

La phénoménologie des axions est déterminée par un paramètre unique, f_a , qui caractérise l'ampleur de la rupture de symétrie de Peccei-Quinn, et en fonction duquel la masse de l'axion est donnée par

$$m_a = 0.62 \left(\frac{10^7 \text{ GeV}}{f_a} \right) \text{ eV}$$

De plus, on peut montrer que l'axion est couplé à deux photons puisque son action effective contient un terme de la forme

$$\frac{F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}}{4} \frac{a}{f_a} \quad (7.190)$$

où $F_{\mu\nu}$ est le tenseur de Faraday et $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$, son dual. Ce couplage implique que l'axion peut se désintégrer en deux photons. Ce processus domine à moins que $m_a > 2m_e$ car l'axion peut alors se désintégrer rapidement en paires électron-positron.

De plus, en présence d'un champ magnétique, un axion peut osciller en un photon d'énergie m_a . Les contraintes de laboratoire et d'astrophysique impliquent que $m_a < 0,01 \text{ eV}$. Son couplage aux autres champs est donc très faible et l'axion se comporte donc comme de la matière noire froide. L'axion original de Peccei-Quinn est donc très contraint, principalement parce qu'il interagit avec la matière ordinaire et parce qu'il faut $f_a \sim 250 \text{ GeV}$. Les propriétés de l'axion ont été étendues afin de l'introduire dans d'autres secteurs, ce qui en fait un *axion invisible*.

7.2.5.6 Des candidats motivés par la supersymétrie

D'un point de vue théorique, les candidats à la matière noire les mieux motivés sont probablement ceux qui apparaissent dans le cadre des théories supersymétriques (voir chapitre 10).

Pour être candidate WIMP, la particule supersymétrique la plus légère (LSP) doit être électriquement neutre et avoir un singulet de couleur.

- *sneutrino* : le partenaire supersymétrique du neutrino, $\tilde{\nu}$, est considéré depuis longtemps comme un bon candidat et sa densité de relas est dans le bon ordre

de grandeur si sa masse est de l'ordre de $m_{\tilde{g}} = 550 - 2300$ GeV. Néanmoins, la section efficace de son interaction avec les nucléons dépasse les contraintes obtenues par les expériences de détection de matière noire qui imposent que $m_{\tilde{g}} \gg 20$ TeV.

- *gravitino* : le partenaire supersymétrique du graviton peut être le LSP dans les théories localement supersymétriques (supergravité). Néanmoins, comme il n'interagit que par gravitation, il est presque impossible à détecter. Le gravitino a un spin égal à $3/2$ et obtient une masse $m_{3/2}$ lorsque la supersymétrie est brisée. Son interaction étant purement gravitationnelle, son taux d'interaction est de l'ordre de

$$(7.191)$$

⁷⁷p

Le découplage se produit lorsque $F_{3/2} \sim H \sim T^2/M_p$, c'est à dire aux alentours de $T \sim M_p$. En utilisant la relation (4.80), nous nous attendons à une densité de relief de l'ordre de $Q_{3/2} h^2 \sim 2,25(m_{3/2}/10 \text{ eV})$ [en utilisant $p_{3/2} \sim 4$ et en évaluant $g_{\text{eff}} \sim 200$]. Si $h \sim 0,7$, cela nécessite que

$$m_{3/2} < 4,42 \text{ eV}. \quad (7.192)$$

Cette valeur est trop petite puisque $m_{3/2}$ contrôle l'échelle de rupture de supersymétrie et une telle valeur ne permet pas aux particules supersymétriques d'avoir une masse supérieure à a. TeV. C'est ce qu'on appelle le *problème gravitino*. Cela peut être évité en supposant que le gravitino est plus lourd et qu'il se désintègre au cours de l'évolution cosmique. Le taux de décroissance est alors de l'ordre de $\Gamma_{3/2} \sim m_{3/2}^4/M_p$ au lieu de (7.191). Il devient comparable au taux d'expansion, $H \sim T^2/M_p$, à une température de l'ordre de $T_d \sim m_{3/2}^2$ qui correspond à la température à laquelle les gravitinos se désintègrent.

L'Univers est alors réchauffé et des contraintes sont alors fixées par la nucléosynthèse car cette désintégration ne doit pas modifier les abondances des éléments légers. Enfin, les gravitinos pourraient être surproduits au cours de l'Univers primordial [83].

- *neutralino* : il existe quatre neutralinos, $\tilde{\chi}_n$ avec $n = 1 \dots 4$ par ordre de masse croissante, dans le mode minimalement supersymétrique (MSSM) qui sont des combinaisons linéaires du Wino, $\tilde{W}^3$, du Bino, $\tilde{B}$, et de les deux Higgsinos, $\tilde{H}_u$, ces particules étant les partenaires supersymétriques respectivement des bosons de jauge $1V_3$ et $\tilde{B}$, et des bosons neutra) de Higgs, $\tilde{H}_d$ et $\tilde{H}_u$. Les quatre états neutralinos sont donc donnés par

$$\tilde{\chi}_n = N_{1n} \tilde{B} + N_{2n} \tilde{W}^3 + N_{3n} \tilde{H}_d + N_{4n} \tilde{H}_u \quad (7.193)$$

où les coefficients N_{in} sont les vecteurs propres de la matrice de masse neutralino. Cette matrice de masse dépend de $\hat{O}_W$ et m^2 (voir chapitre 2) et quatre des 63 paramètres indéterminés du MSSM $|\tilde{A}_Y|$ et les masses des gauginos des groupes $U(1)_Y$ et $SU(2)_L$, $\tan \beta$, le rapport des VEV des deux Champs de Higgs, et μ , le paramètre de masse pour le Higgsinos|.

Le problème à résoudre est de comprendre si, pour un ensemble donné de valeurs de ces paramètres, les sections efficaces d'annihilation et d'interaction avec les nucléons (voir Réf. [84]), ainsi que la masse de $\tilde{\chi}^0$, sont compatibles avec les abondances liées. Puisque les neutralinos sont non relativistes, leur section efficace peut être

développé comme $\langle \sigma v \rangle = a + bv + \dots$. En utilisant l'approximation analytique (4.76), nous obtenons une borne inférieure pour la densité de relief [84]

$$\Omega_{\tilde{\chi}^0} h^2 \sim (iO\tilde{U}TeV)^{-1} \quad (7.194)$$

Cette estimation peut être modifiée d'un facteur 2 si l'on prend en compte les coannihilations. Les contraintes cosmologiques et accélératrices conduisent à la conclusion que la masse neutralino doit satisfaire [73]

$$108 \text{ GeV} < m_{\tilde{\chi}^0} < 370 \text{ GeV} \quad (m_{\tilde{\chi}^0} > 0) \quad 160 \text{ GeV} < m_{\tilde{\chi}^\pm} < 430 \text{ GeV} \quad (i < 0). \quad (7.195)$$

une matière noire chaude ou tiède. Il ne peut se comporter comme de la matière noire que si la température de réchauffage est suffisamment faible.

7.2.5.7 WIMPZILLA

L'hypothèse selon laquelle la matière noire est une matière thermique est en quelque sorte très restrictive. Elle oblige la masse du candidat possible à être inférieure à quelques TeV, c'est-à-dire de l'ordre de l'échelle électrofaible. La raison de l'existence d'une telle limite réside dans le fait que pour une particule de masse « DM », la section efficace d'annihilation a une limite maximale de l'ordre de $\sigma \sim 10^{-26} \text{ cm}^2$, appelée *limite unitaire*. [85] Cela impose que la masse des particules [84] soit de l'ordre de

$$m_{DM} < 340 \text{ TeV} \quad (7.196)$$

Les mesures WMAP ont réduit cette contrainte à

$$m_{DM} < 34 \text{ TeV}. \quad (7.197)$$

Cela ne peut être évité que si la matière noire n'est pas une question thermique, car alors les relations (4.76) et (4.80) ne peuvent pas être appliquées.

Les WIMPZILLA (X) sont des objets ultra-lourds produits par un mécanisme non thermique. Pour que ce mécanisme soit viable, les particules doivent être stables, ou du moins avoir une durée de vie supérieure à l'âge de l'Univers qui, à toutes fins pratiques, est équivalent. En particulier, la désintégration des WIMPZILLA pourrait expliquer l'origine des rayons cosmiques de très haute énergie si leur durée de vie était comparable à l'âge de l'Univers. De plus, nous devons exiger que les WIMPZILLA n'étaient pas à l'équilibre avant que leur abondance ne gèle, sinon $\Omega_{DM} \gg 1$. Une condition suffisante est que (voir chapitre 4),

$$r_x = n_X \langle \sigma v \rangle < H. \quad (7.198)$$

Réciproquement, si les particules X étaient produites pendant l'ère des radiations, à une température T^* , alors leur abondance réelle serait $n_X \sim \frac{g_X}{g_{SM}} \left(\frac{T^*}{T} \right)^3$, et donc que $n_X(T) / H \sim (\zeta(4)/\zeta(1)) T^4 / (M_p^2 \Gamma_X)$. Ainsi, compte tenu du

limite unitaire ($crv\} <$ obtenir que $V_x/H^\wedge < (C\ddot{i}_x/y/ClyQ\}TQT^\wedge M_p/m^\cdot_x$. Le la condition de non-équilibre devient alors

$$(003W > G\ddot{o}\ddot{i}\ddot{i}M \blacksquare \quad < \quad 7 \quad ' \quad 199 >$$

En résumé, une particule non relativiste de masse $m_x > 200$ TeV, créée à $T+ < m_x$ avec une abondance assez faible pour que $CI_xQ < 1$, a en fait une densité si faible qu'elle n'aurait pas pu être dans équilibre.

Plusieurs scénarios de production de WIMPZILLA ont été proposés [86,87] parmi lesquels l'un s'appuie sur l'amplification des perturbations d'un champ scalaire non couplé de manière minimale pendant la phase de réchauffage. Tout comme les fluctuations de l'inflation (voir chapitre 8), le champ scalaire $X(x,r^\wedge)$ peut être étendu dans les modes suivants :

$$+ h \, c^\dagger \quad (7.200)$$

L'équation d'évolution du mode est alors

$$(7.201)$$

Les conditions initiales sont fixées à l'ère inflationniste en supposant que

$$h/c.('q \longrightarrow -oo) \text{ oc exp}$$

En fin de gonflage, à $77 = 'i;$, le champ contient des modes de positif et de fréquences négatives,

$$h_k(\eta_f) = \alpha_k \exp \left[-i \int^{\eta_f} \omega(k, \eta') d\eta' \right] + 0k \exp \left[+i \int^{\eta_f} 77') d77' \right]$$

Ainsi, en fin de gonflage, des particules ont été produites. Leur densité est liée à la valeur du coefficient de Bogoliubov, $0k$, par

$$n_x M = a^{-3} \text{ ans} \quad (7.202)$$

Des particules de masse comparable à la constante de Hubble en fin de gonflage, $m_x \longrightarrow Hf^\wedge$ peuvent être créées avec une densité $p_x(r/j) = m_x n_x(r/j)$. La figure 7.22 décrit l'évolution temporelle du coefficient de Bogoliubov et de la densité de rejjc obtenue en fonction de m_x/H . Différents scénarios peuvent être construits en fonction de la manière dont se termine l'inflation.

7.2.5.8 Autres candidats

Il existe une longue liste d'autres candidats [73-76] que nous ne détaillerons pas ici. Nous mentionnons simplement les possibilités suivantes.

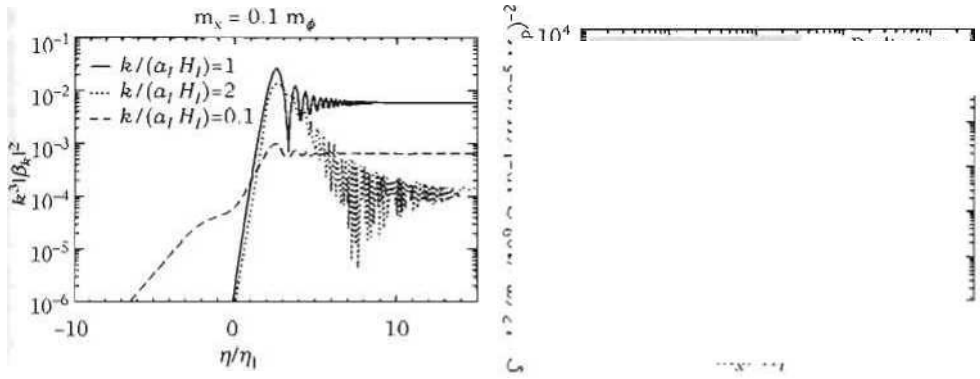


Fig. 7.22 (left): Conformal time évolution of the Bogoliubov coefficient for various wave numbers r/i corresponds to the end of inflation, (nght): Contribution to $9xoh^2$ of gravita- tionally produced WIMPZILLAs as a function of the ratio between its mass, m_x , and the Hubble constant at the end of inflation, H_i . T/h is the reheating température and the shaded région corresponds to parameters for which thermalization can occur. Inflation is assumed to be smoothly followed either by a matter-dominated era (solid line) or a radiation era (dashed line). The dotted line shows a thermal density with the température $T = H_i/2ir$. From Ref [86].

- *Particule scalaire légère* : la limite de Lee-Weinberg [85] peut être contournée pour la matière noire non fermionique. Un modèle avec une particule scalaire ayant une masse comprise entre 1 et 100 MeV a récemment été proposé [88]. Bien que ce candidat soit relativement ponctuel du point de vue de la physique des particules , il est motivé par le fait qu'il pourrait offrir une explication de l'émission de rayons γ à 511 keV observée dans le renflement de notre Galaxie. Cette émission serait due à l'annihilation de ces particules légères scalaires en positons, qui produiraient alors les rayons γ récemment observés en s'annihilant.
- *Modèle du 'Higgs utile'* : le modèle du 'petit Higgs' [89] est un modèle alternatif à la supersymétrie dans lequel le Higgs du modèle standard est un boson pseudo-Goldstone dont la masse est approximative ^ protégée par une symétrie globale (voir chapitres 2 et 9). Cela permet de stabiliser l' échelle électrofaible autour de 10 TeV . Divers scénarios de ce modèle contiennent des particules scalaires qui pourraient être de bons candidats pour la matière noire. Dans une des versions [90], une nouvelle symétrie est introduite à l' échelle du TeV et implique l' existence de WIMPs d'une masse de quelques TeV.
- *Modes de Kaluza-Klein* : dans les théories à hautes dimensions compactifiées à la Kaluza-Klein (voir chapitre 13) où tous les champs peuvent se propager le long des dimensions supplémentaires (ces modèles sont appelés dimensions *supplémentaires universelles*), les modes Kaluza-Klein du standard les champs modèles peuvent agir comme de la matière noire. La particule de Kaluza- Klein la plus légère [91] peut être stable si la dimension supplémentaire est compactée sur une orbifold, telle que S^1/Z .

- *Vortons* : les vortons sont des boucles de cordes cosmiques supraconductrices stabilisées par leur courant [92]. Ils se forment lors d'une transition de phase associée à une rupture spontanée de symétrie. Quant aux monopôles, ils ont tendance à dominer très rapidement le contenu en matière de l'Univers, ce qui est connu sous le nom de *problème de l'excès de vorton*. Cependant, les vortons légers ont également été suggérés comme candidats aux rayons cosmiques à ultra haute énergie.

7.2.5.9 Recherches directes

D'un point de vue phénoménologique, les WIMPs sont caractérisés par leur masse et la section efficace de leur annihilation et de leur interaction avec les nucléons (voir Fig. 7.23). Ces paramètres permettent de calculer la densité de référence du candidat afin qu'il soit contraint par les observations cosmologiques (voir Fig. 7.24 à gauche).

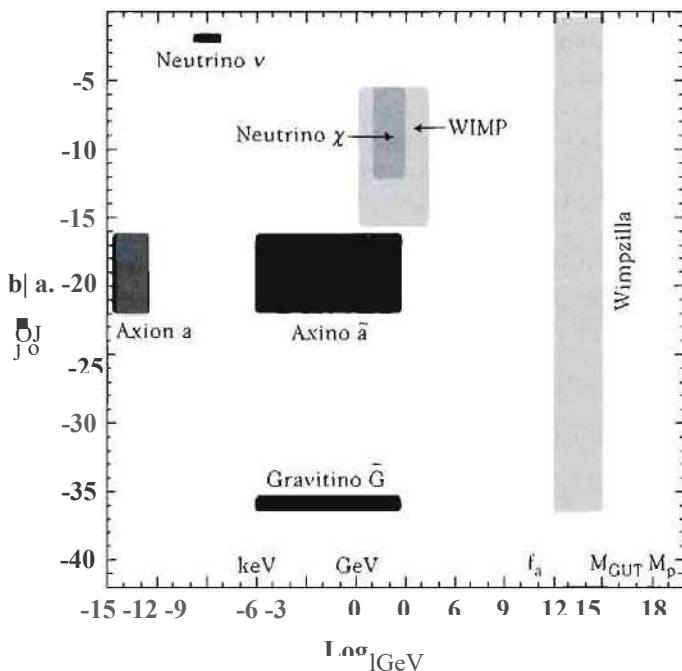
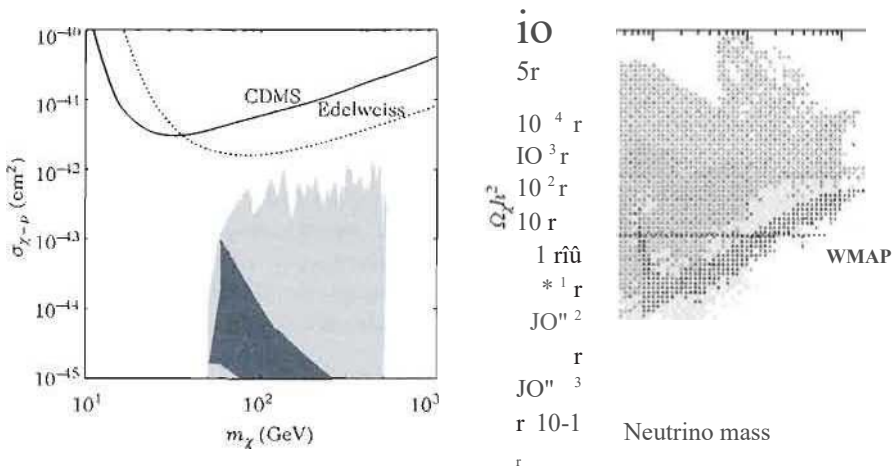


Fig. 7.23 Different dark-matter candidates in parameter space (cross-section, mass). From Ref. [94]

De nombreuses expériences [93] ont tenté de détecter directement la diffusion élastique des WIMP sur les nucléons. Le principe de l'expérience repose sur le fait que la diffusion WIMP induit une réception du nucléon détectable par trois méthodes . (1) Si le détecteur est un semi-conducteur (par exemple du germanium), le récepteur peut libérer des charges libres par *ionisation* (paires électron-trou). Ces charges peuvent ensuite être collectées par un champ électrique appliqué à la limite du cristal. (2) Certains cristaux et liquides émettent des éclairs lumineux lorsque le noyau ralentit. C'est le

de scintillation . La quantité de lumière produite dépend du recul du noyau. Les matériaux utilisés pour ces détecteurs sont principalement l'iodure de sodium, le NaI et le xénon liquide. (3) Dans les cristaux, l'énergie de recul se transforme en vibrations du réseau cristallin (phonons) qui peuvent être détectées, à très basse température, grâce à l' *augmentation de température* qu'elles induisent. Des bolomètres en saphir $\text{TeC} > 2$ et en germanium LiF ont par exemple été utilisés. L' une des principales difficultés de ces méthodes réside dans l' existence d' un rayonnement naturel plus intense que la source de WIMPs recherchée (rayons cosmiques ou radioactivité naturelle), qui génère un flux intensif d'événements parasites . Les particules incidentes sont alors principalement des photons, des électrons et des neutrons. Pour éviter ces bruits, les expériences sont installées dans des sites souterrains profonds.

Deux paramètres déterminent l'efficacité d' une telle méthode, le flux incident des WIMPs et la section efficace WIMP-nucléon. Dans un modèle donné , cette section efficace peut être co-calculée et le flux incident est contraint par des données astrophysiques. Dans les modèles les plus optimistes, la cadence attendue des événements est de l'ordre de 10^{-7} par jour et par kilogramme. On peut ainsi mettre des contraintes sur ces deux paramètres (voir Fig. 7.24). De plus, lorsque le modèle est bien spécifié (par exemple, dans le modèle minimalement supersymétrique) on peut mettre des contraintes directement sur les paramètres de ce modèle (en l'occurrence sur p , $(3, M)$ et $M2$). Ces contraintes sont ensuite comparées avec les limites des expériences d'accélérateur .



dix

 10^{-5}

Fig. 7.24 (à gauche) : Limites expérimentales obtenues par les expériences CDMS (noir) et Edelweiss (gris) dans le plan (coupe transversale, m_{χ} , $\sigma_{\chi\pi}$). La région ombrée correspond aux prédictions du MSSM contraint et la région claire à celle du mode dit « masse de Higgs non universelle ». De [95]. (à droite) : Les prédictions du LSP reposent sur l'abondance en fonction de la masse et des contraintes cosmologiques. Pour chaque masse de nombreuses densités de relief sont possibles en fonction de la valeur des autres paramètres du modèle. De la Réf. [75].

7.2.5.10 Alternatives gravitationnelles

Toutes les conclusions que nous avons tirées sur l'existence de la matière noire reposent sur la validité de la relativité générale pour décrire la gravité, et en fait principalement sur la validité de la loi de Newton. Le comportement des courbes de rotation des galaxies peut cependant être expliqué sans recourir à la matière noire si le potentiel gravitationnel se comporte comme

$$\frac{1}{r_0} \quad (7.203)$$

à grande distance, en supposant que r_0 est une échelle caractéristique de l'ordre de quelques kpc. Dans ce régime, la vitesse d'un corps d'essai en orbite képlérienne tend vers une constante, $v^2 = GM/r_0$. Ainsi, si la modification de la gravité se produit à une échelle de distance fixe, nous constatons que $L \propto M \propto v^2$, ce qui est en contradiction avec la relation de Tully-Fischer. Cette conclusion est générique à toute modification associée à une échelle de distance caractéristique. Avec la définition (7.133), on peut réécrire le potentiel gravitationnel comme

$$\Phi = -\frac{GM}{r} + \sqrt{G_N} M a^{\frac{1}{2}} \ln r \quad (7.204)$$

où $\sqrt{G_N}$ est une constante à cote d'accélération. On voit que la transition entre les régimes newtonien et newtonien modifié doit se produire à une échelle d'ordre $r \sim \sqrt{GM/a}$, qui dépend de la masse de la galaxie.

7.2.5.11 MOND : formule

Comme l'illustre la figure 7.25, il n'y a pas de corrélation entre le rapport M/L et la taille de la galaxie. Le rapport newtonien M/L est obtenu en calculant la masse dynamique à partir de la vitesse de rotation, $v^2 = GM_N/r$, obtenue du point le plus éloigné au centre de la galaxie. Il semble cependant y avoir une corrélation avec l'accélération centripète) $a = v^2/r$, $M/L \propto 1/a$ pour $a < 10^{-8} \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}$. Ceci n'est qu'une reformulation de la relation Tully-Fischer. Milgrom [96] a remarqué qu'un moyen de retrouver cette relation était de modifier la théorie newtonienne de la gravité dans le régime de petite accélération, d'où son nom MOND (dynamique newtonienne modifiée).

MOND peut être formulé soit comme une modification de la deuxième loi du mouvement de Newton, soit comme une modification de la gravité. Dans la première version, la relation entre force et accélération, $F = ma$, est modifiée en

$$m \mu(a/a_0) a = m a_0 \quad (7.205)$$

où la constante a_0 doit être de l'ordre $a_0 \sim 10^{-10} \text{ m/s}^2$ et où la fonction d'ajustement μ doit satisfaire les conditions asymptotiques

$$\mu(x) \sim \frac{1}{x} \text{ pour } x \gg 1$$

Dans les régimes de forte accélération, la deuxième loi du mouvement de Newton est effectivement récupérée. Dans la deuxième formulation, nous supposons que l'accélération gravitationnelle, g , est liée à l'accélération gravitationnelle newtonienne, g_N , par

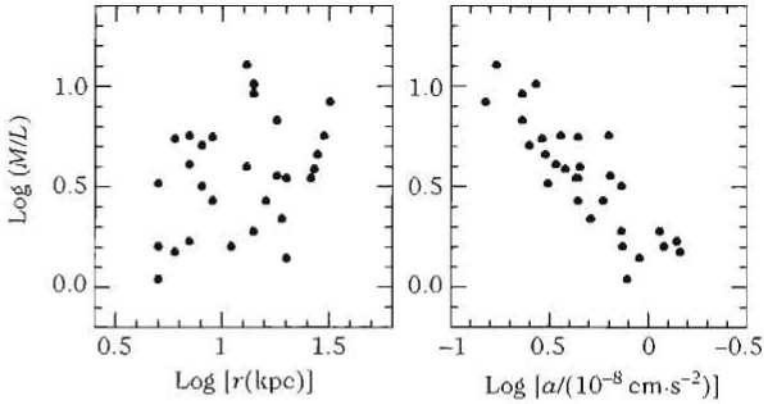


Fig. 7.25 Newtonian mass to luminosity ratio for spiral galaxies of Ursa Major as a function of the size of the galaxy (left) and as a function of the Newtonian accélération (right). From Ref [97].

$$g\mu \left(\frac{g}{a_0} \right) = g_N. \quad (7.207)$$

Cela correspond à modifier l'équation de Poisson selon

$$\nabla \cdot \left[\mu \left(\frac{|\nabla \Phi|}{a_0} \right) \nabla \Phi \right] = 4\pi G_N \rho. \quad (7.208)$$

Même s'il existe des différences en principe et en pratique entre ces deux formulations, elles conduisent aux mêmes prédictions dans le régime des petites accélérations. En partie, le champ gravitationnel effectif devient $g \sim \sqrt{g_N a_0}$ et la vitesse képlérienne d'un corps en orbite autour d'un corps de masse M est

$$(7.209)$$

La constante Q doit être la même pour les galaxies. Il est associé à une échelle caractéristique $\ell_* = c^2/a_0 \sim 9 \times 10^{26} \text{ m}$ qui, étonnamment, est du même ordre de grandeur que c/H_0 . L'échelle de transition entre les deux types de régimes dépend de la masse de la galaxie et est généralement donnée par

$$\ell_* = \sqrt{\frac{\ell_0 G_N M}{c^2}} = 10^{20} \left(\frac{M}{10^{11} M_\odot} \right)^{1/2} \left(\frac{a_0}{10^{-10} \text{ m.s}^{-2}} \right)^{-1/2} \text{ m} \quad (7.210)$$

7.2.512 Quelques prédictions

Dans le contexte MOND, l'existence de courbes de rotation plates a un caractère absolu. Cette hypothèse peut notamment être réfutée par l'observation de courbes de rotation de galaxies isolées qui diminueraient de manière képlérienne à grande distance, indiquant ainsi simplement la fin du halo de matière noire.

Ce modèle comporte également un certain nombre de prédictions que nous résumons brièvement (voir Réf. [97, pour le statut actuel de l'observation]).

- La relation de Tully-Fisher $L \propto v_{\infty}^4$ est absolue, ayant un exposant $\alpha = 4,0$, et donne une relation entre la masse baryonique et la vitesse asymptotique de la galaxie, à savoir

$$\ln L = 4 \ln v_{\infty} - \alpha \ln G_N a_0 \quad (7.211)$$

en accord avec la pente observée, $\alpha = 3,9 \pm 0,2$.

- On peut définir une densité surfacique critique $\Sigma_m = a_0 / G$, délimitant entre deux régimes. Pour $\Sigma > \Sigma_m$ (comme pour les galaxies à forte densité de surface), il y a peu de différence entre la masse dynamique et visible, c'est-à-dire que la galaxie ne semble contenir aucune matière noire. Pour $\Sigma < \Sigma_m$ (comme pour les galaxies à faible densité surfacique), l'accélération est faible et on est dans le régime MOND. Pour ces galaxies, il doit y avoir une grande différence entre la masse dynamique et visible ; il semble être dominé par la matière noire. C'est le cas d'un point de vue observationnel.
- $\Sigma_m / 27 r \sim H_0 M_Q / PC^2$ doit être la valeur limite de la densité superficielle de la galaxie supportée par la rotation. Cette limite observée apparaît naturellement dans le contexte MOND.
- La courbe de rotation d'une galaxie peut être obtenue uniquement à partir de la connaissance de la distribution de la matière baryonique.

Ces quatre prédictions ont été vérifiées par observation et en particulier, toutes les courbes de rotation des galaxies semblent reproductibles avec un paramètre unique, le rapport $M < c/L$ entre la masse baryonique et lumineuse (qui est en fait quasiment une constante).

Concernant la lentille, il ressort clairement de la forme (7.204) du potentiel que, à des distances supérieures à $r \sim \gamma/G$, l'angle de déviation est

$$\ddot{u} = \frac{Z-71}{2} \frac{1}{V} G_N M^a o \cdot$$

c'est exactement la même chose que dans le cas d'un halo de matière sombre lorsque l'on suppose que la gravité est décrite par la relativité générale.

7.2.5.13 Quelques problèmes

De par la simplicité de sa formulation et de ses prédictions, le mode MOND ! Romains une alternative séduisante à l'existence de la matière noire. Néanmoins, plusieurs problèmes sont présents.

- D'un point de vue théorique, il n'existe pas de théories de champ satisfaisantes conduisant à MOND dans la limite des champs faibles, malgré une proposition récente de théories TeVeS [98]. En particulier, une telle théorie semble nécessiter une accélération et nous oblige à fixer un cadre de référence. L'existence d'un tel cadre privilégié est très limitée par les tests de gravité dans le système solaire. Voir également Réf. [99] pour une discussion approfondie des difficultés rencontrées pour construire des versions de théorie des champs de MOND.
- Les amas de galaxies ont une densité surfacique suffisamment importante pour être dans le régime newtonien pour lequel MOND ne diffère pas de la théorie newtonienne. Mais une forte lentille gravitationnelle indique la nécessité de la matière noire dans ce régime.

- La valeur requise de a_0 nécessaire pour expliquer les observations d'amas riches est deux fois plus grande que celle requise pour expliquer les courbes de rotation galaxiques. Il semble que la dynamique des galaxies elliptiques nécessite *notamment* $\sim 10^{-9} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Le tableau 7.6 résume les prédictions comparatives des modèles MOND et Λ CDM sur une échelle de notation de 0 à 3. Ce résumé suggère que la construction d'une théorie des champs capable d'inclure MOND représente un défi important. De plus, la construction de tests de la théorie de la gravité aux échelles cosmologiques est également une priorité afin d'être sûr des conclusions sur les propriétés de la matière noire.

Tableau 7.6 Résumé des prédictions comparatives des modèles MOND et Λ CDM. Les croix représentent des difficultés et les points d'interrogation sont des questions qui ne peuvent être abordées de manière rigoureuse dans le cadre actuel.

Test/prédictions	LUNDI	SCDM
Courbes de rotation des galaxies spirales	3	1 FOIS
Relation Tully-Fischer	3	X
Courbes de rotation de la matière visible	3	X
Propriétés des galaxies elliptiques	1?	1
Profil de température des clusters	X	1.
Fond cosmique de micro-ondes	?	3
Structures à grande échelle et nucléosynthèse	?	3
Lumière correcte, déviation	X?	2
Cadre théorique satisfaisant	X	2

7.2.514 Matière noire vs relativité générale modifiée

La première discussion concernant MOND repose sur une version newtonienne de la loi de la gravité. Ainsi, une théorie complète conduisant à MOND devrait résulter d'une modification de la relativité générale ⁸puisque cette dernière limite faible du champ est bien la gravité de Newton. Diverses propositions ont été étudiées dans la littérature et nous renvoyons le lecteur à la Réf. [99] pour une revue approfondie.

En relativité générale, la métrique se propage comme un champ de spin-2 pur et sans masse et la matière est universellement couplée à cette métrique. Pour étendre la relativité générale, il faut introduire de nouveaux degrés de liberté dans la théorie, outre le graviton et les différents champs de matière entrant dans le modèle standard de la physique des particules. Cela rend déjà la distinction avec les modèles à matière noire plutôt subtile.

La principale différence est que dans le modèle de matière noire, la quantité de matière noire est imposée par les conditions initiales et son regroupement génère des puits gravitationnels dans lesquels la matière baryonique tombe pour former des structures à grande échelle. Dans un modèle de relativité générale modifiée, la matière baryonique génère par elle-même un halo de matière noire efficace, dont l'échelle est $\propto y/A^{\text{baryon}}$. Un tel halo peut donc simplement être un artefact de la façon dont

⁸Nous n'utilisons pas le terme « gravité modifiée » puisque nous définissons la gravité comme la seule force à longue portée qui ne peut être filtrée. Seule la théorie décrivant la gravité, que nous avons supposée être la relativité générale, pourrait être modifiée.

nous interprétons le champ gravitationnel de la matière baryonique seule dans son ensemble. distances. Mais il pourrait aussi s'agir d'un véritable halo de matière noire, constitué de nouveaux champs (gravitationnels) qui génèrent eux-mêmes un potentiel newtonien.

Quelle que soit la classe de modèles, la théorie doit invoquer de nouveaux domaines, appelons-les génériquement t . Il existe un tenseur contrainte-énergie associé à ces champs et il entrera dans les équations « d'Einstein ». Nous avons plusieurs possibilités :

- et est minimalement couplé à la métrique, auquel cas nous avons un mode matière noire). Dans le régime newtonien, cela équivaut à ajouter une nouvelle composante de matière et à assumer la validité de l'équation de Poisson issue de cette nouvelle composante.

~~~~~ |                      auquel cas la contribution du nouveau champ à l'énergie la densité est négligeable. Ce nouveau champ doit alors être responsable d'une nouvelle interaction. Nous pouvons dire que nous disposons d'un modèle de relativité générale modifié. Dans le régime newtonien, il modifie l'équation de Poisson et suppose que la densité d'énergie est celle des baryons.

- et le nouveau domaine est responsable d'une nouvelle interaction. Il est alors difficile de décider si nous avons un modèle de matière noire ou un modèle de relativité générale modifié.

Quelle que soit la classe de modèles, il est important de comprendre que nous devons ajouter de nouveaux degrés de liberté dans les théories physiques actuellement acceptées. Cela devrait être la conclusion la plus fondamentale que l'on puisse tirer de l'observation.

# Les références

- [1] AO PETERS, H. LEVINE et J. WAMBSGANSS, *Théorie de la singularité et lentille gravitationnelle*, Birkhauser, Boston, 1991.
- [2] P. SCHNEIDER, J. EHLERS et EE FALCO, *Lentilles gravitationnelles*, Springer, Berlin, 1992.
- [3] J. WAMBSGANSS, « Lentilles gravitationnelles en astronomie », *Living Reviews Rel.* 1, 1, 1998.
- [4] R. NARAVAN et M. BARTELMANN, « Gravitational lensing », dans *Formation of structure in the Universe*, A. Dekel et J. Ostriker (éd.), Cambridge University Press, 1999, p. 360.
- [5] WL BURKE, « Imagerie gravitationnelle multiple par masses distribuées », *Astrophys. J.* 244, L1, 1981.
- [6] RD BLANDFORD *et al.*, « Optique à lentille gravitationnelle », *Nature* 245, 824, 1989.
- [7] B. PACZYNSKI, « Microlentille gravitationnelle dans le groupe local », *Ann. Révérend Astron. Astrophysique.* 34, 419, 1996.
- [8] E. ROULET et S. MOLLERACH, 'Microlensing', *Phys. représentant* 279, 67, 1997. [9] B. FORT et Y. MELLIER, 'Arc(let)s dans les amas de galaxies', *Astron. Astrophysique. Revoir* 5, 239, 1994
- [10] F. COURBIN, « Lentilles Quasar », *Lect. Notes Phys.* 608, 1, 2002.
- [11] M. BARTELMANN et P. SCHNEIDER, « Lentilles gravitationnelles faibles », *Phys. Rapport* 340, 291, 2001.
- [12] Y. MELLIER, « Sonder l'Univers avec des lentilles faibles », *Annu. Révérend Astron. Comme trophées.* 37, 127, 1999.
- [13] C. ALCOCK et al., 'Possible microlentille gravitationnelle d'une étoile dans le grand nuage de Magellan ', *Nature* 365, 621, 1993.
- [14] E. AUBOURG *et al.*, 'Preuve de microlentille gravitationnelle par objet sombre dans le halo galactique', *Nature* 365, 623, 1993.
- [15] A. MILSZTAJN, « Le halo galactique issu des microlentille », *Space Sci. Tour.* 100, 103, 2002.
- [16] D. WALSH, RF CARSWELL et RJ WEYMANN, « 0957+ 561 A, B : objets quasistellaires jumeaux ou lentille gravitationnelle ? », *Nature* 279, 384, 1979.
- [17] MJ IRWIN et al., « Variations photométriques dans le système Q2237+035 : première détection d'un événement de microlentille », *Astrophys. J.* 98, 1989, 1989.
- [18] CS KOCHANKEK, « L'analyse de l'enquête sur les lentilles gravitationnelles. II. Modèles à maximum de vraisemblance et potentiels singuliers », *Astrophys. J.* 419, 12, 1993.
- [19] S.MaO et CK KOCHANKEK, « Limites de l'évolution des galaxies », *Month. Pas. R. - Astron. Soc.* 268, 569, 1994.
- [20] R. NARAYAN et S. WHITE, « Lentilles gravitationnelles dans l'univers froid de matière

noire », *Mois. Pas. R. Astron. Soc.* 231, 97, 1988.

- [21] EL TURNER., « Limites des lentilles gravitationnelles sur la constante cosmologique dans l'univers fiat ». *Astrophysique. J.* 365, L43, 1990.
- [22] CK KOCHANNEK, 'Y A-T -il une constante cosmologique ?', *Astrophys. J.* 466, 638, 1996.
- [23] M. IM et al, 'Une mesure de la constante cosmologique utilisant des galaxies elliptiques comme lentilles gravitationnelles fortes', *Astrophys. J.* 497, 457, 1997.
- [24] S. REFSDAL, « L'effet de lentille gravitationnelle », *Mois. Pas. R. Astron. Soc.* 128, 295, 1964.
- [25] C. KOCHANNEK, « Que mesurent les retards des lentilles gravitationnelles ? », *Astrophys. J.* 578, 25, 2002.
- [26] N. GROGIN et R. NARAYAN, « Un nouveau modèle de lentille gravitationnelle 0957+561 et une limite sur la constante de Hubble », *Astrophys. J.* 464, 92, 1996.
- [27] T. KUNDIC et al, 'Une détermination robuste du retard temporel en 0957+561A,B et une mesure de la valeur globale de la constante de Hubble', *Astrophys. J.* 482, 75, 1996.
- [28] EE FALCO et al., 'Une estimation du  $H_0$  à partir de la spectroscopie Keck du système de lentilles gravitationnelles 0957+561', *Astrophys. J.* 484, 70, 1997.
- [29] G. SOUCAIL et al, 'Une structure en forme d'anneau bleu au centre de l'amas de galaxies A370', *Astron. Astrophysique.* 172, L14, 1987.
- [30] R. LYNDY et V. PETROSIAN, « Arcs lumineux géants dans les amas de galaxies », *BAAS* 18,1014, 1986.
- [31] J.-P. KNEIB et al, 'Enquête Redshift jusqu'à  $b_j = 27$  : distance des arclets gravitationnels derrière Abell 370', *Astron. Astrophysique.* 286, 701, 1994.
- [32] B. FORT et al, 'Distribution des galaxies à grand redshift et paramètres cosmologiques à partir du biais de grossissement dans CL0024 + 1654', *Astron. Astrophysique.* 321, 353, 1997.
- [33] R. PELLO et al, observations ISAAC/VLT d'une galaxie à lentille à  $z = 10,0$ ', *Astron. Astrophysique.* 416, L35, 2004.
- [34] C. SCHIMD, J.-P. UZAN et A. RIAZUELO, « Lentille faible dans les théories du tenseur scalaire de la gravité », *Phys. Rév. D* 71, 083512, 2005.
- [35] W. Hu, « Faible lentille du CMB : une approche harmonieuse », *Phys. Rév. D* 62, 043007, 2000.
- [36] N. KAISER et G. SQUIRES, « Cartographie de la matière noire avec une faible lentille gravitationnelle » *Astrophys. J.* 404, 441, 1993.
- [37] P. SCHNEIDER et al, 'Modes B dans le cisaillement cosmique à partir du clustering source redshift', *Astron. Astrophysique.* 389, 729, 2002.
- [38] D. WITTMAN, « Lentille faible », *Lec. Notes Phys.* 608, 55, 2002.
- [39] L. VAN WAERBEKE et al, 'Détection des ellipticités corrélées des galaxies à partir des données du CFHT : premières preuves d'une orientation gravitationnelle par des structures à grande échelle', *Astron. Astrophysique.* 358, 30, 2000.
- [40] D. BACON et al, 'Détection de faibles lentilles gravitationnelles par structure à grande échelle', *Mois. Pas. R. Astron. Soc.* 318, 625, 2000.
- [41] N. KAISER et al, « Mesures de cisaillement cosmique à grande échelle », [astro-ph/0003338].
- [42] D. WITTMAN et al, 'Détection des faibles distorsions de lentille gravitationnelle des galaxies lointaines par la matière noire cosmique à grande échelle', *Nature* 405, 143, 2000.

- [43] L. VAN WAERBEKE *et coll.*, « Statistiques de cisaillement cosmique et cosmologie », *Astron. Comme trophées*. 375, 757, 2001.
- [44] L. Fu et al., 'Lentille très faible dans l'échelle CFHTLS : cosmologie du cisaillement cosmique en régime linéaire', *Astron. Astrophysique*. 479, 9, 2008.
- [45] U. SELJAK, « Effet de location gravitationnelle sur les anisotropies du CMB : une approche de puissance », *Astrophys. J* 463, 1, 1996 ; W. Hü, « Faible leasing sur la CMB : une approche harmonieuse », *Phys. Rev. D* 62, 043007, 2000 ; A. CHALLINOR et A. LEWIS, « Spectres de puissance Lensed CMB à partir de fonctions de corrélation tout-ciel », [astro-ph/0502425].
- [46] M. ZALDARRIAGA et U. SELJAK, « Effet de lentille gravitationnelle sur le fond cosmique mi \* crowave », *Phys. Rev. D* 58, 023003, 1998.
- [47] F. COMBES, « Propriétés des halos de matière noire », *New Astron. Rev.* 46, 755, 2002.
- [48] R. GENZEL *et coll.*, « Les émissions du proche infrarouge proviennent de l'accumulation de gaz autour du trou noir supermassif au centre galactique », *Nature* 425, 934, 2003.
- [49] Y. SOFUE *et al.*, 'Courbes de rotation centrale des galaxies spirales', *Astrophys. J.* 523, 136, 1999.
- [50] S. MCGAUGH *et coll.*, « La relation baryonique de Tully-Fischer », *Astrophys. J.* 533, L99, 2000.
- [51] A. BOESMA, ' Etudes de lignes de 21 cm de galaxies spirales . Je.', *Astron. J.* 86, 1791, 1981.
- [52] H. HOEKSTRA *et al.*, « Sur le couplage apparent de l'hydrogène neutre et de la matière noire dans les galaxies spirales », *Mois. Pas. R. Astron.* 323, 453, 2001
- [53] D. PFENNIGER et Y. REVAZ, « La relation baryonique Tully-Fischer revisitée », *Astron. Astrophysique*. 431, 511, 2005.
- [54] D. PFENNIGER et F. COMBES, Y a-t-il de la matière noire dans des gaz froids de galaxies spirales ? *Astron. Astrophysique* 285, 94, 1994.
- [55] M. PERSIC, P. SALUCGI et F. STEL, « La courbe de rotation universelle des galaxies spirales -1. La connexion avec la matière noire ', *Mois. Pas. R. Astron. Soc.* 281, 27, 1996.
- [56] F. Donato , G. GENTIL et P. SALUCCI, « Les côtes de halos de matière noire sont en corrélation avec la longueur des écailles stellaires », *Month. Pas. R. Astron. Soc.* 353, 17, 2004.
- [57] M. BERNARD : *et al.*, *Galaxies de type précoce dans le Sloan Digital Sky Survey : le plan fondamental*, *Astrophys. J* 125 (2003) 1866.
- [58] S. G. DJORGOSKI et M. DAVIS, « Propriétés fondamentales des galaxies elliptiques », *Astrophys. J.* 313, 59, 1987 ; A. DRESSLER *et al.*, 'Spectroscopie et photométrie des galaxies elliptiques', *Astrophys. J.* 313, 42, 1987
- [59] D. MERRITT, « Un profil de densité universel pour la matière sombre et lumineuse », *Astro phys. J.* 624. L85, 2005.
- [60] F. ZWICKY, « Sur les masses des nébuleuses et des amas de nébuleuses », *Astrophys. J.* 86, 217, 1937.
- [61] N. BAHCALL, 'Amas et superculsters de galaxies', [astro-ph/9611148],
- [62] H. HOEKSTRA *et al.*, « Propriétés des halos de matière noire des galaxies issus d'une lentille faible », *Astrophys. J.* 606, 67, 2004.
- [63] F. PRADA *et al.*, « Observation du profil de densité de matière noire des galaxies isolées », *Astrophys. J.* 598, 260, 2003.
- [64] P. COLIN *et al.*, « Profils de densité de sous-structure et de halo dans une cosmologie chaude de matière noire », *Astrophys. J.* 542, 622, 2000.

- [65] BN SPERGEL et PJ STEINHARDT, « Preuves d'observation de la matière noire froide à interaction automatique », *Phys. Le révérend Lett.* 84, 3760, 2000.
- [66] J. GOODMAN, « Matière noire répulsive », *New Astron.* 5, 103, 2000.
- [67] PJE PEEBLES et A. VILENKIN, « Matière noire sans interaction », *Phys. Rév. D* 60, 103506, 1999.
- [68] W. Hu et ah, « Matière noire froide et floue », *Phys. Le révérend Lett.* 85, 1158, 2000.
- [69] L. KAPLINGHAT et al., « Annihilation de la matière noire », *Phys. Le révérend Lett.* 85, 3335, 2000.
- [70] R. CEN, « Pourquoi y a-t-il des galaxies sphéroïdales naines ? », *Astrophys. J.* 456, L77, 2001.
- [71] M. KAMIONKOWSKI et A. LIDDLE, « La pénurie de halo des galaxies naines : existe-t-il puissance à courte échelle ? », *Phys. Le révérend Lett.* 84, 4525, 2000.
- [72] JP OSTRIKER et PJ STEINHARDT, « Nouvelle lumière sur la matière noire », *Science* 300, 1909, 2003.
- [73] G. BERTONE, D. HOOPER et J. SILK, « Particules de matière noire : preuves, candidats et contraintes », *Phys. Rapport* 405, 279, 2005.
- [74] P. GONDOLO, « Matière noire non baryonique », *NATO Sci. Seconde. JJ* 187, 279, 2005.
- [75] J. ELLIS, 'Candidats partiaux pour la matière noire', *Phys. Scripta* T85, 221, 2000.
- [76] L. BERSTRÔM, 'Matière noire non baryonique', *Rept. Programme. Phys.* 63, 793, 2000.
- [77] AD DOLGOV « Nentinos en cosmologie », *Phys. Rapport* 370, 333, 2002.
- [78] J. LESGOURGUES et S. PASTOR « Neutrinos massifs et cosmologie », *Phys. Rep.* 49, 307, 2006.
- [79] S. TREMAINE et JS GÜNN, « Rôle dynamique des leptons neutres légers en cosmologie - », *Phys. Le révérend Lett.* 42, 407, 1979.
- [80] S. DODELSON et LM WIDROW, « Les neutrinos stériles comme matière noire », *Phys. Le révérend Lett.* 72, 17, 1994.
- [81] D. BAILIN et A. LOVE, *Introduction à la théorie des champs de jauge*, Bristol : IOP, 1993.
- [82] R. PECCEI et HR QUINN, 'Conservation du CP en présence d'instantons', *Phys. Le révérend Lett.* 38, 1440, 1977.
- [83] T. MOROI et ah, 'Contraintes cosmologiques sur le gravitino stable à la lumière', *Phys. Lett. B* 303, 289, 1993
- [84] G. JUNGMAN et ah, « Matière noire supersymétrique », *Phys. Rep.* 267, 195, 1996.
- [85] BW LEE et S. WEINBERG, « Limite inférieure cosmologique des masses des neutrinos lourds », *Phys. Le révérend Lett.* 39, 165, 1977.
- [86] D. CHUNG, E. KOLB et A. RIOTTO, « Matière noire supermassive non thermique », *Phys. Le révérend Lett.* 81, 4048, 1998 ; D. CHUNG, E. KOLB et A. RIOTTO, « Matière noire super lourde », *Phys. Rév. D* 59, 023501, 1999.
- [87] V. KUZMIN et I. TKACHEV, « Rayons cosmiques à très haute énergie, particules super lourdes à vie longue et création de matière après inflation », *JETP Lett.* 68, 271, 1998.
- [88] C. BOEHM et P. FAYET, 'Candidats scalaires à la matière noire', *Nucl. Phys. B* 683, 219, 2004.
- [89] N. ARKANI-HAMEÛ et ah, 'Symétrie électrofaible rompue à partir de la déconstruction dimensionnelle', *Phys. Lett. B* 513, 232, 2001.
- [90] HC CHENG et I. Low, « Rupture de symétrie TeV et petit problème de hiérarchie », *JHEP* 0309, 051, 2003.

- [91] EW KOLB et R. SLANSKY, « Réduction dimensionnelle dans l'Univers primitif : où sont passées les particules massives ? », *Phys. Lett. B* 135, 378, 1984.
- [92] B. CARTER, « Développements récents de la théorie du vorton », *Int. J. Théor. Phys.* 36, 2451, 1997.
- [93] G. CHARDIN, *Matière noire : détection directe*, dans *L'Univers primordial*, Ecole des Houches, Séance LXXI, P. Binetruy *et al.* Éd., EDP Sciences, 2000.
- [94] L. ROSZKOWSKI, « Particules de matière noire – la prospective d'un théoricien », *Pramana* 62, 389, 2004.
- [95] K OLIVE, « Recherche de matière noire supersymétrique », [hep-ph/0208092].
- [96] M. MILGROM, « Une modification de la dynamique newtonienne comme alternative possible à l'hypothèse de la masse terrestre », *Astrophys. J.* 270, 365, 1983.
- [97] R. H. SANDERS et SS MCGAUGH, « La dynamique newtonienne modifiée comme alternative à la matière noire », *Ann. Révérend Astron. Astrophysique.* 40, 263, 2002.
- [98] J. BEKENSTEIN, « Théorie de la gravitation relativiste pour le paradigme de la dynamique newtonienne modifiée », *Phys. Rev. D* 70, 083509, 2004.
- [99] J-P. BRUNETON et G. ESPOSITO-FARESE, « Formulations théoriques de terrain de la gravité de type MOND », *Phys. Ftev. D* 76, 124012, 2007.

## 8

# Inflation

---

L'inflation est une période postulée d'expansion accélérée se produisant avant l'ère des radiations du modèle standard du Big-Bang. Il a été initialement proposé comme une solution provisoire aux problèmes du modèle chaud du Big-Bang (chapitre 4). Il fournit notamment une explication simple de l'homogénéité et de la planéité de notre Univers.

Avant que les premiers modèles d'inflation ne soient proposés, des travaux précurseurs sont apparus dès 1965 par Gliner [1], qui postulait une phase d'expansion exponentielle. En 1978, Englert, Brout et Gunzig [2], dans une tentative de résoudre le problème de la singularité primordiale et d'introduire les particules et l'entropie contenues dans l'Univers, ont proposé une hypothèse de « boule de feu », selon laquelle l'Univers lui-même apparaîtrait à travers un espace quantique. effet dans un état de pression négative soumis à une phase d'expansion exponentielle.

Starobinsky [3], en 1979, a utilisé les idées de la gravité quantique pour formuler le premier modèle rigoureux semi-réaliste d'une ère d'inflation, bien qu'il n'ait pas pour objectif de résoudre les problèmes cosmologiques. Un modèle plus simple, avec des motivations physiques transparentes, a ensuite été proposé par Guth [4] en 1981 ; ce modèle, désormais appelé « vieille inflation », fut le premier à utiliser l'inflation comme moyen de résoudre des problèmes cosmologiques. Elle fut bientôt suivie par la proposition de Linde sur la « nouvelle inflation » [5].

La formulation par Moukhanov et Chibisov de la théorie des perturbations cosmologiques lors de la nouvelle inflation, qui relie l'origine des structures à grande échelle de l'Univers aux fluctuations quantiques, a rapidement suivi [6,7]. Tous ces travaux importants ont été réalisés au début des années 1980, qui peuvent donc être considérées comme la « date de naissance » de l'inflation.

Les premiers modèles d'inflation n'étaient en réalité que des modifications incomplètes de la théorie du Big-Bang puisqu'ils supposaient que l'Univers était dans un état d'équilibre thermique, homogène à des échelles suffisamment grandes avant la période d'inflation. Ce problème a été résolu par Linde avec la proposition d'inflation chaotique [8]. Dans ce modèle, l'inflation peut partir d'une densité planckienne même si l'Univers n'est pas en équilibre. Une nouvelle image de l'Univers apparaît alors. L'homogénéité et l'isotropie de notre Univers observable ne seraient que des propriétés locales, alors que l'Univers est très inhomogène à très grande échelle, avec une structure de type fractal.

Ce chapitre décrit les premiers modèles d'inflation, section 8.1, et explique en termes généraux comment l'inflation résout les problèmes chauds du Big Bang. Nous abordons ensuite, à la section 8.2, la dynamique de l'inflation à champ unique et discutons de l'approximation lente et du modèle chaotique de l'inflation. La génération des perturbations de densité initiales pendant la période inflationniste est détaillée dans les sections 8.3, 8.4 et 8.5. Pour finir, nous décrivons la phase de réchauffage dans la section 8.6, qui relie le



gonflage au Big-Bang chaud.

modèle, le mécanisme de l'inflation éternelle, section 8.7, qui peut aborder la question des conditions initiales de l'Univers, et diverses extensions possibles, section 8.8. De nombreuses études complémentaires peuvent être trouvées dans les réf. [9-11].

## 8.1 Genèse du paradigme

### 8.1.1 Des motivations originales

#### 8.1.1.1 L'argument de Guth

Le problème de planéité peut être reformulé en notant que

$$\frac{Q_K}{Q} = \frac{3K}{8\pi G \rho a^2},$$

de sorte que (4.20) et (4.21) conduisent à la conclusion que où  $S_0 = s_0 H^{-3}$  est l'entropie contenue dans le rayon de Hubble aujourd'hui. D'après (4.140), il est d'ordre  $S_0 \sim 10^{88}$ . Une si grande valeur de  $S_0$  implique que l'Univers aurait dû être très plat dans le passé. Par exemple, le paramètre de courbure doit généralement être de l'ordre  $Q_K \sim 10^{-60}$  au moment de la nucléosynthèse.

$$\frac{Q_K}{Q} = \frac{10^{-60}}{S_0^{1/3} 10^{88}} = \frac{10^{-60}/1 \text{ GeV}^3}{S_0^{1/3} 10^{88} \text{ T}^3}, \quad (8.1)$$

Le problème de planéité est donc lié au fait que l'entropie dans un volume comobile est conservée. On peut alors imaginer, comme le propose Guth [4], qu'il puisse être résolu si l'expansion cosmique est non adiabatique pendant une période de temps  $[t_i, t_f]$  pendant laquelle

$$S_f = Z S_i, \quad (8.2)$$

où  $Z$  est un facteur numérique à déterminer. Dans la proposition de Guth, cette production d'entropie se produit autour de  $T_{\text{GUT}} \sim 10^{16}$  GeV, l'échelle caractéristique de la rupture de symétrie de la Grande Théorie Unifiée (GUT) (voir chapitre 9). D'après (8.1), cela implique que  $Z$  doit être d'ordre  $Z \sim 10^{60}$  pour que le paramètre de courbure soit d'ordre unité aujourd'hui,  $Q_{K0} \sim O(1)$ .

#### 8.1.1.2 Une phase d'accélération

Les équations de Friedmann (3.25) indiquent que  $(1 - Q_K) \rho a^3 = 3K/8\pi G$  est constante au cours de l'évolution cosmique. Nous en déduisons que

$$(1 - Q_K) \rho a^3 = (1 - Q_{K,i}) \rho_i a_i^3.$$

En supposant que l'évolution ultérieure de l'Univers ( $t > t_i$ ) est décrit par le modèle standard du Big-Bang, et est donc adiabatique, nous concluons que

$$(1 - Q_K) \rho a^3 \sim 10^{-60} (1 - Q_{K,i}) \rho_i a_i^3$$

Le problème de planéité peut ainsi être résolu si  $\rho_i a_i^3 \sim 10^{60} \rho a^3$ . De plus, puisque  $H^2 a^2 = 8\pi G \rho/3$  est constant dans le temps, on a ça

$$\text{une } f > \text{une } j_e. \quad (8.3)$$

Ainsi, une condition nécessaire à l'inflation est que l'expansion de l'Univers soit accélérée pendant la période  $[t_i, t_f]$ , ce qui implique que pendant cette période la condition d'énergie

$$a(t) > 0 \quad p + 3P < 0.$$

forte doit être violée [voir (3.26)] :

$$(8.4)$$

### 8.1.2 Résolution des problèmes du Big-Bang

L'inflation est donc définie comme une phase d'expansion accélérée de l'Univers. Cette propriété suffit à montrer que les problèmes du Big-Bang peuvent être résolus si cette phase dure suffisamment longtemps.

Pour quantifier la durée de la période inflationniste, nous définissons la quantité

$$N = \ln(f) \quad (8.5)$$

où un  $a_i$  et un  $a_f$  sont les valeurs du facteur d'échelle au début et à la fin du gonflage. Ce nombre mesure la croissance du facteur d'échelle au cours de la phase d'accélération, exprimé en unités de l'exponentielle de base « e », raison pour laquelle il est habituellement appelé nombre de « e-folds »<sup>1</sup>.

#### 8.1.2.1 Problème de planéité

L'analyse dynamique des équations de Friedmann-Lemaître (Chapitre 3) a montré (3.54) que, lorsque  $Q_k = 0$ ,

$$\frac{dQ_k}{d \ln a} = (1 + 3w)Q_k \quad (1 -$$

Lorsque  $-1 < w < -1/3$ , le point fixe stable de ce système dynamique est sur l'axe  $Q_k = 0$  (voir Fig. 3.4-3.6). Cet attracteur devient instable lorsque  $w$  devient supérieur à  $-1/3$ , c'est-à-dire dans les ères de matière et de rayonnement. Ainsi, le problème de planéité sera résolu si l'attraction vers  $Q_k = 0$  pendant la période d'inflation est suffisante pour compenser sa dérive ultérieure lors du Big-Bang chaud, c'est à dire si l'inflation a duré suffisamment longtemps.

Pour donner une estimation du nombre minimum requis de e-folds d'inflation, notons que, si nous supposons que  $H$  est presque constant pendant l'inflation, alors

$$\frac{dQ_k(t)}{dt} = \left( f - \frac{2N}{t} \right) Q_k(t) \quad \text{ai/}$$

Afin d'avoir  $|Q_k(t_f)| < 10^{-5}$  et  $Q_k(t_i) \sim O(1)$ , il faut donc

$$N > 70. \quad (8.6)$$

<sup>1</sup> Au lieu du nombre de plis  $e$ , la nomenclature internationale utilise ici le neper (symbole Np) qui sert par exemple à exprimer la valeur de grandeurs logarithmiques telles que les rapports de puissance ou la pression acoustique. Le neper est conforme au Système international (SI) mais n'a pas encore été adopté par la Conférence générale en tant qu'unité du SI. Le néper est analogue au décibel, avec la convention que  $1 \text{ Np} = 20 / (\ln 10) \text{ dB} = 8.686 \text{ dB}$ , qui exprime l'utilisation d'une base logarithmique naturelle plutôt que décimale pour le dB. Dans ce qui suit, nous utiliserons le terme « e-fold » car c'est celui

que l'on retrouve dans la littérature.

## 8.1.2.2 Problème d'horizon

L'hypothèse (8.4) implique que le rayon de Hubble comobile,  $H^{-1} = (aH)^{-1}$ , diminue avec le temps

$$dt(aH)^{-1} < 0. \quad (8,7)$$

Deux points en contact causal en début de gonflage peuvent ainsi être séparés d'une distance supérieure au rayon de Hubble en fin de gonflage (Fig. 8.1). Ces points sont toujours causalement liés, mais peuvent *sembler* causalement déconnectés si la période inflationniste est omise. Ainsi, l'inflation permet à l'univers *observable tout entier* de sortir de la même région causale avant le début de l'inflation.

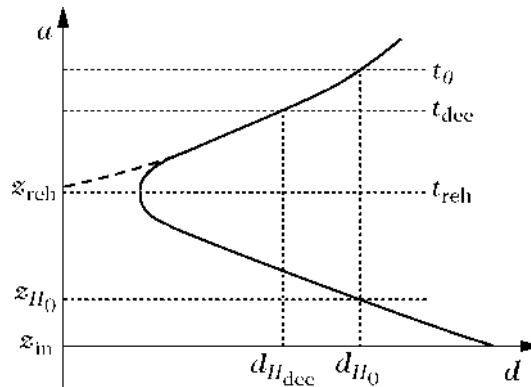


**Fig. 8.1** Evolution of the comoving Hubble radius as a function of the scale factor of the Universe assuming a period of inflation (plain line). A given comoving scale (vertical line) exits the Hubble radius during inflation and enters back into the Hubble radius during the hot Big-Bang. All observable scales can thus have been in causal contact at the beginning of inflation. This is not the case without inflation (dashed line) since the comoving Hubble radius is then strictly growing.

Pour le problème de l'horizon à résoudre *aujourd'hui*, une région causale de facteur d'échelle  $a$  ; doit avoir au moins la taille de l'Univers observable actuel, ce qui implique que

$$e^N \sim \frac{af D_H(\hat{a})}{D_H(tf)} \approx \frac{T_0 D_H(t_0)}{T_f D_H(tf)}$$

En supposant que l'inflation se termine à l'échelle de la Grande Unification (voir chapitre 9),  $T_f = 10^{16}$  GeV alors  $D_H(t_f) = MP/T_f = 10^{-29}$  GeV $^{-1}$ . Depuis  $T_0 = 10^{-26}$  eV et  $D_H(t_0) = H^{-1} = 10^{26}$  GeV $^{-1}$ , nous en déduisons que

$$N > 57. \quad (8,8)$$

Cette valeur peut être inférieure si l'échelle énergétique en fin de gonflage est inférieure.

### 8.1.2.3 Conclusions

Une période primordiale d'expansion accélérée permet de résoudre les problèmes brûlants du Big Bang si elle dure suffisamment longtemps. Nous avons estimé que le nombre de plis électroniques devrait généralement être au moins de l'ordre de

$$N > 50 - 70, \quad (8,9)$$

en fonction de l'échelle énergétique en fin d'inflation. On peut montrer qu'avec une telle valeur, les autres problèmes (monopoles, homogénéité, entropie) sont également résolus. Il reste à construire des modèles physiques conduisant à une telle phase inflationniste et à comprendre comment elle s'articule avec le modèle en vogue du Big-Bang.

### 8.1.3 Premiers modèles d'inflation

Tout modèle inflationniste repose sur un ou plusieurs champs scalaires, appelés « inflation ».

#### 8.1.3.1 La « vieille » inflation

Les modèles d'inflation ancienne reposent sur un mécanisme de transition de phase du premier ordre (Fig. 8.2). Un champ scalaire est piégé dans un minimum local de son potentiel, imposant ainsi une densité d'énergie constante,  $V(\langle\phi\rangle)$ , équivalente à la contribution d'une constante cosmologique. Tant que le champ reste dans cette configuration, l'évolution de l'Univers est exponentielle et l'Univers peut être décrit par un espace-temps de De Sitter.

Cette configuration est métastable et le champ peut tunneler jusqu'à son minimum global,  $V(\phi) = 0$ , créant ainsi des bulles de vide véritable, qui correspondent à un Univers non inflationniste (voir Fig. 8.2).

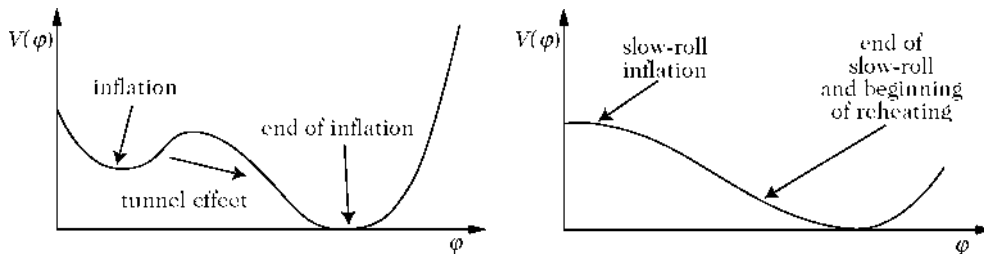


**Fig. 8.2** The model of old inflation (left) is based on a first order phase transition from a local to a true minimum of the potential. The false vacuum is metastable and the field can tunnel to the true vacuum. In the models of new inflation (right) a scalar field slowly relaxes towards its vacuum.

L'un des problèmes de ces modèles vient des propriétés de l'espace de Sitter (section 8.1.4) qui peut être considéré comme un espace en expansion, en contraction ou statique selon le choix des coordonnées (voir ci-dessous). Dans la phase métastable, il n'y a a priori pas d'hypersurface préférée et donc pas de direction temporelle privilégiée pour choisir un découpage. Sans une telle direction, la transition de phase peut se produire sur n'importe quelle hypersurface. Chaque bulle de vide véritable aura donc des propriétés physiques très différentes,

par exemple une courbure spatiale, de sorte que l'Univers devrait être très inhomogène à grande échelle. Cela a conduit à l'abandon de ce modèle [12].

### 8.1.3.2 Nouvelle inflation

Dans les modèles de nouvelle *inflation* [5,13], un champ scalaire sort de son faux vide en roulant lentement vers son vrai vide (voir Fig. 8.2). Cette phase peut être précédée d'une phase d'inflation ancienne. La phase de roulement lent est essentielle car c'est pendant cette période que sont générées les fluctuations de densité, qui conduisent aux structures à grande échelle actuellement observées.

Ce modèle ne peut fonctionner que si le potentiel présente un plateau très plat autour de  $= 0$ , ce qui est artificiel. Dans la plupart des versions de ce modèle, l'inflaton ne peut pas être en équilibre thermique avec d'autres champs de matière. La théorie des transitions de phase cosmologiques ne s'applique alors pas.

Aucune réalisation satisfaisante de ce modèle n'a été proposée et il a été progressivement abandonné.

### 8.1.4 L'inflation comme phase de De Sitter

A la limite d'un champ gelé, la phase inflationniste est décrite par un Univers de De Sitter. Cet espace-temps sera utile pour comprendre et illustrer certains mécanismes se produisant lors de l'inflation. Dans les modèles réalistes d'inflation, la dynamique de l'inflation induit une déviation de la structure espace-temps et celle d'un espace-temps de De Sitter pur. Comme on le verra également, la limite où le champ est complètement gelé est généralement singulière.

#### 8.1.4.1 Intégration dans un espace à cinq dimensions

L'espace-temps de De Sitter peut être représenté comme un hyperboloïde à quatre dimensions intégré dans un espace de Minkowski à cinq dimensions,

$$-(z_0)^2 + (z_1)^2 + (z_2)^2 + (z_3)^2 + (z_4)^2 = H^{-2} \quad (8.10)$$

Cette surface est invariante sous les transformations de Lorentz à cinq dimensions, de sorte que l'espace de Sitter est invariant sous le groupe de symétrie à 10 paramètres  $O(4,1)$ . Il s'agit donc d'un espace quadridimensionnel à symétrie maximale, tout comme l'espace-temps de Minkowski, avec une courbure

$$R = 12 H^2 = \text{const.} \quad (8.11)$$

Selon le choix des hypersurfaces à temps constant (voir Fig. 8.3), l'espace de Sitter peut prendre la forme d'un espace-temps de Friedmann-Lemaître avec des sections spatiales plates, fermées ou ouvertes, ou une forme statique similaire à l'espace-temps de Friedmann-Lemaître. Espace-temps de Schwarzschild.

#### 8.1.4.2 Tranchage euclidien

$$z_i = \frac{\sinh Ht}{H} + T e^{x_i},$$

Le choix des coordonnées

$$x_i = \frac{\cosh Ht}{H} e^{Ht} 2^e, \quad Z_i = e^{Ht} x_i, \quad (8.12)$$

conduit à l'expression de la métrique induite



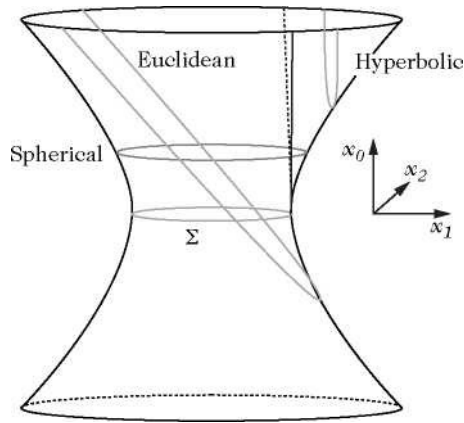


**Fig. 8.3** Depending on the choice of the constant-time hypersurfaces, the four-dimensional surface (8.10) can take various forms.

$$DS^2 = -c^2 dt^2 + e^{2Ht} \delta_{ij} dx^i dx^j, \quad (8.13)$$

avec des sections spatiales euclidiennes (voir la section 8.4.5 pour plus de détails sur le calcul d'une métrique induite). En temps conforme, cet espace prend la forme

$$DS^2 = \frac{-c^2 dt^2 + \delta_{ij} dx^i dx^j}{(Hn)^2}, \quad (8.14)$$

avec

$$n = -e^{-Ht}. \quad (8.15)$$

Dans cette représentation,  $n$  varie entre  $-\infty$  et  $0^-$ , avec la limite  $n \rightarrow 0^-$  représentant « l'infini temporel ». Cependant, elle ne couvre que la moitié de l'hyperboloïde (8.10).

#### 8.1.4.3 Tranchage sphérique

Le choix du système de coordonnées  $(t, x, \theta, \phi)$  défini par

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{\sinh Ht}{H}, & x_1 &= \frac{\cosh Ht}{H} \cos \theta, & x_2 &= \frac{\cosh Ht}{H} \sin \theta \cos \phi, \\ x_3 &= \frac{\cosh Ht}{H} \sin \theta \sin \phi, & x_4 &= \frac{\cosh Ht}{H} \end{aligned} \quad (8.16)$$

peut être utilisé pour réécrire la métrique sous la forme d'un espace-temps de Friedmann-Lemaître à sections spatiales sphériques,

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + \frac{\cosh^2 Ht}{H^2} (dx^2 + \sin^2 \theta dQ^2). \quad (8.17)$$

Contrairement à la forme euclidienne (8.13) et à la version hyperbolique, ce découpage couvre tout l'espace-temps de De Sitter et est donc géodésiquement complet.

#### 8.1.4.4 Tranchage statique

Pour nous convaincre que l'espace-temps de De Sitter est un espace-temps statique, puisqu'il est symétrique au maximum, dérivons explicitement sa forme statique. Avec le choix des coordonnées

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{\sinh Ht}{H}, \quad z_1 = \frac{\cosh Ht}{H}, \\ z_2 &= r \cos \theta, \quad z_3 = r \sin \theta \cos \phi, \quad z_4 = r \sin \theta \sin \phi \end{aligned} \quad (8.18)$$

où  $0 < rH < 1$ , la métrique prend la forme Schwarzschild

$$ds^2 = - (1 - r^2 H^2) dt^2 + \frac{dr^2}{(1 - r^2 H^2)} + r^2 dQ^2. \quad (8.19)$$

## 8.2 Dynamique de l'inflation à champ unique

Les premiers modèles d'inflation introduisaient deux ingrédients partagés par une bonne majorité des modèles d'inflation : l'existence d'une phase pendant laquelle l'Univers est « proche » d'un espace-temps de De Sitter, et un champ scalaire à roulement lent qui régit l'expansion de l'espace-temps. Univers.

### 8.2.1 Équations d'évolution

Les modèles d'inflation les plus simples sont construits à partir d'un seul champ scalaire,  $y$ , évoluant dans un potentiel  $V(y)$  avec une action donnée par

$$-g^{\mu\nu} \partial_\mu y \partial_\nu y + V(y) \, dx, \quad (8.20)$$

so that its energy-momentum tensor takes the form

$$P_{\mu\nu} = \partial_\mu y \partial_\nu y - g_{\mu\nu} \left( \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha y \partial_\beta y + V(y) \right). \quad (8.21)$$

The energy density and pressure of a homogeneous scalar field are, respectively, given by

$$\rho_y = \frac{1}{2} \dot{y}^2 + V(y), \quad p_y = \frac{1}{2} \dot{y}^2 - V(y), \quad (8.22)$$

in conformal time, or by

$$P_y = y + \frac{1}{2} \dot{y}^2, \quad P_y = y - \frac{1}{2} \dot{y}^2 \quad (8.23)$$

in cosmic time. These expressions show that  $p_y + 3P_y = 2(y\ddot{y} - \dot{y}^2)$ . Since the Friedmann equations imply  $a/\dot{a} = -4\pi G_N(p + 3P)/3$  (see Chapter 3), the Universe can enter a phase of accelerated expansion as soon as  $y\ddot{y} < \dot{y}^2$ . The expansion will be quasi-exponential if the scalar field is in a slow-roll regime, i.e. if  $\dot{y}^2 \ll V$ .

### 8.2.1.1 Équations dans le temps cosmique

L'équation de Friedmann et Klein-Gordon en temps cosmique prend la forme (voir le chapitre 3 pour leur dérivation)

$$(8.24)$$

$$(8.25)$$

$$(\dot{\phi} + 3H(\phi + V_\phi) = 0. \quad (8.26)$$

Utiliser  $H = \dot{a}/a$ , on obtient la relation

$$je \dot{\phi} = -4\pi G \phi (\dot{\phi}^2 + 2 \cdot \text{une}^2 \quad (8.27)$$

ce qui nous sera utile dans la suite. Comme d'habitude, seules deux de ces équations sont indépendantes.

### 8.2.1.2 Équations en temps conforme

Ces équations peuvent être traduites en temps conforme. Ils prennent alors la forme

As long as the evolution of the scalar field is monotonic, it can be useful to rewrite time (8.24)-(8.26) using instead of  $t$  or  $\eta$ , as a (8.27) variable. Assuming that  $K = 0$ , takes the form

$$\frac{H}{H^2} \frac{dH}{d\eta} = -\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 \quad (8.31)$$

which defines the notation  $H_\eta$ , so that (8.24) becomes

$$[H, 4\pi G \phi^2] = 12 \pi G \phi^2 H(\eta) = 32 \pi G \eta V(\eta). \quad (8.32)$$

$$H^2 = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) = K. \quad (8.28)$$

$$H = -\frac{1}{2} \ln \eta, \quad V(\phi) = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2, \quad (8.29)$$

pour les équations de Friedmann, et

$$(\ddot{\phi} + 2H\dot{\phi} + a^2 V_{,\phi}) = 0, \quad (8.30)$$

pour l'équation de Klein-Gordon.

### 8.2.1.3 Équations de Hamilton-Jacobi

(8.31) et (8.32) sont tous deux strictement équivalents à (8.24)-(8.27). Ce formalisme est très efficace pour obtenir des solutions exactes de la dynamique puisque le choix d'une fonction  $H(\eta)$  détermine directement la forme du potentiel recherché.

### 8.2.2 Paramètres de roulement lent

Le formalisme de roulement lent est utile pour reformuler la plupart des modèles d'inflation qui ne reposent pas sur des transitions de phase de premier ordre (comme l'ancienne inflation) en termes de paramètres dits de *roulement lent*. Il permet de calculer les prévisions d'inflation sans nécessiter de spécification de la forme exacte du potentiel d'inflation.

Nous supposons que  $K = 0$ , puisque le terme de courbure diminue à mesure que  $a \rightarrow \infty$  et devient négligeable en comparaison de la contribution du champ scalaire, qui a une densité énergétique quasi constante, si l'inflation dure suffisamment longtemps. Cela implique premièrement que  $H < 0$  [voir (8.27)], et donc  $H$  est toujours décroissant, et deuxièmement que  $|\dot{H}| < H$  si  $a > 0$ .

#### 8.2.2.1 Principe

Lors de l'inflation, le champ scalaire doit être dans un régime de roulement lent. Cela implique que le champ scalaire varie peu pendant la phase inflationniste et satisfait donc

$$(8.33)$$

Dans ces conditions, les équations d'évolution (8.24) et (8.26) se réduisent à

$$\left( \frac{8\pi G_*}{3} \right) \dot{\phi}^2 < 2 \cdot 4\pi G_* \dot{\phi}^2, \quad 24\pi G_* \dot{\phi}^2. \quad (8.36)$$

ce qui implique

$$\frac{|\dot{H}|}{H} < \frac{3}{2}. \quad (8.35)$$

De plus, puisque

$$H^2 \sim \frac{1}{V}, \quad H = \frac{1}{2M_{\text{Pl}}^2} \left( \frac{V}{\dot{\phi}^2} \right), \quad 3H\dot{\phi} = -V_{,\phi}, \quad (8.34)$$

Ainsi, pour que l'inflation se produise, le potentiel doit être très stable. Dans ce régime de roulement lent, nous pouvons développer (8.24) et (8.26) en termes de dérivées du taux d'expansion,  $H$ , ou du potentiel,  $V$ .

#### 8.2.2.2 Définitions

Pour formaliser l'argument précédent, introduisons les paramètres de roulement lent via les relations

nous en déduisons que les deux conditions (8.33) impliquent

$$(8.37)$$

$$(8.38)$$

$$(8.39)$$

Le paramètre  $\hat{\phi}$  est parfois appelé  $n$  dans la littérature mais nous n'utiliserons pas cette notation, pour éviter toute confusion avec le temps conforme. Les définitions (8.37)-(8.39) ont l'avantage de dépendre uniquement de la géométrie espace-temps, c'est-à-dire qu'ils ne se limitent pas au cas d'un seul champ scalaire. Or, en pratique, on considérera presque toujours le cas d'un seul champ scalaire. En utilisant les équations du mouvement, nous constatons que les paramètres de roulis lent peuvent être réécrits comme

$$\epsilon = 2 \frac{3 - 2^{-1} + V(\phi)}{V(\phi)} \quad (8.40)$$

$$H^2 \quad (8.41)$$

Les équations de Friedmann impliquent que le paramètre  $\epsilon$  peut être exprimé comme

$$\frac{1}{4nG_*} \frac{H_{\text{MP}}}{H(y)} \quad (8.42)$$

avec la notation  $H' = dH/dy$ . Cela indique que  $\epsilon$  est lié au petit paramètre apparu dans la condition (8.35). Il peut être utilisé pour réécrire les deux équations de Friedmann comme

$$H^2 (1 - \epsilon) = 8\pi G_* V, \quad \text{une} = H^2 (1 - \epsilon), \quad (8.43)$$

et l'équation d'état effective de l'inflation comme

$$-1 + 3\epsilon. \quad (8.44)$$

La condition d'inflation se réduit donc à

$$\boxed{w < -1/3} \quad \epsilon < 1. \quad (8.45)$$

Les trois paramètres (8.37)-(8.39) sont liés via les équations de mouvement comme

$$\epsilon_H = 2\epsilon(\epsilon - \hat{\phi}), \quad H = 2\epsilon(\epsilon - \hat{\phi})^{-e} \quad (8.46)$$

Les conditions de roulement lent sont donc satisfaites tant que  $\epsilon$  et  $\hat{o}$  sont petits devant 1 et  $\zeta = O(\epsilon, \hat{o}, \epsilon\hat{o})$ . Le paramètre  $\hat{o}$  prend également la forme

$$\frac{1}{4n_{\text{GN}}H} \frac{H}{V} \frac{V'}{V} \quad (8.47)$$

Il est également utile d'exprimer ces paramètres en termes de temps conforme comme

$$\frac{H}{I} \frac{P'}{Hp} = \frac{\epsilon}{2H\epsilon} \quad (8.48)$$

### 8.2.2.3 Expansion du potentiel et du taux d'expansion

L'approximation lente peut être vue comme une expansion de Taylor du potentiel  $V$  ou du taux d'expansion  $H$  en termes de leurs dérivées par rapport à  $p$ . Deux ensembles de

$$n_V = \frac{1}{8n_{\text{GN}} V} \frac{1}{V} \frac{V'}{V} \frac{V''}{V^2}$$

paramètres de roulis lent peuvent être introduits, basés soit sur le potentiel  $V$  et ses dérivées,

(8.49)

$$\epsilon_H = \left( \frac{H'}{H} \right)^2, \quad \zeta_H = \frac{1}{4n_{\text{GN}} H} \frac{H''}{H^2}$$

soit sur le taux d'expansion  $H$ ,

$$\hat{o}_H = \frac{1}{H} \frac{H'}{H} \quad (8.50)$$

Ces deux ensembles de paramètres apparaissent dans la littérature. Ils ne sont pas indépendants et on peut montrer, à l'aide de l'équation de Jacobi (8.32), que

$$\epsilon = \epsilon_V = \epsilon_H, \quad \hat{o} = \hat{o}_H = n_V - \epsilon_V, \quad \zeta = \zeta_H - 3\epsilon\hat{o} + 2\epsilon, \quad \zeta_H = \zeta_V - 3\epsilon_V' + 3\epsilon. \quad (8.51)$$

### 8.2.2.4 Durée de gonflage et nombre de plis électroniques

L'expansion entre un temps arbitraire  $t$  et la fin de l'inflation peut être liée à

$$N(t, t_{\text{f}}) = \int_{t_{\text{f}}}^t H dt, \quad (8.52)$$

puisque, après intégration,

$$\text{une}(t) = e^{N(t)}, \quad (8.53)$$

où  $N$ , le nombre de *e-folds*, caractérise le degré d'inflation entre un temps donné et la fin de la phase d'expansion accélérée  $[N(t, t_{\text{f}})]$  correspond à la quantité (8.5). On peut exprimer  $N$  en termes d'inflation comme

$$\begin{aligned} &Z_{\text{ti H}} \qquad \qquad \qquad cVfu \qquad \qquad \qquad \frac{\text{---} rtf \text{---}}{54} \\ &\text{---} dp = \text{---}^4_{\text{nG}} N \qquad \qquad H^{\text{dP}} = \qquad \qquad \frac{4nGN}{8}, \end{aligned}$$

où la référence explicite à la fin de l’inflation  $p$ , dans  $N$  est supprimé lorsqu’il n’y a pas d’ambiguïté.

Lors du gonflement, un mode  $k$  devient super-Hubble au temps  $t_k$ . Défini par

$$k = a(t_k) H(t_k).$$

On notera avec un indice  $k$ , par exemple  $X_k$ , toute quantité  $X$  évaluée à  $t_k$ ,  $X(t_k) = X_k$ . La dynamique de l'inflation peut ainsi être décrite en utilisant soit  $t$ ,  $y$  ou  $k$  comme variable d'évolution. Par exemple, on notera  $N(y)$  et  $N_k$  le nombre de e-folds entre le moment où l'inflation prend la valeur  $y$  ou celui où l'échelle  $k$  devient super-Hubble et la fin de l'inflation.

Il est donc utile de relier  $k$  à la valeur de l'inflation à  $t_k$  par

$$k(y) = a(t_k) H(t_k) \exp[-N(y)], \quad (8.55)$$

de sorte que la vitesse à laquelle les échelles deviennent super-Hubble est caractérisée par

$$\frac{d \ln k}{dy} = \frac{4n_s}{2} (\epsilon - 1). \quad (8.56)$$

Similarly, one can easily show that the relation  $k = a(t_k) H(t_k)$  implies

$$\frac{d \ln H_k}{d \ln k} = 0. \quad (8.57)$$

La première expression souligne que si  $\epsilon = 0$  (et donc  $\epsilon = 0$ ), c'est à dire pour une phase de De Sitter pure,  $d \ln k / dy = 0$  et le processus de croisement du rayon de Hubble est invariant d'échelle.

#### 8.2.2.5 Sensibilité aux conditions initiales

L'équation de Klein-Gordon, étant une équation différentielle du second ordre, a deux solutions indépendantes. Cependant, dans le régime de roulement lent, cela devient une équation différentielle du premier ordre, avec une seule solution. Une des solutions a ainsi été négligée. Dans le formalisme de Hamilton-Jacobi, la solution de (8.32) dépend du choix de la condition initiale du champ scalaire. Pour que les résultats obtenus soient robustes et que l'inflation soit prédictive, la solution aux temps tardifs  $H(y)$  doit être indépendante du choix des conditions initiales [14].

Pour voir cela, supposons que  $H_0(y)$  est la solution à roulement lent et considérons une petite perturbation par rapport à cette solution,  $H(y) = H_0(y) + \delta H$ . En linéarisant (8.32), on trouve que la perturbation  $\delta H$  est une solution de  $H_0 \delta H'' + 3 H_0 \delta H' + 12 n_s \delta H = 0$  et prend la forme générale

$$\delta H = \delta H(y) \exp \left[ - \int^y \frac{1}{H_0} dy \right]$$

où  $\delta H(y)$  représente un choix différent de condition initiale. L'intégrale précédente peut être exprimée en termes de nombre de plis  $e$  (8.54) comme

$$\delta H = \delta H(y) \exp \{ -3 [N(y) - N(y_0)] \}. \quad (8.58)$$

L'effet du choix des conditions initiales s'efface donc exponentiellement et n'a plus d'effet observable dès que quelques e-folds d'inflation se sont produits avant que les échelles d'intérêt cosmologique ne deviennent super-Hubble.



Une autre façon d'illustrer que la solution à roulement lent est un attracteur de la dynamique est de la représenter comme un portrait de phase dans le plan  $(y, \dot{y})$ , à partir de conditions initiales arbitraires. La figure 8.4 donne un exemple d'un tel portrait de phase pour un potentiel  $V = m^2 y^2/2$ . La spirale autour de l'origine décrit la dynamique à la fin de la période inflationniste et est pertinente pour le réchauffement qui sera discuté plus tard.

Nous voyons également sur l'image que lorsque la période inflationniste est courte, il est possible que la solution réelle n'ait pas convergé vers l'attracteur inflationniste au moment où les modes d'intérêt observationnel deviennent super-Hubble. Dans un tel cas, les prévisions d'inflation seront discutées en termes de trajectoires.

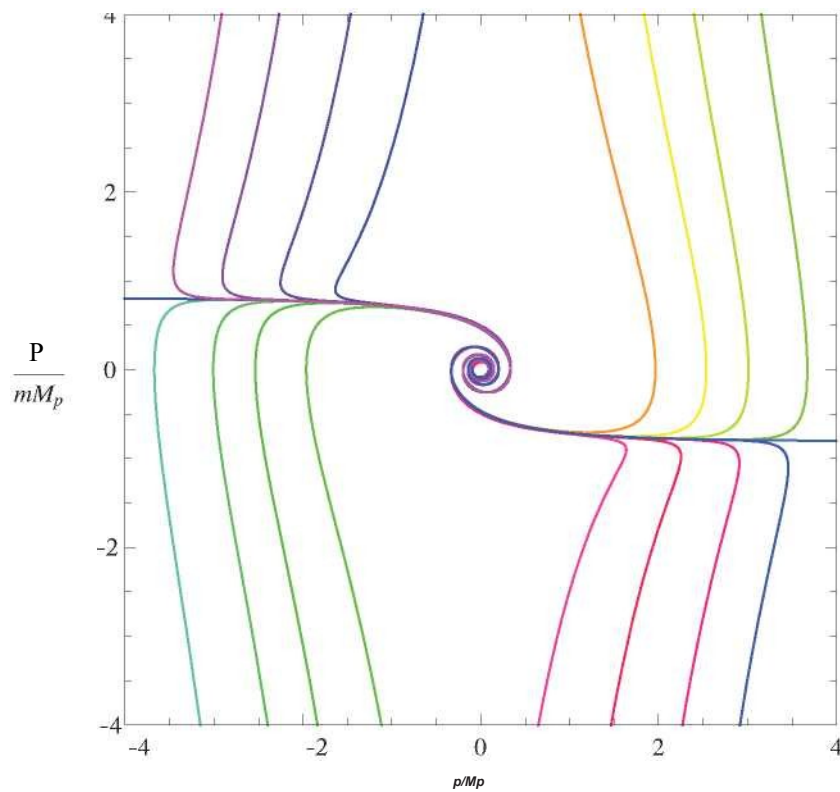


**Fig. 8.4** Phase portrait in the  $(y, \dot{y})$ -plane of the dynamics of a scalar field with a potential  $V = m^2 y^2/2$ , assuming  $m = 10^6 M_p$ . This illustrates the mechanism of attraction toward the slow-roll solution.

### 8.2.3 Fin de l'inflation

La fin de l'inflation peut être identifiée avec la fin du régime de slow-roll. On peut donc définir la valeur du champ en fin de gonflage,  $y_{\text{fin}}$ , par

$$\max(e, J) \sim 1. \quad (8,59)$$

À la fin de l'inflation, toutes les inhomogénéités classiques ont été exponentiellement effacées, et on peut les considérer comme inexistantes à ce stade. L'Univers est devenu très plat de sorte que les termes de courbure peuvent être négligés et on peut fixer  $K = 0$  pendant toute la phase primordiale (voir Section 8.9 pour une discussion sur l'effet de la courbure spatiale). De plus, toute l'entropie a été diluée. Si le potentiel de gonflage a un minimum, le champ scalaire oscillera autour de ce minimum juste après la fin du gonflage (voir Fig. 8.4).

En raison de l'expansion de Hubble, ces oscillations sont amorties et le champ scalaire se désintègre en un grand nombre de particules. Durant cette phase, l'Univers inflationniste (de faible entropie et dominé par les oscillations cohérentes de l'inflaton) devient un Univers chaud (de forte entropie et dominé par le rayonnement). Cette phase *de réchauffage*, décrite à la section 8.6, relie l'inflation au scénario chaud du Big-Bang.

Pour analyser la transition de l'Univers gonflé à l'Univers observable, il sera utile de relier l'instant où un mode  $k$  devient super-Hubble lors de l'inflation à celui où il redevient sous-Hubble. Pour ce faire, il faut un modèle complet de l'évolution de l'Univers. Dans le cas le plus simple, la séquence d'événements est la suivante : inflation - ère de matière pendant la phase de réchauffage (notée par l'indice 'reh') - ère de rayonnement - ère de matière (voir Fig. 8.5). En supposant que les transitions entre ces différents régimes soient instantanées, on a

$$(8h60)$$

## 468 Inflation

En utilisant les valeurs typiques de ces époques, on obtient

$$N(k) = 62 \cdot \ln(a_0 H_0) \cdot \ln \left( \frac{a_k H_k}{a_0 H_0} \right) + \ln \left( \frac{f \cdot 3}{g \cdot 8} \right) \cdot \ln \left( \frac{8}{61} \right)$$

$$\begin{aligned} \ln \frac{a_k H_k}{a_0 H_0} &= \ln \frac{a_k}{a_0} + \ln \frac{H_k}{H_0} \\ &= \ln \frac{a_k}{a_{\text{eq}}} + \ln \frac{H_k}{H_{\text{eq}}} + \ln \frac{a_{\text{eq}}}{a_0} + \ln \frac{H_{\text{eq}}}{H_0} \end{aligned}$$

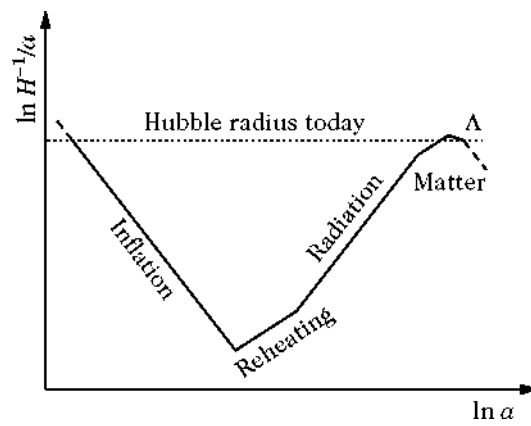


**Fig. 8.5** The function  $\ln aH$  as a function of  $\ln a$  illustrates the different epochs to take into account to compute the number of e-folds.

Cette relation peut être modifiée si l'inflation se produit à une échelle d'énergie inférieure. De plus, le mode de longueur d'onde égale aujourd'hui au rayon de Hubble,  $k_0 = a_0 H_0$ , devient super-Hubble à environ 60 fois  $e$  avant la fin du gonflage. Une échelle de l'ordre de 1 Mpc, typiquement de l'ordre des plus petites échelles observables aujourd'hui, devient super-Hubble à environ 9 fois  $e$  après  $k_0$ . Nos observations sont donc principalement sensibles à la dynamique de l'inflation pendant une dizaine de  $e$ -folds.

Notons enfin que  $Q_\kappa(k) = -K/a^4 H^2 p = -K/a^4 H = Q_{\kappa_0}$  pour le plus grand mode observable aujourd'hui, soit  $k_0$ . Les contraintes obtenues au chapitre 4 montrent qu'il est tout à fait légitime de négliger la courbure spatiale lors de l'inflation pour les époques pendant lesquelles les modes observables aujourd'hui deviennent super-Hubble.

## 8.2.4 Quelques exemples

### 8.2.4.1 Inflation chaotique

#### Le modèle le plus simple

L'inflation chaotique repose sur la considération d'un champ scalaire massif libre tel que

$$V(p) = 2 m^2 p^2. \quad (8.62)$$

L'équation de Klein-Gordon (8.26) se réduit à celle d'un oscillateur harmonique amorti,  $p + 3H\dot{p} + m^2 p = 0$ . Si  $p$  est initialement grand, alors l'équation de Friedmann (8.24) implique que  $H$  est également très grand. Le terme de friction devient important et domine la dynamique si bien que le domaine doit être en régime de roulis lent. Les équations d'évolution se réduisent alors aux deux équations du premier ordre suivantes, où  $p_i$  et un  $p_0$  sont les valeurs du champ et du facteur d'échelle à  $t_i = 0$ . Les paramètres de roulement lent (8.37)-(8.39) étant donnés par

$$3H\dot{p} + m^2 p = 0, \quad H = \frac{1}{3} \sqrt{4\pi G} \sqrt{2 m^2 p^2}. \quad (8.63)$$

They can be integrated easily to give

$$p^{(i)} = p_i \frac{m M_p}{12n} \quad (8.64)$$

$$a(t) = a_i \exp \left\{ \frac{M_p}{p} [p_i - p^{(i)}] \right\}, \quad (8.65)$$

$$\varepsilon = 4 \frac{M^2}{p^2}, \quad S = 0, \quad \& = 0, \quad (8.66)$$

le régime de roulis lent dure jusqu'à ce que le champ  $p$  atteigne  $p_i = M_p / \sqrt{4n}$ . Nous en déduisons que le nombre total de plis électroniques est

$$N \approx \frac{1}{\varepsilon} (\text{Député}) - 5 \quad (867)$$

Pour avoir  $N > 70$ , il faut  $p_i > 3M_p$ . Si  $p$  prend la plus grande valeur possible compatible avec la description classique adoptée ici, c'est à dire fixée par  $V(p_i) < M_p^4$ , on

trouve que  $y \sim M_P / m$ . Dans ce cas, le nombre maximal accessible de plis e serait  $A' \dots \sim 2nM_P / m$ . Comme on le verra plus loin, la théorie des perturbations cosmologiques et les observations du fond diffus cosmologique imposent que la masse soit de l'ordre de  $m \sim 10^{-12} M_P$ , de sorte que  $N_{\max} \sim 10^{12}$ . Le nombre maximal de plis e est donc très grand par rapport au minimum requis pour résoudre les problèmes cosmologiques.

Par conséquent, si l'Univers est initialement composé de régions où les valeurs du champ scalaire sont distribuées aléatoirement, ou si l'on considère différents Univers avec des valeurs de champ différentes, alors les domaines où la valeur initiale de  $y$  est trop petite, ne gonflent jamais ou seulement pour un petit nombre de plis électroniques. La principale contribution au volume physique total de l'Univers à la fin de l'inflation provient donc de régions qui ont gonflé depuis longtemps et qui avaient une valeur de  $y$  initialement élevée. Ces domaines produisent des zones extrêmement plates et homogènes en fin d'inflation avec une taille très grande par rapport à celle de l'Univers observable. À plus grande échelle,

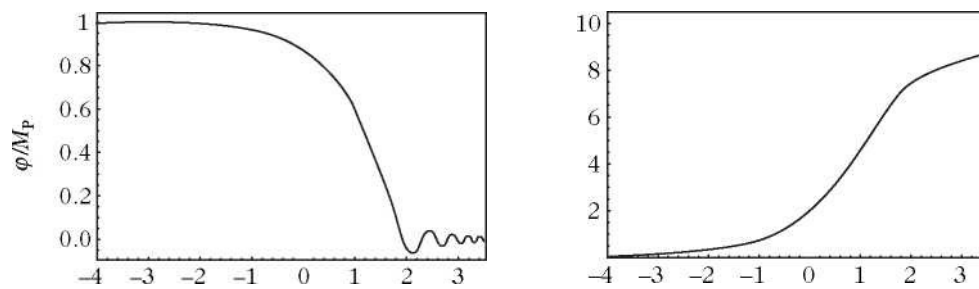


**Fig. 8.6** Evolution of the inflaton and scale factor during chaotic inflation for the model (8.62). The scalar field is initially in a slow-roll regime and the expansion of the Universe is accelerated. At the end of this regime, it starts oscillating at the minimum of its potential and it is equivalent to a pressureless fluid.

l'Univers a une structure très inhomogène. Nous reviendrons sur cette idée de condition initiale chaotique dans la section 8.7.

$\ln(mt)$

$\ln(mt)$

$$V(y) = \frac{3M_P^4}{8n} A_n \left( \frac{\phi}{M_P} \right)^n, \quad (8.68)$$

### Rallonges

Ce modèle peut être généralisé à toute fonction polynomiale du champ scalaire. A titre

d'exemple, considérons la famille des potentiels

où  $X_0$  est une constante sans dimension. Les paramètres de roulement lent sont donnés par

$$\frac{M_{\text{Pl}}^2}{16\pi} \epsilon_1 = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{16\pi} \frac{n(m-2)}{m-2}, \quad (8.69)$$

et le régime de roulement lent dure aussi longtemps que  $y > y_c = nM_{\text{Pl}}^{2/n}$ . Nous en déduisons que le nombre total de plis électroniques est

$$N \leftrightarrow -V(M_P)$$

Donc pour que  $N > N_{\min}$ , il faudrait initialement avoir (8.70)

Or, des conditions initiales chaotiques impliquent que  $V(y > i) \sim M_P^4$ , imposant

$$y > M_P^{N_{\min} + j} \quad (8.71)$$

une valeur en général très grande par rapport à  $M_P$ . La résolution des équations de Klein-Gordon et Friedmann dans l'approximation du régime de roulis lent donne L'expression entre crochets pour la solution du champ scalaire est définie positive tant que l'hypothèse du roulement lent est valable. (8.72)

Remarquons que bien que l'expression (8.74) soit bien définie pour tout  $n$ , le champ scalaire en revanche est singulier pour  $n = 4$ . Le calcul direct de ce cas spécifique montre que (8.74) reste valide, avec  $F(\infty) = F_i \exp(-2\pi n^2 / 4 M_P^2)$ .

$$F^{(0)} = F_i \exp\left(-\frac{2\pi n^2}{4 M_P^2}\right) \quad (8.73)$$

$$a(t) = a_i \exp\{n M_P^2 W\} \quad (8.74)$$

On peut réexprimer ces quantités en termes de nombre de e-folds pour obtenir valable jusqu'à  $N \rightarrow \infty$ . Ces expressions montrent que le paramètre Hubble peut varier de manière significative pendant la phase de roulis lent. En particulier, et comme nous le verrons plus tard, l'amplitude des modes observables générés environ 50 à 70 fois avant la fin de l'inflation implique que  $H/M_P \sim 10^{-5}$ . Cependant, cela n'implique pas que le paramètre de Hubble n'aurait pas pu être beaucoup plus grand auparavant. Les observations cosmologiques peuvent donc donner quelques informations sur les quelque 70 derniers replis de l'ère de l'inflation mais, a priori, n'imposent aucune contrainte sur la phase primordiale de l'inflation.

$$F < N >^{-M_P^4} (M_P^2 - \ddot{H}^{(N)} - M_P^2) \quad (M_P)^2 \quad - n/4 \quad - J_N / 4n, \quad (8.75)$$

#### 8.2.4.2 Inflation selon la loi de puissance : une solution exacte

Pour la plupart des modèles, l'approximation du slow-roll est si bonne qu'il n'est pas nécessaire d'aller plus loin, même si la fin de l'inflation n'est pas très bien prise en compte. Il est cependant utile d'avoir des solutions précises.

De nombreux modèles existent dans la littérature mais le plus intéressant est celui de l'inflation en loi de puissance [15]. L'avantage de ce modèle est que les équations de perturbation peuvent également être résolues analytiquement.

Ces modèles sont construits de telle sorte que la solution des équations d'évolution

$$a = a_0 |n|^{\frac{1}{p}}$$

and

sont

$$\dot{a} = a \dot{\phi}^p, \quad (8.76)$$

$$\frac{y - y_i}{M_P} = -(1 + p) \ln |n|, \quad n = \frac{P+2}{P+1} \frac{1}{p'} \quad (8.77)$$

Le paramètre  $p$  varie entre 1 et  $\infty$  et donc  $p < -2$ . Les équations d'évolution impliquent que le potentiel est de la forme

$$V(y) = V \exp \left[ \frac{4\pi}{M_P^2} \frac{(y - y_i)^2}{2} \right] \quad (8.78)$$

so that the slow-roll parameters turn out to be constant,

$$\epsilon = 3 = e, \quad H = \frac{1}{p}, \quad \xi = 0. \quad (8.79)$$

Thus, with such a potential, the slow-roll parameters' inflation never ends. The limit  $p \rightarrow \infty$  (i.e.  $p \rightarrow -2$ ) corresponds to a de Sitter Universe.

#### 8.2.4.3 Hybrid inflation

Models of hybrid inflation introduce two coupled scalar fields,  $y$  and  $a$ , with the potential

$$V(y, a) = \frac{1}{2} (y - y_c)^2 + 2g y a^2 + V(y), \quad (8.80)$$

where  $v$  is the vacuum expectation value (the VEV, as defined in Chapter 2) of  $a$  and  $V(y)$  is the potential of the field  $y$  (see Fig. 8.7). The effective mass of the field  $a$  depends on the value of the second field

$$m_a^2 = g^2 (y - y_c)^2, \quad y > y_c$$

Le point  $y = y_c$  est le point de bifurcation où la masse effective du champ  $a$  change de signe pour devenir négative. Tant que  $y > y_c$ , le potentiel a une vallée le long de  $a = 0$ ; tout se passe donc comme s'il n'y avait qu'un seul champ roulant vers le minimum du potentiel  $V(y) + \frac{1}{2} A v^2$ . Le minimum global est cependant en  $y = 0$ ,  $|a| = v$ . Lorsque l'inflation atteint la valeur  $y_c$ , la masse de  $a$  change de signe, ce qui se traduit par une instabilité spinodale (voir chapitre 11) déclenchant la fin de l'inflation. Le nombre total de plis électroniques est alors



$$N = 2n \frac{A_{\text{v}}}{m_{\text{p}} M_{\text{p}}} \ln y \quad (8.81)$$

si le potentiel d'inflation est de la forme  $V(y) = m^2 y^2/2$ .

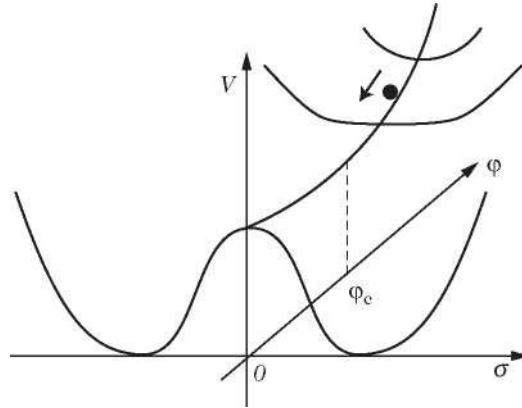


**Fig. 8.7** Potentiel d'inflation hybride avec deux champs scalaires. L'inflation se produit lorsque  $a = 0$  et s'arrête brusquement lorsque  $y$  atteint la valeur  $\phi_c$  du point de bifurcation.

### 8.2.5 Classification des modèles inflationnistes

Pour les modèles inflationnistes à champ unique, le potentiel peut toujours être caractérisé par deux échelles de masse,  $A$  et  $p$ ,

$$V(\phi) = A V(\phi/p) \quad (8-82)$$

Ces deux échelles déterminent généralement la hauteur et la largeur du potentiel.

Afin de discuter de la phénoménologie de ces modèles, il est utile de les classer en fonction de la valeur de leurs paramètres de roulis lent. Nous distinguons les quatre classes suivantes.

- A. Inflation avec de grandes valeurs de l'inflaton :**  $-\epsilon < \hat{\phi} < \epsilon$ . Les archétypes de cette classe sont les potentiels d'inflation chaotique, par exemple (8.62) et (8.68) ou les potentiels exponentiels (8.78). Dans ces modèles, le champ s'éloigne dans un premier temps de son minimum vers lequel il se détend lentement. Ces potentiels satisfont  $V'' > 0$ , soit  $n_v > 0$ . Dans le cadre de l'inflation chaotique, la condition  $V \sim M_p^4$  implique que  $F \sim M_p$ , mais une valeur  $F \sim M_p$  est, en général, suffisant pour obtenir le nombre requis de plis électroniques.
- B. Inflation avec de petites valeurs de l'inflation :**  $\hat{\phi} < -\epsilon$ . Ces potentiels sont ceux qui apparaissent naturellement dans les mécanismes de rupture spontanée de symétrie et sont à l'origine des modèles dits de nouvelle inflation. Le champ est initialement proche d'une position d'équilibre instable en  $\phi = 0$ . L'inflation se produit lorsque le champ est proche de l'origine et que la forme asymptotique du potentiel n'est pas significative. On a donc  $V'' < 0$ , soit  $n_v < 0$  et  $\epsilon > 0$  et très petit (potentiel très plat). Nous en déduisons que  $\hat{\phi} < -\epsilon$ . Un exemple d'un tel potentiel est

$$V(\phi) = A \left( 1 - \frac{\phi^2}{f^2} \right)^2, \quad (8,83)$$

que l'on peut considérer comme une expansion de Taylor du « vrai » potentiel autour de l'origine. Dans le cas d'un potentiel spontané de rupture de symétrie du Higgs

genre,  $p = 2$ ;  $p$  est alors l'échelle de la rupture de symétrie. Un autre exemple est le potentiel de Coleman-Weinberg,

$$V = \frac{\Lambda^4}{p} + \frac{4}{4p + 44n^p} H^2 \frac{25}{T} \quad (8.84)$$

- C. *Modèles hybrides* :  $0 < \delta < e$ . Ces potentiels apparaissent souvent dans le cadre de la supersymétrie. Le champ évolue vers son minimum non nul [cf. l'exemple donné en (8.80)]. L'inflation s'arrête généralement brusquement en raison d'une instabilité du champ auxiliaire. Un autre exemple est donné par le potentiel  $V(p) = A \cdot [1 + (p/p)^p]$ .
- D. *Modèles linéaires* :  $\delta = -e$ . Ces modèles, caractérisés par

$$V(p) \propto p, \quad (8.85)$$

représentent une limite entre les modèles avec des valeurs grandes et petites du champ.

Bien entendu, une telle classification n'est pas exhaustive car elle n'intègre pas les potentiels du type  $V(p) \propto \ln p$ , qui apparaissent souvent dans le cadre de la supersymétrie, ou des lois de puissance inverse,  $V(p) \propto p^{-n}$  comme dans l'inflation intermédiaire. Cependant, ces modèles nécessitent l'introduction de champs auxiliaires pour stopper l'inflation.

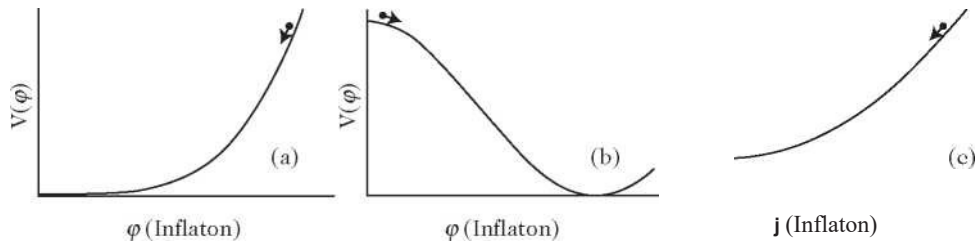


**Fig. 8.8** From left to right, three examples of inflationary potentials with large field values (class A), small field values (class B) and hybrid (class C).

### 8.3 Fluctuations quantiques pendant l'inflation

L'un des grands succès de l'inflation a été de fournir un moyen de relier l'origine de la structure à grande échelle de l'Univers aux fluctuations quantiques de l'inflation qui sont amplifiées au cours de l'inflation. Pour aborder ce point central de la cosmologie primordiale, nous commençons par un échauffement et ne considérons que les champs de test.

Cette étude illustrera le fait que lors du gonflage, tout champ lumineux (au sens  $m < H$ ) développe des fluctuations super-Hubble d'amplitude moyenne  $H/2n$ .

#### 8.3.1 Champ scalaire de test sans masse dans un espace-temps de De Sitter

La structure du vide dans un espace-temps en expansion exponentielle est beaucoup plus complexe que celle dans un espace-temps de Minkowski (chapitre 2). En particulier, la longueur d'onde de toute fluctuation croît de façon exponentielle. Quand il devient plus grand que Hubble

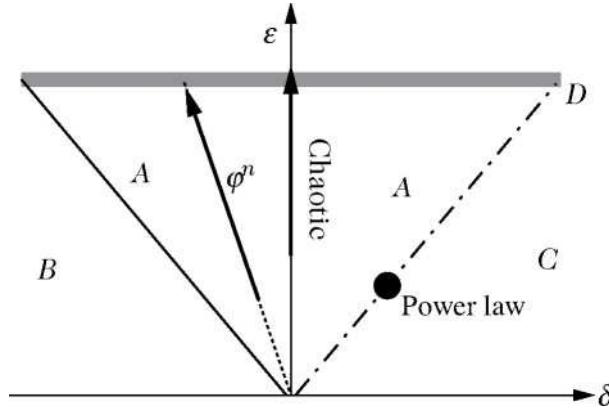


**Fig. 8.9** Les quatre classes de modèles d'inflation à champ unique dans l'espace des deux premiers paramètres de roulement lent. Nous avons indiqué la trajectoire des modèles d'inflation chaotique (8.62) et (8.68) et le point représente un modèle d'inflation en loi de puissance (8.78).

rayon,  $H^{-1}$ , on dit que cette fluctuation se fige car elle n'oscille plus à cause du terme de friction dans l'équation de Klein-Gordon, et elle converge rapidement vers une solution d'amplitude constante.

### 8.3.1.1 Quantification

Pour quantifier un champ scalaire dans un espace-temps en expansion, on procède de manière analogue à ce qui se fait habituellement dans l'espace-temps de Minkowski et on promeut le champ scalaire, disons  $x$ , au statut d'opérateur quantique,

$$x(x, t) = y \left( \frac{a}{2\pi} \right)^{1/2} e^{ikx} \quad \dot{a} = H a, \quad (8.86)$$

où les opérateurs de création et d'annihilation satisfont (2.83). La fonction mode  $X_k$  est une solution de l'équation classique de Klein-Gordon (1.108)

$$X_k + 3 H X_k' - \frac{k^2}{a^2} X_k = 0. \quad (8.87)$$

Qualitativement, cette équation possède deux régimes. Lorsque le mode est sub-Hubble,  $k \ll aH$ , le terme de frottement est négligeable et l'équation se réduit à celui d'un oscillateur harmonique analogue à celui obtenu dans l'espace-temps de Minkowski, la seule différence étant que le nombre d'onde est décalé vers le rouge par l'expansion. Lorsque le mode est super-Hubble,  $k \gg aH$ , et le terme de gradient est négligeable. L'équation se réduit à  $X_k + 3HX_k' = 0$  où la solution dominante est une constante. En conclusion, un mode initialement sub-Hubble oscille à mesure que sa longueur d'onde augmente puis se fige lorsqu'il devient super-Hubble.

### 8.3.1.2 Solution générale

Pour résoudre (8.87), il convient de travailler en temps conforme et d'introduire le champ auxiliaire

$$\nu = a\psi \quad (8.88)$$

L'équation de Klein-Gordon prend alors la forme

$$\nu_k + (k^2 - m^2) \nu_k = 0, \quad \nu_k^* = 0, \quad (8.89)$$

qui introduit un terme de masse effectif dépendant du temps,  $m^2 = -a''/a$ .

Pour un espace de De Sitter, le facteur d'échelle est donné par (8.14) tel que  $\nu$  satisfait

$$\nu_k + \frac{k^2}{2} \nu_k = 0. \quad (8.90)$$

Il a la solution générale

$$\nu_k(n) = [A H_{3/2}^{(1)}(kn) + B H_{3/2}^{(2)}(kn)] \quad (8.91)$$

où  $H_{3/2}^{(1,2)}$  sont les fonctions de Hankel de première et de deuxième espèce (Annexe B). En utilisant

$$H_{3/2}^{(1,2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{\pm i(\pi/4 - x)},$$

on en déduit la forme générale

$$\nu_k(n) = A e^{-ikn} + B e^{ikn} \quad (8.92)$$

A ce stade, nous devons postuler un choix de conditions initiales pour déterminer les deux fonctions arbitraires  $A(k)$  et  $B(k)$ .

### 8.3.1.3 Condition initiale

Pour effectuer une quantification canonique, nous imposons les règles de commutation aux opérateurs  $V$  et  $n$ , à savoir  $[V(\mathbf{x}, n), V(\mathbf{x}', n)] = [n(\mathbf{x}, n), n(\mathbf{x}', n)] = 0$  et  $[V(\mathbf{x}, n), n(\mathbf{x}', n)] = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  sur des hypersurfaces à temps constant,  $n$  étant l'impulsion conjuguée de  $V$ . De la commutation règles des opérateurs d'annihilation et de création, cela implique que

$$[a_k, a_{k'}] = [a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger] = 0, \quad [a_k, a_{k'}^\dagger] = \delta_{kk'} \quad (8.93)$$

qui détermine la normalisation du Wronskian. Le choix d'une fonction de mode spécifique  $\nu_k^*$ ( $n$ ) correspond au choix d'une prescription pour le vide physique  $|0\rangle$ , défini par

$$a_k |0\rangle = 0.$$

Pour choisir le vide, notons que pour les modes très hautes fréquences,  $kn \gg 1$ , le terme de courbure est négligeable de sorte que le champ peut être quantifié comme s'il était dans un

Espace-temps de Minkowski (voir chapitre 2). On choisit ainsi la solution qui correspond adiabatiquement au vide de Minkowski habituel, en ne gardant que les fréquences positives. Nous imposons donc

$$v_k = \frac{e^{-ik\eta}}{\sqrt{2k}} \quad (8.95)$$

quand  $kn \rightarrow \infty$ . Ce choix est appelé le vide Bunch-Davies. Nous déduisons que la solution satisfaisant cette condition initiale est

$$\chi_k = \frac{H\eta}{\sqrt{2k}} \left( 1 + \frac{1}{ik\eta} \right) e^{-ik\eta}. \quad (8.96)$$

Soulignons qu'à ce stade, nous n'avons pas justifié pourquoi nous devons appliquer la condition (8.95) à  $v_k$  plutôt que de  $\chi_k$ . Une telle justification sera faite plus tard.

#### 8.3.1.4 Propriétés aux échelles super-Hubble

Aux échelles super-Hubble, le champ  $x$  acquiert une amplitude constante

$$|x_k| (kn \ll 1) = \quad (8.97)$$

où nous avons utilisé  $a(n) = 1/(Hn)$  pour une phase inflationniste pure de De Sitter,  $H$  étant dans ce cas une constante.

Soulignons que, dans cette limite, le champ se comporte effectivement comme

$$\hat{\chi} \rightarrow \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} X_k e^{ik \cdot x} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{H}{\sqrt{2k^3}} (\hat{a}_k + \hat{a}_{-k}^\dagger) e^{ik \cdot x}$$

A ce stade, tous les modes étant proportionnels à  $(ak + a_{-k}^\dagger)$ , les opérateurs quantiques  $X_k$  commutent. Par conséquent,  $X$  a en fait les mêmes propriétés statistiques qu'un champ stochastique classique gaussien. En effet, aux échelles super-Hubble, l'opérateur quantique  $X$  peut être remplacé par un champ stochastique avec des statistiques gaussiennes. Introduction d'une variable aléatoire gaussienne unitaire,  $e_v(\mathbf{k})$ , qui satisfait

$$(e_v(\mathbf{k})) = 0, \quad (e_v(\mathbf{k})e_v(\mathbf{k}')) = J_v(\mathbf{k} - \mathbf{k}'),$$

les opérateurs de mode sont remplacés par des variables stochastiques via

$$V_k = V_k = v_k(n)e_v(\mathbf{k})$$

et on peut passer de la moyenne quantique du vide  $\langle 0|\dots|0\rangle$  à la moyenne d'ensemble classique

Ceci explique pourquoi les modes super-Hubble ont des statistiques gaussiennes. Une description de la transition quantique vers classique peut être trouvée dans la réf. [16].

---

<sup>9</sup>Notons que les états quantiques n'ont une interprétation physique claire qu'une fois  $V_k$  choisi. La condition de normalisation (8.94) ne fixe pas complètement  $V_k$  et toute fonction de la forme  $U_k = a_k V_k + \theta_k V_k$ , avec  $a_k$  et  $\theta_k$  deux nombres complexes satisfaisant  $|\sum_k a_k|^2 - |\sum_k \theta_k|^2 = 1$  sera aussi une solution

### 8.3.1.5 Power spectrum

The correlation function of  $v$  is defined as

$$\xi = \langle 0 | V(\mathbf{x}, n) V(\mathbf{x}', n) | 0 \rangle,$$

and takes the simple form

$$\xi_V = \int \frac{d\mathbf{k}}{w^{|\mathbf{k}|^2}} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')} = \int \frac{dk k^3}{2\pi^2 |\mathbf{k}|^2} \sin kr \quad (8.98)$$

where the isotropy of the background space-time has been used to integrate over angles. Because of the symmetries of the background, it is a function of  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$  only. We thus define the power spectra of  $v$ , using the definitions of Section B.5 in Appendix B for the normalization of the power spectrum,

$$P_v(\mathbf{k}) = |\xi_V|, \quad P_v(k) = 2\pi^2 |\xi_V| \quad (8.99)$$

In the stochastic picture, the correlator of  $v_k$  is simply given by

$$\langle V_{\mathbf{k}} V_{\mathbf{k}'}^* \rangle = P_v(k) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (8.100)$$

from which one easily deduces that the power spectrum of  $x$  is

$$P_x(k) = \frac{2\pi^2}{a^4} P_v(k) = \frac{|\dot{v}_k|^2}{a^4}$$

It is thus a scale invariant power spectrum,

$$P_{\langle\langle k \rangle\rangle} = (f)^2 \quad (8.101)$$

### 8.3.1.6 WKB approximation

In more general cases, where e.g. the function  $a(n)$  is not known analytically, we may not have exact solutions for the mode functions. One can generalize the previous construction by relying on a WKB approach in which one introduces the WKB mode functions

$$v_{\mathbf{k}} W_{\mathbf{k}}(n) = \frac{1}{\sqrt{2w(\mathbf{k}, n)}} e^{\pm i k n}, \quad (8.102)$$

which, as is easily checked, are solutions of

$$W_{\mathbf{k}}'' + [w(\mathbf{k}, n) - Q_{\text{WKB}}] W_{\mathbf{k}} = 0,$$

where the potential is

$$Q_{\text{WKB}} = K \frac{1}{2} \frac{w''}{w} \quad (8.103)$$

La solution WKB est donc une bonne approximation tant que la condition WKB

$$Q_{\text{WKB}} = \frac{1}{V} \int d^3x \sqrt{V} \left( \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} \nabla^2 \phi^2 - V(\phi) \right) \quad (8.104)$$

tient. Pour une fonction satisfaisant une équation telle que (8.90),

$$w(k, n) = k^2 \frac{1}{n^2},$$

la condition WKB se réduit à  $|k| \gg 1$ , de sorte qu'aux échelles sub-Hubble, le mode la fonction est en fait proche de son approximation WKB.

On pourrait ainsi réinterpréter la procédure de quantification en constatant qu'il existe une solution adiabatique (WKB) aux échelles inférieures à Hubble.

### 8.3.1.7 Interprétation et divergences infrarouges

L'expression (8.96) peut être utilisée pour exprimer la variance du champ,  $\langle \phi^2 \rangle$ , en fonction

$$\langle \phi^2 \rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left( \frac{1}{2} + \frac{H^2}{2p^2} \right) \quad (8.105)$$

de l'impulsion physique,  $\mathbf{p} = a(t) \mathbf{k}$ ,

Le premier terme est simplement l'énergie du point zéro d'un oscillateur harmonique dans l'espace-temps de Minkowski (chapitre 2). Ce terme conduit à une divergence ultraviolette qui peut être éliminée par renormalisation. Le deuxième terme n'apparaît que dans un espace-temps courbe et est caractéristique de l'espace-temps de de Sitter. Cela peut être interprété comme l'existence de

$$n_p = \frac{H^2}{2p^2} \quad (8.106)$$

particules d'impulsion physique  $p$ . Ce terme diverge dans l'infra-rouge. Il existe en fait deux divergences, la première lorsque  $p \rightarrow 0$  et la seconde lorsque  $n \rightarrow 0$ .

La divergence infrarouge à  $p = 0$  apparaît parce que l'expansion du champ dans les modes de création et d'annihilation n'inclut pas le mode zéro. Pour un champ sans masse dans l'espace de Minkowski dans une boîte de volume  $V$ , une description complète des solutions nécessite l'introduction des opérateurs de position et de quantité de mouvement,  $\hat{p}_0$  et  $\hat{n}_0$ , qui satisfont la relation  $[\hat{p}_0, \hat{n}_0] = i$ . On peut alors définir le vide en imposant  $\hat{n}_0 |0\rangle = 0$  et  $\hat{p}_0 |0\rangle = 0$ , ce qui revient à décrire l'état dans un espace qui est le produit d'un espace de Fock et d'un espace de Hilbert. Dans un espace de Minkowski de dimension supérieure à 2, la limite du continuum ( $V \rightarrow \infty$ ) existe car le facteur de volume de l'espace des phases compense la divergence. Cependant, il persiste dans un espace-temps de De Sitter.

Si cette divergence est régularisée en imposant une coupure de fréquence  $p > p_0 \sim H$  alors

$$\langle \phi^2 \rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left( \frac{1}{2} + \frac{H^2}{2k^2} \right) \quad (8.107)$$

Ce résultat est général et la résolution de la divergence infrarouge à  $k = 0$  ne résout pas ce deuxième problème. L'origine physique de cette divergence se trouve dans l'éternelle expansion qui amène les modes vers  $p = 0$  de façon exponentielle.

Cependant, ces divergences n'apparaissent que pour les particules sans masse dans un



#### **482** *Inflation*

espace de de Sitter qui caractérise une phase d'inflation éternelle et disparaissent naturellement dans les espaces-temps quasi-de Sitter.

### 8.3.1.8 Principales conclusions

Nous concluons que pendant une phase inflationniste de De Sitter, un champ scalaire test développe des fluctuations super-Hubble avec un spectre de puissance invariant à l'échelle et des statistiques gaussiennes. Ils résultent de l'amplification paramétrique de la fluctuation inéluctable du champ scalaire dans le vide aux échelles inférieures à Hubble. Leur amplitude est dictée par  $H$ , c'est-à-dire généralement par l'échelle d'énergie,  $2H^2 M_P^2 / 8\pi$ , lors du gonflage.

Comme nous le verrons, la plupart de ces conclusions se généralisent à des cas plus sophistiqués, et en particulier à l'inflation.

### 8.3.2 Champ d'essai massif à De Sitter

On peut étendre le cas précédent à celui d'un champ test de masse  $m$ . L'équation (8.89) prend alors la forme

$$v_k + \zeta k^{2+m} v_k = 0 \quad (8.108)$$

lorsqu'on considère un potentiel  $m^2 \phi^2/2$ . Il peut être réécrit comme

$$v'' + \left( \frac{2}{x} + \frac{m^2}{H^2} \right) v = 0, \quad x = \frac{2}{H} \ln \frac{a}{a_0} \quad (8.109)$$

is real, the general solution is a generalization of (8.91) and is

$$v_k(x) = A k^{-1/2} H_{\nu}^{(1)}(kx) + B k^{-1/2} H_{\nu}^{(2)}(kx) \quad (8.110)$$

où  $H_{\nu}^{(1)}$  et  $H_{\nu}^{(2)}$  sont des fonctions de Hankel respectivement de première et deuxième espèces (voir Annexe B). La forme asymptotique des fonctions de Hankel permet de déduire que la solution qui satisfait la condition initiale (8.95) lorsque  $kn \rightarrow 0$  est

$$v_k(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{2}{\pi} \right)^{1/2} H_{\nu}^{(1)}(kx) \quad \text{for } kx \rightarrow 0 \quad (8.111)$$

Aux échelles de Super-Hubble, le champ se fige à une amplitude constante,

$$|v_k| \quad (kn \gg 1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \frac{2G}{r(3/2)} \left( \frac{k}{H} \right)^{1/2} V_{OH} \quad (8.112)$$

et a un spectre de puissance

$$P_v(k) = 2 \times 10^{-9} \frac{I(v_s)^2}{r(3/2)} \left( \frac{H}{V_{OH}} \right)^2 \quad (8.113)$$

en utilisant les définitions de la section B.5 de l'annexe B pour la normalisation du spectre de puissance.

Si le champ a une masse supérieure à  $3H/2$  alors  $\nu_p < 0$ . La solution peut être obtenue en échangeant  $\nu_s$  avec  $|\nu_s|$  dans (8.111). La solution sub-Hubble n'est pas affectée et le

les conditions initiales sont donc identiques. Néanmoins, la fonction de mode dans la limite de Super-Hubble oscille également. Après un peu d'algèbre, nous constatons que le spectre de puissance est maintenant donné par

$$P_X(k) \propto H^2 m^{-2} k^{-3} \quad (8.114)$$

L'amplitude du spectre est ainsi réduite d'un facteur  $H/m \propto k^{-3/2}$  et le spectre diminue rapidement pour les grandes longueurs d'onde.

Ce résultat est l'une des prédictions génériques de l'inflation, pratiquement indépendante du modèle utilisé.

Pendant le gonflement, tout champ de test de *lumière*,  $m < H$ , développe des fluctuations super-Hubble d'amplitude caractéristique  $H/2m$ , avec un spectre de puissance presque invariant à l'échelle.

### 8.3.3 Champ d'essai massif lors d'un gonflement lent

Dans les deux exemples précédents, l'inflation a été décrite comme une phase de De Sitter pure afin que  $H$  soit constant. Bien entendu, il ne s'agit que d'une approximation et, dans un modèle plus réaliste,  $H$  diminue lentement au cours du gonflement.

Cette dépendance temporelle aura une influence sur le spectre de tout champ lumineux. Pour un champ scalaire sans masse, l'expression (8.101) signifie que le spectre des modes super-Hubble est donné par la valeur de  $H$  au moment où le mode devient super-Hubble,  $P_X(k) \propto H^2$ . Dans un espace-temps de De Sitter,  $H$  est constant tel que  $H_k$  ne dépend pas de  $k$  et donc le spectre de puissance est invariant à l'échelle. La relation (8.57) indique que dans le régime de roulement lent,  $H_k \propto k^{-1}$ , de sorte que nous nous attendons à ce que le spectre d'un champ scalaire de test sans masse se comporte comme  $P_X \propto k^{-1}$ . Son spectre sera donc *incliné vers le rouge* (puisque  $\epsilon > 0$ ) si l'inflation se réalise dans le régime lent.

#### 8.3.3.1 Evolution du facteur d'échelle

L'expansion de l'Univers est désormais quasi-de Sitter. En intégrant par parties, l'heure conforme est donnée par

$$\frac{da}{\dot{a}H} = \frac{\epsilon}{\dot{a}H} da. \quad (8.115)$$

En supposant  $\epsilon$  *constant*, nous constatons que le facteur d'échelle évolue avec

$$a(n) = - \frac{1}{Hn} \frac{1}{1 - \epsilon} \quad (8.116)$$

D'après (8.46), cette hypothèse revient à négliger tous les termes d'ordre 2 dans les paramètres de roulement lent puisque  $\epsilon = O(\epsilon, \dot{\epsilon})$ . Cette approximation lente *du premier ordre revient donc à ne considérer que les deux paramètres  $\epsilon$  et  $\dot{\epsilon}$*  et à les supposer constants.

### 8.3.3.2 Solution de l'équation de Klein-Gordon

Pour résoudre (8.108), il faut d'abord évaluer

$$a'' = a \cdot \frac{2}{a} \left( \frac{H}{1+a} \right) = a \cdot (W + H) = a^2 H^2 (2 - \epsilon) = \frac{2 - \epsilon}{(1 - \epsilon)^2} \quad (8.117)$$

On en déduit que, au premier ordre dans  $\epsilon$ ,

$$a'' \sim 2 + 3\epsilon \quad \text{et} \quad (8.118)$$

L'équation de Klein-Gordon prend donc la forme (8.109) avec

$$(8.119)$$

Pour un champ lumineux, le spectre de puissance prend alors la forme (8.113), qui correspond à un indice spectral

$$\frac{d \ln P_{\chi}}{d \ln k} = 3 - \frac{2}{3H} \sim 2 - \epsilon \quad (8.120)$$

### 8.3.3.3 Conclusion

On récupère le résultat attendu. Le spectre peut être *incliné vers le bleu* ( $n_s > 1$ ), *incliné en rouge* ( $n_s < 1$ ) ou invariant d'échelle. Il y a alors respectivement plus de puissance dans l'ultraviolet (petites longueurs d'onde) ou dans l'infrarouge (grandes longueurs d'onde). L'indice spectral reçoit une contribution de la masse du champ de test et du paramètre  $\epsilon$  qui caractérise la dépendance  $k$  de  $H$ .

Pour un champ scalaire sans masse, le spectre est toujours incliné vers le rouge, indépendamment des détails du modèle d'inflation. À titre d'exemple, considérons un modèle d'inflation chaotique avec une masse d'inflation  $m_\phi$ . L'indice spectral est alors

$$n_s - 1 = 3H^2 \left( \frac{m_\phi}{M_{\text{Pl}}^2} - \epsilon \right) \quad \bullet$$

La nature du spectre dépend alors des masses relatives des deux champs.

## 8.4 Fluctuations quantiques de l'inflation

La section précédente a ouvert la voie à l'étude des fluctuations primordiales générées par l'inflation. Puisque ce champ domine la dynamique de l'Univers, nous ne pouvons pas négliger les fluctuations de la géométrie et devons suivre les équations de perturbation relativistes invariantes de jauge.

### 8.4.1 Aperçu des questions à aborder et des résultats attendus

Pour commencer, toute fluctuation du champ scalaire va générer des perturbations métriques. Nous devrions d'abord étudier le système couplé gonflement-gravité pour comprendre comment les perturbations évoluent, principalement après qu'elles soient devenues super-Hubble. On part de 10 perturbations de la métrique et 1 pour le champ scalaire, auxquelles il faut soustraire 4 libertés de jauge et 4 équations de contraintes (2 scalaires et 2 vectorielles). Nous espérons ainsi identifier 3 degrés de liberté indépendants pour décrire la dynamique complète.

La deuxième question à aborder est celle des conditions initiales et de la quantification. Dans les exemples précédents, nous avons décidé de quantifier le champ  $v = ax$ , sans aucune justification. En fait, comme le suggère (8.89), l'équation de Klein-Gordon pour le champ  $v$  est celle d'un oscillateur harmonique de masse variable  $m^2 = -a''/a$ . On peut conjecturer que c'est la variable canonique à quantifier, qui sera Il faudra identifier les variables canoniques à quantifier lorsque la gravité est prise en compte.

Avant de commencer, notons que si les perturbations métriques sont négligées et si  $H$  est négligé par rapport à  $H^2$ , l'équation de Klein-Gordon pour les perturbations de l'inflation du super-Hubble est identique à la dérivée temporelle de l'équation de fond de Klein-Gordon - (8.26)

$$\ddot{\chi} + 3H\dot{\chi} + v''\chi = 0. \quad (8.121)$$

Qualitativement, on en déduit que  $\delta\chi = -\chi_0 \delta t$ , où est la solution homogène, ce qui implique que  $\chi(\mathbf{x}, t) \sim \chi_0 [t - \delta t(\mathbf{x})]$ . En raison des perturbations à grande longueur d'onde, le nombre de plis électroniques entre les différentes zones de super-Hubble sera modulé. Cela donnera lieu à son tour à des fluctuations métriques de l'ordre de  $H\delta t(\mathbf{x})$ . Nous en déduisons que  $\delta t \sim \delta\chi/\dot{\chi} \sim H/2n\chi$  de sorte que les perturbations métriques sont approximativement de l'ordre de  $H^2/2n\chi$ . Les perturbations sont donc dues au fait que l'inflation atteint le fond de son potentiel à différents moments et en différents points de l'Univers. Les surfaces d'isodensité ou isochamp ne sont alors pas des hypersurfaces à temps constant.

Nous montrerons que l'inflaton donne également naissance à des ondes gravitationnelles primordiales. Les amplitudes typiques des perturbations de densité et des ondes de gravité sont de l'ordre

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \sim \frac{H^2}{V} \sim \frac{H^2}{V_{\text{camping-car}}} \sim \frac{h}{2} \frac{1}{nM^2}$$

Les spectres primordiaux contiennent ainsi des informations sur la dynamique et l'échelle énergétique de l'inflation. Soulignons d'emblée que la limite de de Sitter ( $\dot{\chi} = 0$ ) est singulière.

### 8.4.2 Quantités perturbées

#### 8.4.2.1 Tenseur énergie-contrainte

La perturbation du tenseur énergie-contrainte (8.21) d'un champ scalaire est

$$\begin{aligned} \delta T_{\text{M}}^{\text{V}} = 2d \left( \text{vôch} - (g^{ab} B_a \zeta B_p \zeta + V^{\wedge} \delta g^{\wedge} \right. \\ \left. - g^{\wedge \zeta} 2 \delta g^{ap} B_a \zeta B_g \zeta + g^{ap} B_a \delta \zeta B_p \zeta + V' \delta^{\wedge} \right). \end{aligned} \quad (8.122)$$

En utilisant la décomposition SVT de la métrique (5.52), ses composantes prennent la forme

$$\begin{aligned}
ST_{QQ} &= p' Sp' + 2a' \nabla A + \frac{un' Sp}{dp}, \\
ST_{\alpha i} &= D_{je} (p' Sp) + B^{\wedge} 2p' - Ba' v), \\
ST_{ij} &= p' Sp' + (C - A) p'^2 - 2 un' VC - \frac{un'^2 Sp_{j12}}{dp} \\
&\quad + p'^2 - 2a' v) (D [D_j E + D^{\wedge} E_j] + E_j). \quad (8.123)
\end{aligned}$$

Il est généralement plus efficace d'utiliser les composantes mixtes pour obtenir les équations,

$$\begin{aligned}
un'^2 ST_0 &= -p' Sp' - \frac{un' Sp}{dp} + Ap \\
a'^2 ST_0 &= -D_i (p' Sp), \\
un'^2 ST_{je} &= D^{je} (p' Sp + Bp'^2) + Bp'^2, \\
a'^2 ST_{ij} &= fp' Sp' - p' A - a'^2 Sp^{\wedge} S_j. \quad (8.124)
\end{aligned}$$

#### 8.4.2.2 Variables invariantes de jauge

Une seule grandeur semble décrire les perturbations de la matière, à savoir la perturbation du champ scalaire lui-même. Comme toute grandeur scalaire, sous un changement de coordonnées de la forme (5.57), elle se transforme [voir (5.80)], au premier ordre, comme

$$Sp \rightarrow Sp + \mathbf{p}' \mathbf{T}. \quad (8.125)$$

On peut donc introduire les deux variables invariantes de jauge suivantes

$$X = Sp + p' (B - E'), \quad (8.126)$$

$$Q = \frac{SP}{p'h} \quad (8.127)$$

en utilisant (5.63). Ces deux quantités sont liées par

$$\alpha = X + p' \quad (8.128)$$

La variable  $X$ , également fréquemment écrite sous la forme  $Sp_{\text{new}}$ , est la perturbation du champ scalaire dans la jauge newtonienne, tandis que  $Q$ , souvent appelée variable de Mukhanov-Sasaki, est celle dans la jauge à tranche plate.

### 8.4.3 Équations de perturbation

#### 8.4.3.1 Equations dans la décomposition SVT

##### Modes scalaires

En suivant la même approche que pour un fluide parfait (Chapitre 5), on obtient les trois équations suivantes respectivement pour les composantes  $(00)$ ,  $(0i)$  et la trace de  $(ij)$ ,

$$\begin{aligned} (A + 3K) \dot{T} - 3H (T + H^*) &= K \dot{\phi}^2 + a^2 \delta\rho, & (8.129) \\ T + H^* &= K \delta\phi, & (8.130) \\ T'' + 2H \dot{T}' - K(T + H^*)' + (2H' + H^2)^* + A(\dot{\phi}^2 - T) &= \\ &= K(\nabla^2 \phi^2 - \nabla^2 \phi^2) & (8.131) \end{aligned}$$

L'équation perturbée de Klein-Gordon prend alors la forme

$$X'' + 2H \dot{X}' - A \dot{X} + a^2 \square X = 2(-H'' + 2H^2)^* + K(\dot{\phi}^2 + 3T'). \quad (8.132)$$

Seules deux des quatre équations (8.129)-(8.132) sont indépendantes. L'équation de Klein-Gordon en termes de variable  $Q$  prend la forme

$$Q'' + 2H \dot{Q}' - A \dot{Q} + a^2 \square Q = -(\dot{X}' - ATJ), \quad (8.133)$$

où l'on rappelle que  $X = \dot{\phi}^2 + T + (T/H)$  [voir (5.67)]. En fait, en utilisant les équations d'Einstein, comme nous le verrons plus tard, cette équation peut s'écrire sous une forme fermée pour  $Q$ .

De plus, (8.124) implique que  $ST_j \propto J_j$ , ce qui implique directement que les deux potentiels de Bardeen doivent être égaux,

$$\phi^2 = T. \quad (8.134)$$

Insistons sur une des propriétés de ces équations dans le cas d'une phase de De Sitter où l'Univers est dominé par une pure constante cosmologique. Dans ce cas  $\Lambda = 0$  et les équations d'Einstein impliquent que

$$\text{Phase de Sitter : } \dot{\phi}^2 = T = 0. \quad (8.135)$$

Cela ne veut pas dire que le champ scalaire ne fluctue pas mais seulement que ses fluctuations ne se couplent pas à la géométrie et ne génèrent aucune fluctuation métrique. Ceci explique pourquoi la limite de de Sitter est souvent singulière dans nos équations. Dans ce qui suit, nous supposons que  $\Lambda = 0$ .



**Modes vectoriels**

Puisqu'un champ scalaire ne contient aucune source vectorielle, il n'y a pas d'équations vectorielles associées à l'équation de Klein-Gordon et il n'y a qu'une seule équation d'Einstein pour ces modes.

$$\boxed{T' + 2HT_j = 0.} \quad (8.136)$$

Les modes vectoriels sont donc rapidement effacés puisque  $T_j \propto a^{-3}$ . En effet, la contrainte (5.113) se réduit, dans le cas d'un champ scalaire, à

$$(A + 2K)T_j = 0.$$

On peut conclure, indépendamment de tout modèle d'inflation, que *les modes vectoriels sont totalement absents en fin d'inflation*.

**Modes tenseurs**

Il n'existe qu'une seule équation tensorielle pouvant être obtenue à partir des équations d'Einstein

$$\boxed{E_j + 2HE'_{ij} - (A - 2K)E_{ij} = 0.} \quad (8.137)$$

L'étude générale de cette équation a été réalisée dans la section 5.3.1 du chapitre 5. Comme dans ce chapitre, nous pouvons étendre les ondes gravitationnelles dans leurs tenseurs de polarisation.

$$E_{ij}(\mathbf{k}, n) = \frac{1}{2} E_x(\mathbf{k}, n) \epsilon_{ij}(\mathbf{k}), \quad X \quad (8.138)$$

où  $A = +, x$  indique la polarisation. Ce tenseur symétrique satisfait

$$\epsilon_{ij}(\mathbf{k}) \delta^{ij} = 0, \quad \epsilon_{ij}(\mathbf{k}) = 0, \quad \epsilon_{ij}(\mathbf{k}) \epsilon_{kl}(\mathbf{k}) = \delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}, \quad \epsilon_{ij}(-\mathbf{k}) = -\epsilon_{ij}(\mathbf{k}). \quad (8.139)$$

La dernière condition n'est pas obligatoire mais garantit que  $E_x(\mathbf{k}, n) = E_x(-\mathbf{k}, n)$ .

**8.4.3.2 Autres formes d'équations scalaires**

Malgré l'apparente complexité des équations scalaires (8.129)-(8.132), en utilisant l'équation d'évolution de  $y$ , elles peuvent être réduites à une équation du second ordre avec des coefficients dépendants du temps pour le potentiel gravitationnel  $T$ ,

$$T'' + 2[H - \frac{1}{2}(\frac{H'}{H})^2 - \frac{1}{2}K]T = 0. \quad (8.140)$$

Cette équation n'est valable que si  $y' = 0$  et ne peut donc pas être utilisée pour une phase de de Sitter stricte ou pendant la phase où le champ scalaire oscille au plus bas de son potentiel, comme lors du réchauffage.

L'équation (8.140) peut prendre une forme plus suggestive si nous introduisons les variables

$$u_s = \frac{2}{3} \frac{a^2 G}{\kappa_H} \left( \frac{P}{\rho} \right)^{1/2} \quad (8.141)$$

avec

$$G' f p \quad a(p+P) \quad f_1 \quad K p a^2) \quad = H \quad \frac{2}{2} (H-H' + K) \quad - - 1/2 \quad (8.142)$$

suivant ce qui a été fait précédemment pour un fluide parfait dans la section 5.3.2 du chapitre 5. Cela se réduit alors à l'équation

$$\frac{G''}{G} + \frac{3}{2} K(1 - c_1) u_s = 0, \quad (8.143)$$

with

$$\text{cs} = \frac{P'}{\rho'} \quad \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix} \quad (8.144)$$

Cette équation est identique à (5.147) obtenue pour un fluide. Notez que la définition de  $u_s$  est le même que celui de la Réf. [10] pour le cas d'un fluide mais diffère d'un facteur  $2/K$  pour un champ scalaire puisque  $u_s = (2/K) \text{ un } \$/p'$ . Nous préférons garder la même définition pour les deux types de matières.

Lorsque  $K = 0$ , cette équation peut être interprétée comme l'équation d'un oscillateur harmonique avec une fréquence  $\omega^2$  dépendant de  $\lambda = G''/G$ , ou comme équation de Schrödinger de potentiel  $U = G''/G$ . Ce potentiel contient des dérivées du facteur d'échelle jusqu'au quatrième ordre.

#### 8.4.4 Evolution des modes de grandes longueurs d'onde

Nous limitons notre analyse à un Univers avec des sections spatiales euclidiennes,  $K = 0$ , dans la suite de cette section.

#### 8.4.4.1 Solution intégrale

Pour les modes de longueur d'onde longue,  $u_s = G$  est une solution évidente de (8.143), dont les solutions sont données par la forme intégrale

$$\text{nous}(\mathbf{k}, \mathbf{n}) = G(\mathbf{n}) \quad (8.145)$$

où  $A(\mathbf{k})$  et  $B(\mathbf{k})$  sont deux fonctions d'intégration. Il peut être réécrit comme

$$n_{\text{ous}}(\mathbf{k}, n) = \frac{1}{P[aJ]} \text{Je r\'e pa}^2(n), \quad (8.146)$$

où la deuxième constante d'intégration a été absorbée dans les limites intégrales. Cette équation nous permet de conclure que

$$\mathcal{S}(\mathbf{M}) = -C(\mathbf{k}) \int d^3x \int dt \left[ \frac{1}{2} \dot{\mathbf{M}}^2 - \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{M})^2 \right] \quad (8.147)$$

#### 8.4.4.2 Quantité conservée

Au chapitre 5, nous avons introduit la quantité  $Z$  définie par (5.149) comme

$$\dot{Z} = \dot{\$} - \frac{2 \$' + H\$}{3H(1+w)}.$$

$Z$  représente la perturbation de courbure dans la jauge comobile. L'équation (8.140) est strictement analogue à (5.143) de sorte que  $Z$  satisfait l'équation générale de conservation (5.150). On peut vérifier que, pendant la période d'inflation (en supposant  $K = 0$ ), cette équation prend la forme simplifiée

$$[H(1+w)] Z' = \$'' + 2(H - \dot{H})\$ + 2[H' - H^2]\$. \quad (8.148)$$

L'équation (8.140) implique donc que

$$Z' = \frac{2}{3H(1+w)} \left( \frac{\dot{\$}}{\$} - \frac{2}{3} \right) \quad (8.149)$$

#### 8.4.4.3 Perturbation de courbure

La perturbation de la courbure des hypersurfaces à densité constante dans une jauge à tranches plates (5.153),

$$Z_{\text{BST}} = \frac{C + \frac{1}{3}p}{\frac{1}{3}p + p},$$

est également une quantité invariante de jauge qui est également conservée au cours de l'évolution. Comme cela a été montré précédemment [voir (5.156)], cette quantité est liée à  $Z$  par la relation

$$Z = \frac{1}{3} \frac{\text{AUD}}{H H'} \quad (8.150)$$

de sorte que pour les modes super-Hubble,  $Z = Z_{\text{BST}}$ .

Dans la littérature, il est courant de trouver la quantité

$$R = C - H \frac{Q}{p'p'} = -\frac{H}{p'p'} Q. \quad (8.151)$$

Il s'agit de la perturbation de courbure sur un découpage comobile de sorte que  $R$  représente le potentiel gravitationnel sur les hypersurfaces à  $p$  constant. L'équation (8.130) peut être utilisée pour établir que

$$R = -Z \quad \text{si } kp \ll 1. \quad (8.152)$$

#### 8.4.4.4 Fin de l'inflation

Puisque  $Z$  est constant, on peut relier la valeur du potentiel gravitationnel sur les échelles de Super-Hubble pendant l'inflation à sa valeur pendant l'ère des radiations, sans se soucier des détails de la transition entre les deux époques. De (5.158), on conclut que

$$\frac{2}{3} \frac{1}{1 + \frac{1}{3} \frac{\$}{\text{RDu}}} (kn \ll 1) = \frac{2}{3} \frac{1}{1 + \frac{1}{3} \frac{\$}{\text{inf}}} (kn \ll 1). \quad (8.153)$$

$R$  et  $Z_{\text{BST}}$  sont constants pendant la transition et le changement soudain de l'équation d'état

amplifie le potentiel gravitationnel.

Dans ce qui suit, il sera plus pratique de caractériser les perturbations scalaires à l'aide d'une de ces quantités conservées car elles ne sont pas affectées par le changement de l'équation d'état, contrairement au potentiel gravitationnel.  $Z$  est une grandeur purement géométrique qui caractérise les perturbations de densité indépendamment de la nature exacte de la matière et qui permet de propager le spectre des perturbations des modes observables depuis l'inflation jusqu'à l'époque où l'on souhaite commencer les calculs cosmologiques. Il permet notamment d'éviter les détails de la description de la phase de réchauffage.

#### 8.4.5 Conditions de jonction et leurs applications

En supposant que la transition entre la phase inflationniste et l'ère des radiations soit instantanée, on peut récupérer les résultats précédents à partir des conditions de jonction.

##### 8.4.5.1 Conditions de jonction

Commençons par déterminer les conditions de jonction qui doivent être satisfaites lorsque deux espaces-temps sont « collés » le long d'une hypersurface  $S$ . L'immersion spatio-temporelle de cette hypersurface dans l'espace-temps (à quatre dimensions) est définie par

$$x^\mu = x^\mu(\eta, \theta^a), \quad (8.154)$$

où  $\eta$  et  $\theta^a$  sont les coordonnées intrinsèques et  $x^\mu$  les fonctions décrivant l'intégration. La métrique induite sur l'hypersurface est alors

$$g_{ab} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \theta^a} \frac{\partial x^\nu}{\partial \theta^b} g_{\mu\nu} \quad (8.155)$$

Cette métrique peut être vue comme un tenseur défini dans l'espace-temps

$$g_{ab} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \theta^a} \frac{\partial x^\nu}{\partial \theta^b} g_{\mu\nu} \quad (8.156)$$

appelée la *forme fondamentale*. Le tenseur de Ricci,  $R_{ab}$ , de la métrique induite permet

$$R_{ab} = R_{ab}(\eta, \theta^a) \quad (8.157)$$

Le tenseur  $Y_{\mu\nu}$  agit comme un tenseur de projection, projetant les tenseurs en un point de  $S$  dans des tenseurs tangentiels et peut être utilisé pour définir l'opérateur de projection orthogonale par

$$Y_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu \quad (8.158)$$

Ces définitions ne dépendent en réalité pas de la codimension de  $S$ . Dans le cas d'une hypersurface (c'est-à-dire codimension 1), il existe une direction perpendiculaire unique telle que  $n^\mu n_\mu = 1$  et  $Y_{\mu\nu} n^\nu = 0$  et nous avons

$$Y_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu \quad (8.159)$$

On peut alors définir le tenseur *de courbure extrinsèque*

$$(8.160)$$

$$K_{\nu\nu} = \frac{7}{4} \frac{Y}{v} \frac{v}{a} \epsilon$$

Si le champ de vecteurs  $n^M$ , initialement défini uniquement sur  $S$ , est étendu géodésiquement au voisinage de l'hypersurface (avec  $n^a \nabla_a n_M = 0$ ) alors

$$= \nabla_{\mu} n^{\mu} \dots \quad (8.161)$$

On peut montrer [17] de manière générale, que deux espaces-temps peuvent être collés le long de  $S$  si

$$h_{\mu\nu}|_{\pm} = h_{\mu\nu}|_{\mp} \quad \text{et} \quad K_{\mu\nu}|_{\pm} = K_{\mu\nu}|_{\mp} \quad (8.162)$$

where  $A_+$  and  $A_-$  represent the values of  $A$  evaluated on each side of the hypersurface and  $[A]_{\pm} = A_+ - A_-$  is the jump of  $A$  across the hypersurface.

The first equation implies that the induced metric is the same whether it is defined from one side or the other of  $S$ . In the second expression, is the stress-energy tensor of matter fields localized on the hypersurface, including its tension when seen as a membrane. Extensions of the description of such codimension 1 membranes are detailed in Ref. [18] and the dynamics of a hypersurface will be described in Chapter 13 in the case of ‘brane’ cosmology.

#### 8.4.5.2 Application in the context of cosmology

For a cosmological transition,  $S$  is usually defined by

$$S = \{q = \text{const.}\}, \quad (8.163)$$

where  $q$  is a scalar function characterizing the hypersurface (i.e.  $q = p$  for a constant-density hypersurface, or  $q = p$  for a constant-field hypersurface, etc.) The unit vector normal to  $S$  is then given by

$$\frac{d_\mu q}{\sqrt{g^{\mu\nu} d_\mu q d_\nu q}} \quad (8.164)$$

and we assume that the two space-times have metrics

$$ds^2_{\pm} = a_{\pm}^2 (n_{\pm}^2 dt^2 + [(1 \pm 2T_{\pm}) \gamma_{ij} + h_{\pm ij}] dx^i dx^j).$$

The induced metric and the extrinsic curvature tensor are explicitly computed in Appendix C. We find

$$\gamma_{ab} = a_{\pm}^2 \gamma_{ab} \quad (8.165)$$

and

$$-H^a + H T + T^a + (H' - H^2) q^a = \frac{1}{2} h^a_b + \frac{1}{2} s^{ab} \dots \quad (8.166)$$

où  $5q$  est la perturbation de  $q$  dans la jauge newtonienne. Les conditions de jonction (8.162) prennent alors la forme [19,20]

$$\text{métrique de fond : } [a]_{\pm} = \begin{matrix} 0 \\ , \\ 0, \end{matrix} \quad [H]_{\pm} = \begin{matrix} 0 \\ , \\ 0, \end{matrix} \quad (8.167)$$

$$\text{modes scalaires : } [T]_{\pm} = 0, \quad \left| \begin{matrix} q \\ \pm \end{matrix} \right| = 0, \quad \left| \begin{matrix} T + HT + H' - \\ ai \end{matrix} \right| = 0, \quad (8.168)$$

$$\text{modes tensoriels : } [h]_{\pm} = \begin{matrix} [ \\ h \end{matrix} j]_{\pm} = 0, \quad (8.169)$$

La première condition de la métrique de fond nous indique que le facteur d'échelle et le taux d'expansion doivent être continus. Mais notons que l'équation d'état peut être discontinue, et donc  $H'$  également.

Pour appliquer ces conditions aux perturbations, il faut supposer que la transition est rapide par rapport au temps d'oscillation typique des modes considérés, ce qui revient à supposer que ces modes sont super-Hubble au moment de la transition. Notons également que même si ce résultat a été obtenu en supposant que  $K = 0$ , il est possible de le généraliser pour toute valeur de  $K$  [21].

#### 8.4.5.3 Fin de l'inflation

Appliquons ces conditions de jonction pour relier la fin de l'inflation à l'ère des radiations. La relation (8.167) permet de conclure que les facteurs d'échelle prennent alors la forme

$$a_{-}(n) = \frac{C}{(-n)^{1+\epsilon}}, \quad a_{+}(n) = \frac{C}{[(1+\epsilon)n^{*}]^{\epsilon}} \left( \frac{\eta_{+}}{\eta_{*}} \right)$$

si la transition se produit à  $n_{+} = n^{*} = -(1 - \epsilon)n_{-}$ .

En supposant que la transition se produit sur une hypersurface à densité constante,  $q = p$  et les conditions (8.168) impliquent que  $[C_{\text{BST}}]_{\pm} = 0$  et donc  $[Z + AT/3(H' - H)]_{\pm} = 0$ . En utilisant (5.117), nous déduisons que pour les modes super-Hubble,

$$\frac{3H(T' + HT)}{1 + w} = 0. \quad (8.170)$$

Notez que si la surface de transition avait été choisie comme hypersurface à champ constant, alors nous aurions conclu directement  $[R]_{\pm} = 0$ . Pour les modes super-Hubble, cela revient donc à supposer que la fin de l'inflation est une hypersurface à champ constant ou à densité constante.

Aux deux époques, le potentiel gravitationnel est donné par  $A_{+} + A_{-}(-n_{-})$  et  $T_{+} = A_{+} + B_{+}/n_{+}$ , respectivement. Les conditions de jonction impliquent que

$$A_{+} = 3^{-1} A_{-}, \quad B_{+} = 1^{-1-2} A_{+}, \quad (8.171)$$

une fois que le mode décroissant au cours de l'inflation a été négligé. Ainsi, on retrouve le résultat précédent :  $T_{+} \sim [2(1 + \epsilon) / 2 - \epsilon] T_{-}$ . Notons cependant que le mode de croissance hérite d'une contribution du potentiel gravitationnel lors de l'inflation ( $T_{-}$ ) et d'une contribution des perturbations de densité au moment de la transition  $[(2 - \epsilon) T_{-} / \epsilon]$ .



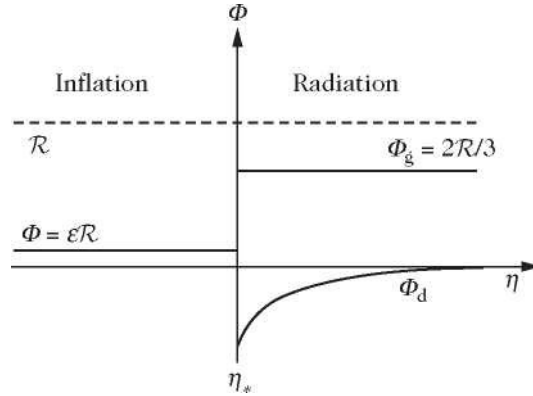


**Fig. 8.10** Junction between the inflationary phase and the post-inflationary radiation era for the super-Hubble modes.  $Z$  and  $R$  are constant during the transition so that the amplification of the gravitational mode is associated with the appearance of a decaying mode, that can then be neglected at late times.

La figure 8.10 illustre comment le mode croissant du potentiel gravitationnel peut être amplifié pendant l'inflation tout en gardant constante la perturbation de courbure, au prix de l'excitation du mode décroissant. Soulignons que dans la limite de De Sitter,  $\epsilon \rightarrow 0$  et donc  $\Phi \rightarrow 0$ . Dans ce cas, les perturbations de l'ère post-inflationniste proviennent entièrement des perturbations de la surface de transition.

#### 8.4.6 Quantification des perturbations de densité

La section précédente a détaillé l'évolution des perturbations mais n'a pas abordé le choix de l'état initial des champs. Pour suivre l'exemple du champ scalaire de test, il convient de déterminer quelles sont les variables à quantifier. Cet aspect est détaillé dans la Réf. [10] et nous rappelons seulement les principales étapes de la construction.

##### 8.4.6.1 Variable canonique

Pour déterminer les variables canoniques, introduisons d'abord la variable

$$v = aQ = -zR, \quad (8.172)$$

où  $Q$  et  $R$  sont la perturbation du champ scalaire dans la jauge à tranche plate et la perturbation de courbure dans la jauge comobile, et où  $z$  est défini par

$$z = \frac{ap}{H} = \frac{ap}{\dot{H}} \quad (8.173)$$

Les équations d'évolution des perturbations ont été obtenues par un principe variationnel de l'action d'Einstein-Hilbert et un champ scalaire minimalement couplé. Puisque ces équations sont linéaires, elles peuvent être obtenues à partir des mêmes actions étendues à

l'ordre quadratique. A partir des expressions (8.172) et (8.173), on peut montrer que l'action totale prend la forme

$$S^{(2')} = \frac{1}{2} \int d^4x \left[ \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right] \quad (8.174)$$

jusqu'aux termes impliquant une dérivée totale et qui ne contribuent pas aux équations du mouvement.

Ce calcul plutôt technique est effectué explicitement dans les refs. [10, 22] (voir aussi Réf. [84] pour une généralisation aux espaces-temps de Bianchi). Déduire les équations d'évolution au premier ordre équivaut strictement à faire varier l'action étendue au deuxième ordre, cependant, la deuxième approche nous donne plus d'informations sur la structure de la théorie. Cette action est celle d'un champ scalaire de masse dépendant du temps,  $m^2 = -z''/z$  dans un espace-temps de Minkowski. Il est intéressant de souligner que la variable naturelle n'est ni  $\eta$  ni  $Z$  mais  $\nu$ . Notons que si nous étions partis des équations d'évolution [voir par exemple (8.143)], nous aurions pu conclure à tort que  $u$  était la variable canonique. Cette équivalence implique que nous pouvons quantifier cette théorie comme nous quantifierions un champ scalaire évoluant dans un temps -champ extérieur dépendant [23], où ici la dépendance temporelle trouverait son origine dans la dynamique espace-temps [24]. Notons également la similitude avec le cas d'un champ scalaire de test dans un espace-temps en expansion, tel que considéré dans la section 8.3.

C'est donc le champ  $\nu$  qui devrait être promu au statut d'opérateur quantique en seconde quantification, (voir chapitre 2)

$$\nu(\mathbf{x}, n) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( a_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + a_{-\mathbf{k}}^\dagger e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right) \quad (8.175)$$

Dans ce qui suit nous travaillerons dans la représentation de Heisenberg, dans laquelle la dépendance temporelle est portée par les opérateurs.

La première étape pour effectuer une quantification canonique consiste à introduire l'impulsion conjuguée de  $\nu$ ,

$$\pi = \frac{\delta L}{\delta \dot{\nu}} = \dot{\nu} \quad (8.176)$$

qui est également promu au statut d'opérateur,  $T$ . On peut alors obtenir l'hamiltonien

$$H = \int d^3x \left[ \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla \nu)^2 + \frac{1}{2} m^2 \nu^2 \right] \quad (8.177)$$

Les opérateurs  $\nu$  et  $T$  doivent satisfaire des relations de commutation canoniques sur des hypersurfaces à temps constant

$$[\nu(\mathbf{x}, n), \nu(\mathbf{y}, n)] = [T(\mathbf{x}, n), T(\mathbf{y}, n)] = 0, \quad [\nu(\mathbf{x}, n), T(\mathbf{y}, n)] = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (8.178)$$

L'équation de mouvement pour  $\nu$  obtenue à partir du lagrangien (8.174) fournit l'équation de champ pour l'opérateur  $\nu$ , qui est similaire à l'équation de Klein-Gordon dans un espace-temps plat,

$$\square \nu + m^2 \nu = 0. \quad (8.179)$$

En effet, c'est aussi l'équation classique de Klein-Gordon qui peut être dérivée de (8.133) après avoir effectué le changement de variables (8.172) de  $Q$  à  $v$ . Cette équation est en fait équivalente aux équations de Heisenberg

$$v' = je \wedge H, v], \quad n' = je [HT, n], \quad (8.180)$$

où  $H$  est simplement l'hamiltonien (8.177) en termes de  $v$  et  $n$ .

Comme pour la quantification dans l'espace-temps de Minkowski (voir chapitre 2), les opérateurs de création et d'annihilation apparaissant dans la décomposition (8.175) satisfont aux règles de commutation standards

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_p] = [a_k, a_p] = 0, \quad [\hat{a}_k, \hat{a}_p] = J^0(\mathbf{k} - \mathbf{p}). \quad (8.181)$$

Ces règles de commutation ne sont cohérentes avec les règles de commutation (8.178) que si le champ  $v_k$  est normalisé selon

$$w(k) = v_k v'^*_{-k} - v'^*_k v_k = j^0, \quad (8.182)$$

depuis

$$\frac{1}{d^3k} \int d^3x e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \dot{v}_w(k).$$

Ceci détermine la normalisation de leur Wronskian,  $W$ .

Ensuite, il faut construire la représentation de Fock de l'espace de Hilbert sur lequel agissent les opérateurs  $v$  et  $n$ . Dans l'espace-temps de Minkowski, l'état de vide est défini de manière unique par la condition  $\hat{a}_k|0\rangle = 0$  pour tous  $\mathbf{k}$  et les autres états sont obtenus par action répétée de l'opérateur de création  $\hat{a}^\dagger$ . Cela revient à ne conserver que les modes à fréquence négative.

L'état de vide  $|0\rangle$  est donc défini par la condition que cet état soit annihilé par tous les opérateurs  $\hat{a}_k$ ,

$$\forall \mathbf{k}, \quad \hat{a}_k|0\rangle = 0. \quad (8.183)$$

Les modes sub-Hubble, c'est à dire les modes haute fréquence par rapport à l'expansion de l'Univers, doivent se comporter comme dans un espace-temps plat. La condition asymptotique à imposer pour un état dans le vide est donc

$$v_k(n) \sim \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{-ikn}, \quad kn \gg 1 \quad (8.184)$$

Notons que dans un espace-temps en expansion, la notion de temps est fixée par l'évolution de fond qui donne une direction privilégiée. La notion de fréquence positive et négative n'est pas invariante dans le temps, ce qui implique qu'au cours du temps d'évolution, une fréquence positive sera générée.

Notons que cette procédure de quantification revient à traiter la gravité de manière quantique à l'ordre linéaire puisque le potentiel gravitationnel est promu au statut d'opérateur.

#### 8.4.6.2 Création de particules

Si nous prenons un instant initial arbitraire  $n_i$  alors

$$v_k(n_{je}) = \frac{1}{\sqrt{M n_i}} e^{i k x} , \quad v'_k(n_{je}) = \frac{1}{\sqrt{M n_i}} e^{i k x} \quad (8.185)$$

définit les solutions de fréquence positive en  $n_i$ , en effet pour les modes oscillants. On peut ainsi définir un état de vide,  $|0_i\rangle$  en suivant la procédure précédente.

Plus tard  $n_i >$  les modes définis par (8.185) ne seront plus à fréquence positive et un observateur à  $n_i$  définira un autre état de vide  $|0_i\rangle$  satisfaisant  $C_k |0_i\rangle = 0$  pour tout  $k$ ,  $C_k$  étant les opérateurs d'annihilation pour les modes à fréquence positive en  $n_i$ .

Puisque l'équation des modes est linéaire, il est clair que les modes à fréquence positive en  $n_i$ ,  $w_k$  sont liés aux fonctions de mode  $v_k$  par une transformation linéaire

$$w_k = a_k v_k + b_k v_{-k}^*$$

avec les deux coefficients complexes satisfaisant  $|a_k|^2 - |b_k|^2 = 1$ . Le nombre de particules de mode  $k$  en  $n_i$  sera donc défini par  $N^{(i)} = C_k^\dagger C_k$ . Puisque les deux ensembles d'opérateurs de création et d'annihilation sont liés par

$$a_k = a_k^\dagger C_k + b_k^\dagger C_{-k}^\dagger$$

ce qui implique que  $C_k = a_k C_k - b_k^\dagger C_{-k}^\dagger$ , on en déduit que l'état  $|0_j\rangle$  est vu comme un état contenant  $(0_j | N_k^{(i)} | 0_j) =$  particules par l'observateur à  $n_i$ .

Ceci illustre la dépendance temporelle de la notion de fréquence positive et d'état de vide. Heureusement, l'ambiguïté de la définition du vide ne fait pas de différences importantes pour les modes de petites longueurs d'onde pour lesquels l'approximation WKB est valable. Ce mécanisme de création de particules quantiques est discuté en détail dans la section

10.2 du chapitre 10.

#### 8.4.6.3 Relation avec les variables de perturbation

Les définitions précédentes nous permettent de conclure que

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\delta\phi}{M_{\text{Pl}}} + i \frac{\delta\dot{\phi}}{M_{\text{Pl}} H} \right) \quad \text{et} \quad A_u = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\delta\phi}{M_{\text{Pl}}} - i \frac{\delta\dot{\phi}}{M_{\text{Pl}} H} \right) \quad (8.186)$$

Les équations d'Einstein impliquent que le potentiel gravitationnel est donné par

$$\ddot{A} = \frac{K c'^2}{2 M_{\text{Pl}}^2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} \left( \frac{\delta\phi}{M_{\text{Pl}}} \right)^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\delta\phi}{M_{\text{Pl}}} \right)^2 \quad (8.187)$$

et on a aussi la relation utile

$$2 H X = -p' v, \quad \text{une} \quad (8.188)$$

où  $X$  a été défini dans (5.67).

Suivre la même procédure que pour un champ scalaire de test considéré à la section 8.3 (8.172) implique que le spectre de puissance des perturbations métriques est

$$P_R = P_z = \frac{k^2 |v_k|^2}{2n^2 |z|^2}, \quad (8.189)$$

en utilisant les définitions de la section B.5 de l'annexe B pour la normalisation du spectre de puissance.

La solution de (8.179) avec les conditions initiales (8.184) permet de déterminer le potentiel gravitationnel et le spectre de puissance de  $R$  et  $Z$ . L'analyse de la section 8.4.5 permet ensuite de déterminer la perturbation de courbure et le potentiel gravitationnel au début de la phase post-inflationniste.

### 8.4.7 Ondes gravitationnelles

#### 8.4.7.1 Quantification

La même procédure peut être suivie pour les ondes gravitationnelles. En se limitant aux degrés de liberté tensoriels, l'action au second ordre dans les perturbations prend la forme

$$S^{(2)} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \left[ -\frac{1}{2} \partial_i h_{jk} \partial^i h^{jk} - 2K(h_{jk})^2 \right] \sqrt{-g} d^4x. \quad (8.190)$$

Sans surprise, la variation de cette action donne l'équation de propagation (8.137). En utilisant la décomposition (8.138), et en définissant

$$M_{A,M}^{(3)} M^2_{a(n) \in \overline{A}(k,n)} = \frac{[M]_{32n}^{(n)h_A(k,n)}}{32n} \quad (8.191)$$

l'action au second ordre prend la forme

$$S^{(2)} = 2 \int d^4x \left[ -\frac{1}{2} \partial_i h_{jk} \partial^i h^{jk} - 2K(h_{jk})^2 + \frac{1}{2} M_{A,M}^{(3)} h_{jk} h^{jk} \right] \sqrt{-g} d^4x. \quad (8.192)$$

Sous cette forme, l'action des ondes gravitationnelles se réduit à l'action de deux champs scalaires indépendants,  $M_A$ , de masse dépendant du temps  $m^2 = -a''/a$  évoluant dans un espace-temps statique. On peut donc procéder comme pour les perturbations scalaires et quantifier ces deux degrés de liberté. Dans la représentation de Heisenberg, nous promouvons  $M_A$  au statut d'opérateur quantique

$$M_A(x,n) = y \left( \frac{1}{2} \partial_i h_{jk} \partial^i h^{jk} + M_{k,A}^{(n)} h_{jk} \right) \sqrt{-g} d^4x \quad (8.193)$$

Si les modes  $M_{fc,A}$  satisfont la normalisation (8.182), alors les opérateurs de création et d'annihilation satisfont les relations de commutation

$$[M_{k,A}, M_{p,A}] = 0, \quad [M_{k,A}, M_{p,A}^\dagger] = \delta_{k,p} \quad (8.194)$$

et pour chaque polarisation, le vide est défini par

$$\forall \mathbf{k}, \quad \hat{a}_{\mathbf{k},\alpha}|0\rangle = 0, \quad (8.195)$$

et nous fixons les conditions initiales de la même manière que pour les perturbations scalaires en imposant

$$f_{\mathbf{k},\alpha}(n) = \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{ikn}, \quad kn \rightarrow -\infty. \quad (8.196)$$

L'équation d'évolution de  $p_{\mathbf{k},\alpha}$ , que nous écrirons simplement sous la forme  $p_{\mathbf{k}}$  lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, est-ce

$$P_{\mathbf{k}+\mathbf{k}',+2K} - P_{\mathbf{k}} = 0. \quad (8.197)$$

Comme précédemment, cette équation peut être résolue en utilisant l'approximation WKB (8.102) avec

$$(k, n) = \omega + 2K - \text{un } \text{un}$$

#### 8.4.7.2 Spectre de puissance

Le spectre de puissance des ondes gravitationnelles est obtenu en résolvant l'équation d'évolution (8.197) avec les conditions initiales (8.184). Cela nous permet de définir l'amplitude des modes tenseurs du super-Hubble, qui reste constante.

Le spectre de puissance,  $P_T$ , des modes tensoriels est défini à partir de la variable  $h_{\alpha\beta}$  et est lié au spectre de puissance  $P_E$  d'une polarisation  $E_A$  par

$$8P$$

où le facteur 8 résulte de la somme des polarisations. Du fait de l'isotropie, les deux polarisations ont le même spectre  $P_E$  défini par

$$\langle E_A(\mathbf{k}, n) E_A(\mathbf{k}', n') \rangle = \frac{2}{k} P_T(k) J_0(k - k') \delta_{\alpha\alpha'}, \quad (8.198)$$

avec

$$k \rightarrow 8n \text{ je } p_{\mathbf{k}} \text{ je } 2n \quad (8.199)$$

$$M p_{\mathbf{k}} \text{ je } a \text{ je }'$$

pour chaque polarisation. Ainsi, nous concluons que

$$k \rightarrow 64n \text{ je } p_{\mathbf{k}} \text{ je } 2n \quad (8.200)$$

$$2n \rightarrow M p_{\mathbf{k}} \text{ je } a \text{ je }'$$

où chaque polarisation  $A$  contribue de manière identique.

### 8.4.7.3 Densité des ondes gravitationnelles

La variation de l'action (8.190) par rapport à la métrique permet de définir le tenseur

$$fV = \frac{1}{16\pi G_N}$$

contrainte-énergie pour les ondes gravitationnelles

$$E_x = g^{\mu\nu} \partial_\mu E^\nu \partial_\nu E_x \quad (8.201)$$

L'amplitude des ondes gravitationnelles à tout moment après la phase inflationniste peut être décomposée as

$$E_x(k, n) = T(k, n) E_x(k, m) \quad (8.202)$$

où  $T(k, n)$  est une fonction de transfert obtenue par résolution de (5.109). La densité des ondes gravitationnelles peut alors être définie comme  $p_{\text{ow}} = \langle \dot{h}^2 \rangle / (4\pi G_N)$ . Dès que le mode devient sub-Hubble, il oscille et on peut faire la moyenne de la puissance sur quelques périodes pour en extraire son amplitude. Cette procédure est bien définie tant que l'amplitude varie lentement par rapport à la période de l'onde. En pratique, cela revient à remplacer  $T(k, n)$  par  $\bar{T}(k, n)$ , qui est la valeur moyenne de  $T$  sur quelques périodes. On obtient alors la densité

$$\frac{dp_{\text{ow}}}{d \ln k} = \frac{1}{8\pi G_N}$$

énergétique par décade

$$P_T(k) T(k, n), \quad (8.203)$$

ou de manière équivalente en termes de paramètre de densité,

$$\frac{dQ_{\text{ow}}}{d \ln k} = 4\pi H^2 J_{\text{ow}} P_T(k) T(k, n). \quad (8.204)$$

Tant que le mode est super-Hubble, son amplitude est constante (voir chapitre 5) puis il entre dans un régime d'oscillation amortie aux échelles sub-Hubble. L'amortissement entre le moment où le mode devient super-Hubble et aujourd'hui est typiquement d'ordre  $T(k, n) \sim (a_k/a_0)^{-2}$  où un  $k_*$  est la valeur du facteur d'échelle lorsque  $k = aH$ . Nous en déduisons que le spectre des ondes gravitationnelles est aujourd'hui

$$\frac{dQ_{\text{ow}}}{d \ln k} \propto k^{-2} P_T(k). \quad (8.205)$$

Si le mode devient sub-Hubble pendant l'ère dominée par la matière,  $a_k \propto k^{-1/3}$ , alors qu'à

$$\frac{dQ_{\text{ow}}}{d \ln k} \propto P_T(k) \propto \frac{(k_*)^2}{k^0}$$

l'époque des radiations  $a_k \propto k^{-1/4}$ . Nous en déduisons que

$$(8.206)$$

Cette contribution est représentée sur la figure 11.15 pour un spectre invariant d'échelle primordiale,  $P_T \propto k^0$ .

## 8.5 Perturbations du régime de roulis lent

Nous allons maintenant appliquer le formalisme précédent à l'inflation en régime lent. Dans cette approximation, il suffit de déterminer les fonctions  $z(n)$  et  $a(n)$  qui permettent ensuite d'intégrer (8.179) et (8.197). Il est utile de noter dès ce premier stade que

$$z = a \frac{M_P}{4n} \sqrt{\epsilon}. \quad (8.207)$$



### 8.5.1 Une solution exacte : l'inflation selon la loi de puissance

Avant d'étudier le cas général, il est utile de considérer le cas de l'inflation en loi de puissance (8.78) pour laquelle les paramètres de roulement lent restent constants,  $\xi = 5 = 1/p$  et  $\xi = 0$ . Dans ce cas, l'expression (8.116) est exact, de sorte que

$$aH = H = \frac{1}{1 - \xi n}, \quad (8.208)$$

et, comme pour un espace-temps de De Sitter,  $n$  varie entre  $-\infty$  et 0.

#### 8.5.1.1 Modes scalaires

L'évolution temporelle conforme du facteur d'échelle (8.76) et du champ scalaire (8.77) est déterminée explicitement. La variable  $z$ , définie par (8.173), est alors donnée par

$$z = y/pnn^{1/2},$$

de sorte que

$$\frac{z^2}{z} = \frac{3(3+1)}{n}, \quad (8.209)$$

L'équation (8.179) prend alors la forme d'une équation de Bessel

$$z^2 \frac{d^2 v}{dz^2} + \frac{1}{4} \frac{dv}{dz} + \left( \frac{3}{4} - \frac{1}{n} \right) v = 0. \quad (8.210)$$

La solution de cette équation qui satisfait la condition initiale (8.184) peut être exprimée en termes de fonction de Hankel comme

$$v_k(n) = \sqrt{z} H_{\nu}^{(1)}(kn), \quad (8.211)$$

$$v_k(n) = 2^{-3/2} \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(3/2)} \frac{1}{r^{1/2}} \frac{1}{r^{1/2}}$$

Pour les modes super-Hubble ( $k/H \ll 1$ ), cette solution tend vers

$$\frac{1}{\sqrt{2}k} (-kn)^{-\nu+1/2} \quad (8.212)$$

L'expression (8.189) permet de trouver que le spectre de puissance des perturbations de courbure est donné par

$$2^{-3/2} \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(3/2)} \frac{1}{r^{1/2}} \frac{1}{r^{1/2}} [OH] \quad (8.213)$$

Le coefficient  $(\nu - 1/2)^{-1} r^{1/2}$  vient de la contribution  $(1 - \xi)^{-1/2} r^{1/2}$  qui apparaît lors du remplacement de  $kn$  par (8.208). Si nous évaluons ce spectre à  $aH = k$ , il peut alors être

$$\frac{1}{nM_p} 2^{-3/2} \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(3/2)} (v - r^{1/2} m$$

réécrit comme

$$k = aH \quad (8.214)$$

ce qui cache la dépendance  $k$  dans le terme  $H^2/\epsilon$  évalué au moment où le mode  $k$  devient super-Hubble.

### 8.5.1.2 Ondes gravitationnelles

L'étude des ondes gravitationnelles est dans ce cas identique à celle des modes scalaires puisque dans ce modèle particulier d'inflation  $z \propto a^{-1}$ . L'équation (8.197) est donc identique à (8.179) et la solution pour  $p_s$  est donnée par (8.211). Nous déduisons de (8.200) que

$$\frac{64n}{z} = y; \quad (a)^{p_s} =$$

Le spectre de puissance des ondes gravitationnelles est donc donné par

$$P_T = 16eP_z \quad (8.215)$$

### 8.5.1.3 Indices spectraux

Notez que l'amplitude des ondes gravitationnelles est déterminée uniquement par l'échelle d'énergie,  $H$ , pendant le régime de roulis lent, tandis que celle des modes scalaires dépend à la fois de  $H$  et du paramètre de roulis lent  $\epsilon$ . Les indices spectraux, définis par

$$n_s - 1 = \frac{d \ln P_z}{d \ln k}, \quad \frac{d \ln P_T}{d \ln k} \quad (8.216)$$

sont respectivement donnés par

$$n_s = -2v + 4 = -2\epsilon + 5, \quad n_T = -2v + 3 = -2\epsilon + 4. \quad (8.217)$$

Notons que lorsque  $\epsilon \ll 1$ , c'est à dire lorsque  $p \gg 1$ , alors  $n_s = -2/(p - 1) \sim -2/p = -2\epsilon$  au premier ordre dans les paramètres de roulement lent. On en déduit la relation de cohérence à l'ordre le plus bas dans les paramètres de roulement lent

$$n_T = n_s + 1. \quad (8.218)$$

## 8.5.2 Cas général

Dans le cas général, les paramètres de roulis lent dépendent du temps et les équations d'évolution ne peuvent pas être intégrées exactement. Il faudrait donc construire un schéma d'expansion permettant d'approcher la solution.

### 8.5.2.1 Schéma d'expansion

Le cas d'inflation en loi de puissance que nous avons considéré précédemment correspond à des paramètres de roulement lent constants. Dans un modèle arbitraire, ces paramètres varient et leur dynamique est dictée, à l'ordre le plus bas, par (8.46) et (8.179), et (8.197) ne peut pas être résolu analytiquement.

Afin de faire une expansion en termes de paramètres de roulement lent, nous utilisons (8.46) pour remplacer la dépendance temporelle de  $\epsilon$  à l'ordre dominant dans toutes les équations, afin d'identifier

les termes négligeables. La relation (8.116) peut alors être généralisée en effectuant des intégrations successives par parties et en développant  $\xi$  en

$$\frac{da}{aH} = \frac{1}{1 - b\xi} \frac{da}{a} = \left( 1 + b\xi + \frac{1}{2}b^2\xi^2 + \dots \right) \frac{da}{a} \quad (8.219)$$

to obtain

$$\ln \frac{a}{a_0} = \int_{a_0}^a \frac{da}{a} \left( 1 + b\xi + \frac{1}{2}b^2\xi^2 + \dots \right) \quad (8.220)$$

$$H + \text{une } H^2 + \dots = H + \text{une } H^2 + \dots$$

Le paramètre  $\xi$  peut désormais avoir une dépendance temporelle arbitraire. En supposant que  $\xi$  et  $\hat{\Omega}$  sont de petits paramètres, alors au premier ordre on peut les considérer comme constants (puisque  $\xi$  est du second ordre) de sorte que

$$n = -H(1 + \xi) + O(2). \quad (8.221)$$

Nous distinguerons le développement *d'ordre supérieur* dans lequel seules les puissances les plus faibles des paramètres de roulement lent sont conservées du développement *d'ordre suivant* qui contient les corrections d'ordre suivant.

Le calcul du spectre de puissance au prochain ordre a été initialement effectué par Stewart et Lyth [25] et l'extension au deuxième ordre peut être trouvée dans la réf. [26].

### 8.5.2.2 Extension des fonctions $z''/z$ et $a''/a$

Les deux fonctions  $z''/z$  et  $a''/a$  sont essentielles pour résoudre (8.179) et (8.197). A partir de (8.173), on obtient

$$\frac{z''}{z} = H + \frac{H'}{H} = H \left( 1 + \frac{H'}{H} \right) = H \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{z''}{z} - \hat{\Omega} \right), \quad z < p'$$

où la deuxième égalité utilise les relations (8.48). Après avoir différencié cette équation et utilisé les relations (8.46) et (8.48), on trouve que

$$\begin{aligned} \frac{z''}{z} &= \frac{1}{2} [2 + 2\xi - 3\hat{\Omega} + \hat{\Omega} - \xi\hat{\Omega} + \xi] , \\ &= \frac{1}{2} [2 + 2\xi - 3\hat{\Omega} + 2\xi + \hat{\Omega} - 4\xi\hat{\Omega} + \dots] , \end{aligned} \quad (8.222)$$

ce résultat étant exact. De manière identique, puisque  $a''/a = H' + H^2$ , on obtient

$$\frac{a''}{a} = (2 - \xi)H^2. \quad (8.223)$$

La relation (8.221) permet alors d'exprimer ces quantités en termes de temps conforme. Au premier ordre, on obtient

$$\boxed{\frac{2 + 6\xi - 3\hat{\Omega}}{3\hat{\Omega}}} + O(2), \quad \frac{a''}{a} = \frac{2 + 3\xi}{n^2} + O(2). \quad (8.224)$$

8.5.2.3 *Modes scalaires*

Comme dans le cas de l'inflation selon la loi de puissance, (8.179) se réduit à une équation de Bessel de la forme (8.210) avec

$$\nu = \frac{3}{2} + 2\epsilon - S. \quad (8.225)$$

La solution qui satisfait les conditions initiales (8.184) est donnée par (8.211). Pour les modes super-Hubble, nous devrions alors étendre cette solution, en conservant le terme d'ordre principal et ceux d'ordre suivant. Utiliser  $T(a+h)/T(a) \sim 1 + h\dot{T}/T(a)$  et  $2^{-h} \sim 1 + h \ln 2$  pour  $h \ll 1$ , on obtient

$$= \frac{1}{n} \ddot{U} 2^{[1-2(C+1)\epsilon+2CS]} (OH)^{\frac{3}{2} + \epsilon - S}. \quad (8.226)$$

où  $C = \text{oui} \epsilon + \ln 2 - 2$ , et  $\gamma_E \sim 0,5772$  la constante d'Euler. Le spectre en régime de roulement lent prend les deux formes équivalentes,

$$1 - 2(2C+1)\epsilon + 2CS + (2S - 4\epsilon) \ln - aH J \quad (8.227)$$

$$= \frac{1}{n} 2^{[1-2(C+1)\epsilon+2CS]} (M/2e)^n v_{\text{MPL}}^{\epsilon} k = aH \quad (8.228)$$

8.5.2.4 *Ondes gravitationnelles*

As in the case of power-law inflation, (8.197) reduces to a Bessel equation of the form (8.210) with

$$\nu = \frac{3}{2} + \epsilon. \quad (8.229)$$

The solution that satisfies the initial conditions (8.184) is given by (8.211). For super-Hubble modes, this solution should then be expanded, keeping the leading and next to leading order terms exactly in the same way as in the previous section. By noticing that

$$P_r = 16q \cdot \quad (8.230)$$

we easily obtain

$$P = v_M r^{[1-2(C+1)\epsilon]} (aH) \quad (8.231)$$

We then infer that the spectrum in the slow-roll regime takes the two equivalent forms,

$$P = \frac{16}{n M^2} [1 - 2(C+1)\epsilon - 2\epsilon \ln] \quad (8.232)$$

$$= \left[ \frac{1}{n} - 2(C+1)\epsilon - 2\epsilon \ln \right] v_M^{\epsilon} k = aH \quad (8.233)$$

### 8.5.2.5 Consistency relation at leading order

The cosmological predictions of inflation are, in general, discussed in terms of the power spectra

$$|A| \sim 25^{n_s(k)}, \quad P_T(k) = \frac{1}{100} \frac{H^4}{M_{\text{pl}}^4}, \quad (8.234)$$

the normalization of these spectra being a pure matter of convention.

The spectral index of scalar perturbations appears in (8.227),

$$n_s = \frac{d \ln |A|}{d \ln k} = 2 + \frac{d \ln H^2}{d \ln k} = 2 + \frac{2}{H} \frac{dH}{dt} \frac{dt}{d \ln k} = 2 + 2\epsilon_1. \quad (8.235)$$

It is instructive to determine  $n_s$  from (8.228). Using (8.57), we obtain

$$n_s = \frac{d \ln |A|}{d \ln k} = 2 + \frac{d \ln H^2}{d \ln k} = 2 + \frac{2}{H} \frac{dH}{dt} \frac{dt}{d \ln k} = 2 + 2\epsilon_1. \quad (8.236)$$

The spectral index of the tensor modes appears in (8.232)

$$n_T = \frac{d \ln P_T}{d \ln k} = \frac{d \ln A_T}{d \ln k} = n_T. \quad (8.237)$$

The index  $n_T$  can also be determined from (8.233). Using (8.57), we obtain

$$n_T = \frac{d \ln P_T}{d \ln k} = \frac{d \ln A_T}{d \ln k} = n_T. \quad (8.238)$$

These results summarize one of the generic predictions of inflation. In the slow-roll regime, inflation predicts that density perturbations and gravitational waves develop super-Hubble correlations with nearly scale invariant power spectra. This is due to the fact that the observable frequency band corresponds to a small number of e-folds and thus to small variations of  $y$ .

Each spectrum is characterized by its amplitude and its spectral index. Even though the absolute amplitude is arbitrary and is fixed by the energy scale of inflation,  $H$ , the relative amplitudes of the scalar and tensor modes must satisfy the relation

$$R = \frac{A_T}{A} = e. \quad (8.239)$$

This implies a consistency relation between the amplitudes of the two spectra and their spectral indices,

$$n_T = 2 - n_s. \quad (8.240)$$

This relation is incontrovertible and must be satisfied to lowest order by any model of single-field inflation in the slow-roll regime. It is a distinctive signature of inflation and it is difficult to imagine another mechanism that would lead to such an equality. Needless to say that checking this relation is a priority task for cosmology.

### 8.5.2.6 Relation de cohérence à l'ordre voisin de l'ordre dominant

A la commande suivante, la dépendance  $k$  des paramètres de roulis lent doit être prise en compte. En utilisant (8.56) et (8.57), on obtient à partir des dérivées logarithmiques de (8.228) et (8.233)

$$n_S - 1 = 2J - 4e - [8(C + 1)e - (6 + 10C')eS + 2CC'^2_H], \quad (8.241)$$

$$NT = -2e [1 + (3 + 2C)e - 2(1 + C)J]. \quad (8.242)$$

En remplaçant  $H'$  par  $e$  dans le rapport entre  $A_s$  et  $A_T$  nous trouvons que

$$e = R [1 - 2C(e - J)], \quad (8.243)$$

ce qui correspond à (8,239) à la prochaine commande. De plus, à partir du rapport entre (8,228) et (8,233), nous trouvons que

$$NT = -2R (1 + 3e - 2J). \quad (8.244)$$

Après avoir remplacé  $e$  et  $J$  entre parenthèses par leurs valeurs à l'ordre dominant, nous obtenons la relation de cohérence à l'ordre voisin.

$$NT = -2R [1 - \infty + (1 - n_s)]. \quad (8.245)$$

Il est remarquable que cette expression ne fasse intervenir aucune dérivée des indices spectraux. De plus, les modes scalaires étant plus faciles à mesurer que les ondes gravitationnelles, il est probable que si  $n_T$  est connu, alors  $n_{ste}$  aussi, de sorte que si la relation de cohérence peut être vérifiée par observation à l'ordre principal, on peut également la vérifier à l'ordre suivant sans aucun effort supplémentaire.

Comme le montrent les relations (8.241) et (8.242), à cet ordre  $n_s$  et  $n_T$  dépendent du numéro d'onde  $k$ . On peut donc définir

$$«s \quad \frac{dn_s}{d \ln k}, \quad a_T \quad \boxed{\frac{dn_T}{d \ln k}} \quad (8.246)$$

qui caractérisent le déroulement des indices spectraux. En utilisant (8.46), nous trouvons que

$$\frac{de}{d \ln k} = 2e(J - e), \quad \frac{dJ}{d \ln k} = 2e(e - J) - e.$$

À l'ordre le plus bas, un  $s$  et un  $T$  sont obtenus en considérant la valeur des indices spectraux au premier ordre de sorte que

$$\text{comme} = -4e(e - J) - 2e, \quad \text{un}_T = -4e(e - J). \quad (8.247)$$

Cela implique l'existence d'une deuxième relation de cohérence [27]

$$a_r = 2R [2R + (n_s - 1)]. \quad (8.248)$$

La mesure d'un  $\tau$  reste pour l'instant loin de toute possibilité d'observation, et donc dans l'état actuel des possibilités techniques, cette relation n'est pas encore très intéressante.

Le tableau 8.1 résume les résultats obtenus pour les indices spectraux des spectres inflationnistes en régime de roulement lent. Notons également que si ces paramètres sont mesurés à une échelle dite *pivot donnée*,  $k^*$ , alors l'expansion de ces spectres prend la forme

$$\ln A^2(k) = \ln A^2(k^*) + [n_s(k^*) - 1] \ln \frac{k}{k^*} - \frac{1}{2} n_s \ln^2 \frac{k}{k^*} + \dots \quad (8.249)$$

et une version analogue pour  $A_T$ .  $k^*$  est généralement choisi comme moyenne logarithmique de la bande de fréquence observable, typiquement  $k^* \sim 0,01 h \text{ Mpc}^{-1}$ .

**Tableau 8.1** Résumé des propriétés des modes scalaires et des spectres de puissance des ondes gravitationnelles.

|                       | Premier ordre  | À côté de l'ordre principal                    |
|-----------------------|----------------|------------------------------------------------|
| $R$                   | $e$            |                                                |
| $n_s - 1$             | $2\delta - 4e$ | $2\delta - 4e - [8(C+1)e^2 - (6+10C)e\delta +$ |
| «...»                 | $-2H_0 e$      | $-2e[1 + (3+2C)e - 2(1+C)\delta]$              |
| relation de cohérence | «...»          | «...»                                          |
| $\epsilon_s$          | 0              | $-4e(e-6) - 2\delta$                           |
| $\Lambda_T$           | 0              | $-4e(e-6)$                                     |
| relation de cohérence |                | $\dot{a} = 2R[2R + (n_s - 1)]$                 |

### 8.5.3 Relation avec les observations

Tant que l'on travaille en régime de roulement lent, les perturbations sont caractérisées par les deux spectres primordiaux  $A_T$  et  $A^2$ . Nous passons brièvement en revue ce que les observables peuvent nous apprendre à leur sujet.

Pour les modes super-Hubble,  $Z$  est constant au cours de l'évolution. Les calculs du spectre de puissance de la matière et des anisotropies de température du fond diffus cosmologique nécessitent la connaissance du spectre de  $T$ . L'équation (5.149) nous permet d'obtenir

$$T(kn \ll 1, n < n_{\text{eq}}) = 3Z, \quad T(kn \ll 1, n > n_{\text{eq}}) = 5Z. \quad (8.250)$$

#### 8.5.3.1 Fond cosmique de micro-ondes

Les résultats précédents fixent les conditions initiales pour le calcul du spectre de puissance angulaire des anisotropies du fond diffus cosmologique (Chapitre 6). En se limitant aux grandes échelles angulaires, c'est à dire aux petits multipôles, le spectre angulaire des modes scalaires est donné par (6.50), en utilisant  $ST/T \sim |T|$  pour les perturbations adiabatiques aux grandes longueurs d'onde. Puisque  $T = |Z|$ , on en déduit que



$$Cl - nA l(k_0) = \frac{r(3 - n_s)}{2(2 - S_r)} \int_{k_0}^{k_0 + \Delta k} \frac{dk}{k} \quad (8.251)$$

si on choisit le pivot  $k^* = k_0 = 1/n_0$ . Pour  $n_s \sim 1$ , on obtient  $l(1 + 1)C_l = nA^2(k_0)/2$ . Les observations des anisotropies par le satellite WMAP [28] imposent que

$$Q_{\text{rms}} - \text{PS} = \odot_0 \quad 4^{\circ} = 18 \times 10^{-4} \text{ K} \quad (8.252)$$

Pour  $\odot_0 = 2,73 \text{ K}$ , on en déduit que  $A^2(k_0) = 4,16 \times 10^{-10}$ . En utilisant (8.213) et (8.49), nous déduisons l'échelle énergétique de l'inflation

$$\left(\frac{V}{\varepsilon}\right)^{1/4} = 0,0047 M_{\text{pl}} \sim 1,5 \times 10^{16} \text{ GeV}. \quad (8.253)$$

Cette valeur est en fait une borne supérieure car une partie des perturbations peut être d'origine tensorielle.

En effectuant le même calcul pour les ondes gravitationnelles, la relation de cohérence devient

$$r = C_T = f\left(\frac{C_S}{C_T}\right) \quad (8.254)$$

La fonction  $f$  dépend d'un modèle cosmologique donné. Pour le modèle standard plat avec  $Q_{AO} = 0,7$ ,  $f \sim 1$ .

L'analyse à partir des données WMAP fournit la contrainte [3°] sur  $\xi$

$$e < 0,32, \quad (8.255)$$

ce qui implique

$$< 1,4 \times 10^5 \left(\frac{V_{\text{1st}}}{\text{MJ}}\right)^{22 \times W} \quad (8.256)$$

La réanalyse des données WMAP [29] conduit aux contraintes selon lesquelles  $R < 0,267$  tandis que  $16R < 0,125$  lorsqu'elles sont combinées avec des oscillations acoustiques baryoniques et des données de supernovae pour un rapport tenseur/scalaire à  $k = 0,002 \text{ Mpc}^{-1}$ . L'indice spectral scalaire est respectivement obtenu comme étant  $n_s = 0,963 \pm 0,004$  avec un niveau de confiance de 68 %

### 8.5.3.2 Lien avec le nombre de e-folds

Les observations permettent d'établir des contraintes sur le couple  $(r, n_s - 1)$  qui peut être lié à l'espace des paramètres de roulement lent. Ces quantités dépendent de la forme du potentiel mais aussi du nombre de e-folds,  $N$ , entre le moment où les plus grandes échelles observables deviennent super-Hubble et la fin de l'inflation.

Pour illustrer cela, considérons un modèle d'inflation à grandes valeurs de champ (modèle de type A), par exemple avec un potentiel en loi de puissance (8.68). Les expressions (8.69) et (8.235) permettent d'établir que

$$r = \frac{2}{n+2} \quad (8.257)$$

En inversant (8.70) et (8.69) pour  $r$ , on obtient

$$n = \frac{2}{r} - 2 \quad (8.258)$$

Pour un modèle donné, par exemple  $n = 4$ , les quantités observables  $r$  et  $n_s - 1$  dépend du nombre de plis électroniques. La figure 8.11 illustre la position d'un de ces modèles dans le  $(n_s - 1, r)$ -avion. À mesure que  $N$  augmente, le modèle se rapproche de plus en plus du point  $(n_s - 1, r) = (0, 0)$ . Cette figure résume également les contraintes sur les deux

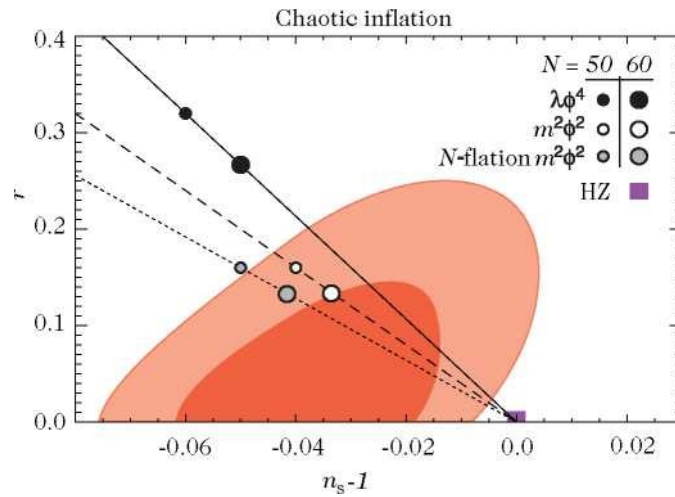


**Fig. 8.11** Constraints on single-field chaotic inflationary models with potentials of the form  $y^n$  with  $n = 2$  (dashed),  $n = 4$  (solid) and on N-flation with  $y^2$  potential (dotted). HZ is the prediction for a strictly scale invariant power spectrum. The predictions for  $N = 50$  and  $N = 60$  e-folds have been plotted. The  $y^4$  models are excluded at 95% CL. From Ref. [29].

paramètres obtenus à partir des données WMAP.

Compte tenu des contraintes d'observation dans ce plan, la viabilité d'un modèle dépend du nombre de plis électroniques. L'exemple précédent montre que les prédictions d'un modèle d'inflation chaotique dépendent de manière cruciale de  $N$ . La dernière analyse de WMAP [29] a conclu qu'un modèle à champ unique avec  $V = Ay^4$  est loin du niveau de confiance (CL) de 95 %. région pour  $N = 50$  et  $N = 60$ . Un modèle massif en champ libre se trouve en dehors de la région CL à 68 % pour  $N = 50$  et à la limite de cette région pour  $N = 60$  tout en étant à l'intérieur de la région CL à 95 %. Pour un modèle d'inflation en loi de

puissance,  $R = 1/p$  et  $1 - n_s = 2/p$  de sorte que  $p < 60$  soit exclu à plus de 99 % CL.

La symétrie par rapport à la fin du gonflage (pour  $n < n_e$ , les modes sortent du rayon de Hubble et pour  $n > n_e$ , les modes entrent dans le rayon de Hubble, voir Fig. 8.5) permet de mettre une borne supérieure sur  $N$  de  $H_e$  et  $H_o$ . On peut montrer [31] que

$$N < 60,9 + \frac{1}{2} \ln \frac{V_{10^{-10}} \text{ GeV}^4}{(0,02 \text{ Mpc}^{-1})^4} - \ln \frac{H_o}{H_e} \quad (8.259)$$

Utiliser  $H_o/M_p < 2 \times 10^{-16}$  et que la plus grande échelle observable est  $k = a_o H_o$  on peut alors estimer que

$$N < 62,5 + \ln(10^{-16}) \quad (8.260)$$

Une détermination précise de  $N$  est importante pour une bonne compréhension de la fin de l'inflation. Une limite supérieure pour l'échelle énergétique de l'inflation peut être obtenue en supposant que la partie du spectre de puissance angulaire qui correspond au plateau de Sachs-Wolfe est due uniquement aux ondes gravitationnelles. On obtient alors

$$V_{10^{-10}} < 3 \times 10^{-10} \text{ GeV}^4.$$

### 8.5.3.3 Relation de cohérence

Afin de vérifier la relation de cohérence, la détection des ondes gravitationnelles primordiales est nécessaire. Cela va au-delà des observations actuelles. Nous résumons ici les contraintes obtenues sur les contributions des ondes gravitationnelles.

L'analyse des données WMAP a, par exemple, établi [30] que

$$\frac{C_{io}}{C_w^s} < 0.32,$$

de sorte que les ondes gravitationnelles ne contribuent pas à plus de 30 % au fond diffus cosmologique.

La relation (8.42) permet d'établir que pendant un intervalle d'un nombre  $\Delta N$  de e-folds,

$$\Delta \chi$$

le champ s'est déplacé de

$$\Delta \chi \sim \sqrt{2} \Delta N \quad (8.261)$$

qui, en utilisant (8.254), peut être réexprimé comme

$$\frac{\Delta \chi}{M_P} \sim \sqrt{2} \Delta N \left( \frac{r}{1-r} \right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{1-r}} \quad (8.262)$$

$$\frac{\Delta \chi}{M_P} \sim \sqrt{2} \Delta N \quad (8.262)$$

Cette estimation nous permet de conclure [32] que si  $r \sim 0,1$ , alors le champ doit avoir varié de plus de  $M_P$ . Ce résultat a souvent été utilisé pour affirmer que des potentiels d'inflation réalistes impliquent que  $r$  soit très faible.

En raison de la variance cosmique, la contribution des ondes gravitationnelles aux anisotropies de température ne peut être distinguée que si  $r > 0,07$  [33]. Les ondes gravitationnelles primordiales génèrent des anisotropies dans la polarisation  $B$  (Chapitre 6). Ces modes  $B$  sont également

généralisé à partir de la polarisation  $E$  par lentille gravitationnelle par les structures à grande échelle. Cet effet de premier plan limite la détection des ondes gravitationnelles primordiales à  $r > 6 \times 10^{-4}$  [34], ce qui implique que l'échelle énergétique de l'inflation doit être plus

$$V_* > 3.2 \times 10^{-10} \text{ GeV}^4 \left( \frac{V_*}{M_{\text{Pl}}^4} \right)^{1/4}$$

grande que

$$> 2.62 \times 10^{-10} \text{ GeV}^4. \quad (8.263)$$

Ce n'est qu'un ordre de grandeur inférieur à la limite actuelle (8,256). Cette limite peut être abaissée d'un facteur 2 si l'on mesure la variation de l'indice spectral. Ces considérations montrent que la relation de cohérence sera difficile à vérifier par observation.

#### 8.5.4 Reconstruction du potentiel

##### 8.5.4.1 Principe

La mesure de  $n_s$ ,  $n_T$ ,  $R$ ,  $a_s$  et  $a_T$  doit, en principe, permettre de reconstruire la forme du potentiel au voisinage de  $p^*$ , valeur de  $p$  au moment où le pivot devient super-Hubble. Pour s'en rendre compte, il faut établir le lien entre le développement (8.249) et un développement de Taylor du potentiel autour de  $p^*$

$$V = V^* + V^* A + \frac{1}{2} V^* K^2 W + \dots \quad (8.264)$$

Les définitions des paramètres de roulement lent peuvent être utilisées pour exprimer les dérivées successives du potentiel comme

$$V^* = \frac{M^2}{H^2} (3 - \epsilon), \quad (8.265)$$

$$V' = -\frac{M^2}{H^2} \eta (3 - J), \quad (8.266)$$

$$V'' = H^2 (3\epsilon + 3J - \epsilon - \eta^2). \quad (8.267)$$

Dans un deuxième temps, nous exprimons les paramètres de roulement lent en fonction d'observables, tels que l'indice spectral. Par exemple, en utilisant les expressions (8.233) et (8.243), on trouve que  $V$  est donné par

$$V^* = \frac{75}{32} M_{\text{Pl}}^2 (k^*)^{1 + \frac{1}{2}(j + 2C_j R^*)} \quad (8.268)$$

Le détail du calcul des autres dérivées peut être obtenu dans la Réf. [35]. Ici, nous donnons juste les relations pour les deux dérivées suivantes sans aucune démonstration

$$K' = \frac{75}{8} \frac{R^2 A}{p^2} - \frac{R^2}{3} \text{Ai}(M^2 + (iC + \frac{1}{2} R^*)^2 (C^2 - 6(1 - n_s^*))) \quad (8.269)$$

Le tableau 8.2 résume les différentes observables nécessaires à la reconstruction du potentiel jusqu'à un ordre donné. Notons encore une fois que la normalisation absolue du potentiel nécessite la connaissance de  $A_T$ , c'est à dire la détection des ondes gravitationnelles primordiales.

**Tableau 8.2** Résumé des paramètres de roulis lent et des observables qui sont nécessaires pour reconstruire une dérivée d'ordre donné du potentiel, à l'ordre principal et suivant.

|      | Premier ordre            | Prochaine                | Premier ordre | Prochaine      |
|------|--------------------------|--------------------------|---------------|----------------|
| $V$  | $H$                      | $\Pi$                    | $\bar{A}$     | $A_T, R$       |
| $V'$ | $\Pi$                    | $H, \mathcal{E}, \delta$ | $\bar{A}, T$  | $UNE_T, R,$    |
| $V$  | $H, \mathcal{E}, \delta$ | $H, e, \delta, \zeta$    | $UNE_T, R,$   | $A_T, R, n_s,$ |
| $V$  | $H, e, \delta, je$       |                          | $UNE_T, R,$   |                |

#### 8.5.4.2 Équations de flux

Une autre façon d'aborder le problème est de générer aléatoirement des potentiels et d'en déduire les observables [36]. Pour cela, nous étendons la hiérarchie des paramètres de slow-roll à toutes les commandes en définissant les quantités

$$\lambda_H \equiv \frac{M_p V}{4n J} \left( \frac{H}{H'} \right)^2 \frac{d}{d \ln a} \left( \frac{V}{H^2} \right) \quad (8.270)$$

qui complètent le doublet  $(e_H, \delta_H)$ . En particulier,  $\delta_H = A_H$  et  $\lambda_H =$

Utilisation  
comme variable le nombre de e-folds avant la fin du gonflage, on a

$$\frac{d}{dN} = \frac{d}{d \ln a} = \frac{M_p}{y/4n^2} \frac{d}{dy} \quad \text{ré}$$

Nous avons choisi le signe de  $y/\tilde{e}$  comme celui de  $H'$ . Avoir  $dt > 0$  correspond donc à  $dy > 0$  et  $dN < 0$ . Les équations d'évolution (8.46) peuvent alors être étendues à la série d'équations

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dN} &= \frac{2\tilde{e}}{H} (SH - \mathcal{E}_H) \\ \frac{dN}{dN} &= [(1 - 1)^{-1} H - \dots] \quad (8.271) \end{aligned}$$

Ce système peut être intégré numériquement dans un ordre arbitraire dans les paramètres de roulage lent. Dans toute application pratique, cette hiérarchie est tronquée à une valeur donnée  $l = M$ . On choisit alors un nombre de e-folds,  $N$ , et un point aléatoire dans l'espace  $\{e, X_H\}$  et on évolue (8.271) jusqu'à la fin de l'inflation ou jusqu'à ce qu'un point fixe du système soit atteint. Dans le deuxième cas, on calcule les observables  $(r, n_s, \dots)$ . Dans le premier cas, le système est intégré à rebours dans le temps pour  $N$  e-folds et les observables sont calculés à ce stade. La figure 8.12 illustre la distribution de l'intégration de 10<sup>4</sup> des modèles. En particulier, 90 % des potentiels ont un spectre à inclinaison bleue avec  $n_s > 1$  et sont donc exclus.

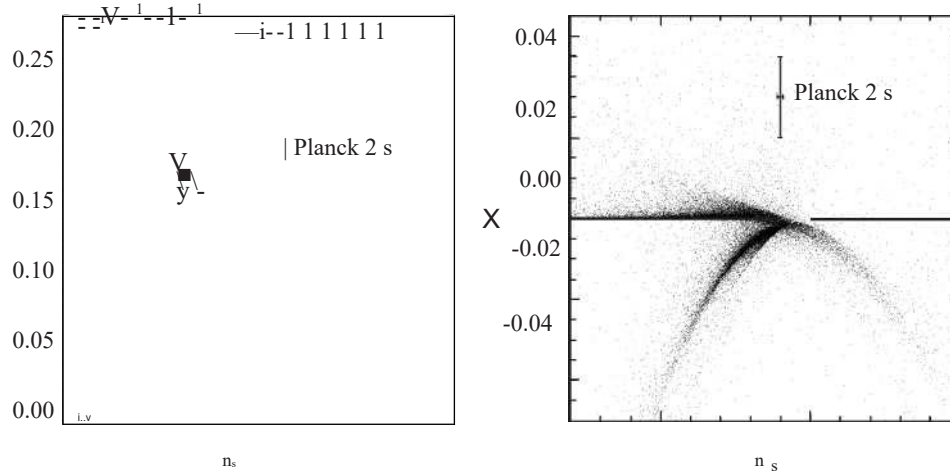


**Fig. 8.12** Distribution of  $10^6$  models with  $M = 5$  and  $N = 40-70$  in the space of observables. From Ref. [36].

Si nous avons des contraintes d'observation dans l'espace des observables, nous pouvons reconstruire le potentiel si le point est dans des limites acceptables. Cette méthode peut être utilisée pour explorer l'espace des potentiels et extraire ceux qui concordent avec les observations. Cependant, rien ne garantit que les potentiels reconstruits soient réalistes d'un point de vue théorique et il est difficile d'aller au-delà d'un simple catalogue de potentiels puisque la mesure, au sens de mesure de probabilité, dans l'espace des potentiels est inconnue. , ce qui rend impossible l'attribution de poids relatifs aux modèles. Cette méthode a été utilisée pour comparer la théorie aux observations [36] mais le lien entre les équations de flux et la dynamique de l'inflation est loin d'être clair [37].

## 8.6 Fin du gonflage et réchauffage

La théorie du réchauffement après gonflement est l'une des applications les plus importantes de la théorie quantique des champs dans l'espace-temps courbe. Presque toute la matière présente dans notre Univers aurait été créée par un processus de production de particules au cours de la désintégration de l'inflaton.

### 8.6.1 Réchauffage perturbateur

Pendant le gonflage, toute l'énergie est concentrée dans le gonflage qui roule lentement. Peu après la fin de l'inflation, l'Univers est froid et « figé » dans un état de faible entropie où le champ oscille autour du minimum de son potentiel (Fig. 8.6). Les oscillations cohérentes de l'inflaton peuvent être considérées comme un ensemble de particules scalaires indépendantes. S'ils se couplent à d'autres particules, l'inflaton peut alors se désintégrer de manière perturbatrice pour produire des particules légères. L'interaction du gonflement devrait donc donner lieu à un taux de décroissance effectif, et le réchauffage ne se produirait qu'après que le taux d'expansion ait diminué jusqu'à une valeur  $H \sim \dots$ . Cela implique également que lors du premier  $O(m/r \wedge)$  oscillations du gonfleur, il ne se passe rien d'intéressant.



Illustrons ce mécanisme dans le cas d'un modèle d'inflation chaotique au potentiel (8.68). Comme illustré sur la Fig. 8.6 pour  $n = 2$ , le gonfleur se comporte comme un fluide sans pression pendant la phase oscillatoire et le facteur d'échelle évolue comme  $a \propto t^{1/2}$ . Pour voir cela, réécrivons l'équation de Klein-Gordon sous la forme

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} + 3H \frac{d\phi}{dt} + V'(\phi) = 0$$

Durant la phase oscillatoire,  $H \ll m$  et le gonfleur subit plusieurs oscillations pendant un temps  $H^{-1}$ . Il est donc raisonnable d'utiliser la valeur moyenne de la pression et de la densité sur plusieurs oscillations. Pour un oscillateur harmonique  $\langle \ddot{\phi}^2 \rangle / 2 = (n/2) \langle V(\phi) \rangle$ , de sorte que  $\langle P_{\phi} \rangle = (n - 2)/(n + 2) \langle \rho_{\phi} \rangle$ . Le champ scalaire se comporte ainsi comme un fluide poussière pour  $n = 2$  et comme un fluide rayonnement pour  $n = 4$ .

Pour que l'inflation diminue, elle doit être couplée à d'autres champs. Limitons-nous au cas  $n = 2$  et, à titre d'exemple, considérons les couplages décrits par le Lagrangien

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = uv\phi\chi + h\phi\psi\psi^\dagger, \quad (8.272)$$

où  $u$  et  $h$  sont des constantes de couplage sans dimension et  $v$  est une échelle de masse. Aucun terme de masse n'a été introduit pour les bosons  $\chi$  et les fermions supposés très légers devant l'inflaton. Cela est nécessaire pour que le taux de désintégration de l'inflation en ces particules soit perceptible. Comme vu précédemment, l'échelle de masse du gonflement devrait être de l'ordre de  $m \sim 10^{-5} M_{\text{Pl}}$ .

#### 8.6.1.1 Evolution de l'inflation

En incluant les corrections quantiques, l'équation de Klein-Gordon devient

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + [m^2 + n(m)]\phi = 0, \quad (8.273)$$

où  $n(m)$  est l'opérateur de polarisation de l'inflaton. La partie réelle de  $n(m)$  correspond à la correction de masse. Même si  $\text{Im}[n(m)] \ll \text{Re}[n(m)]$ ,  $n$  a une partie imaginaire

$$\text{Im}[n(m)] = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \ln \left( \frac{M_{\text{Pl}}^2}{m^2} \right) \quad (8.274)$$

Puisque  $m$  est beaucoup plus grand que les deux  $H$  et  $H$  à la fin de l'inflation, on peut résoudre l'équation de Klein-Gordon en supposant que ces deux quantités sont constantes lors d'une oscillation. Nous en déduisons que l'inflation évolue à mesure que

$$\phi = \phi_0 \sin(mt), \quad \dot{\phi} = \phi_0 m \exp\left(-\int (3H + r) dt\right) \quad (8.275)$$

Tant que  $3H > r$ , la diminution de l'énergie de gonflement provoquée par l'expansion (frottement de Hubble) domine la désintégration des particules. Puisque  $H = 2/(3t)$ , on en

$$\dot{\phi} = \phi_0 m \frac{1}{3t} = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{m^2} \frac{1}{3t}$$

déduit que

$$(8.276)$$

où nous avons utilisé  $\phi_0 = M_{\text{Pl}}^2 / \sqrt{4n}$ ,  $r = 2/(3Ht)$  et  $H^2 = (4n/3)(m/M_{\text{Pl}})^2 \phi^2$ . On récupère  $\langle \rho_{\phi} \rangle = m^2 \phi_0^2 / 2 \propto a^{-2}$ .

### 8.6.1.2 Température de réchauffage

Le réchauffage ne peut se produire que lorsque  $T_v > 3H$ . Dans ce régime, on constate que

$$\frac{1}{m} \frac{d\rho}{dt} = -\frac{1}{m} \frac{dV}{dt} \quad (8.277)$$

We define the time of reheating,  $t_{\text{reh}}$ , by  $T_v = 3H$  so that the energy density at that time is

$$\rho = \frac{1}{24} \frac{M_p^2}{n} \quad (8.278)$$

If this energy is rapidly converted into radiation, its temperature is

$$T_{\text{reh}} = \left( \frac{30}{g} \right)^{1/4} \sqrt{\rho} \quad (8.279)$$

The reheating temperature is thus given by

$$T_{\text{reh}} = \frac{1}{\sqrt{f}} \left( \frac{M_p}{4} \right)^{1/4} \sim 0,14 \frac{M_p}{\sqrt{f}} \ll 10^{10} \text{ GeV}, \quad (8.280)$$

où la borne supérieure a été obtenue à partir de la contrainte  $T_v \ll m \sim 10^{10} \text{ GeV}$ , en supposant  $g \gg 100$ . Notez que  $T_{\text{reh}} < E_{\text{GUT}}$ , l'échelle caractéristique de la rupture de symétrie Grand Unifiée (voir chapitre 9), de sorte que la baryogenèse ne peut pas se produire à cette échelle dans un tel scénario de réchauffement. De plus, pour que les gravitinos ne soient pas surproduits,  $T_{\text{reh}} < 10^{10} \text{ GeV}$  est requis.

### 8.6.1.3 Taux de décroissance

Le taux de décroissance total de l'inflation et peut être décomposé comme  $\Gamma_v = \Gamma(y \rightarrow \text{xx}) + \Gamma(y \rightarrow \text{tt})$  où les taux de désintégration en bosons et fermions sont respectivement

$$\Gamma(y \rightarrow \text{xx}) = a^2 v^2$$

donnés par

$$\Gamma(y \rightarrow \text{tt}) = \frac{h^2 m^2}{8n} \quad (8.281)$$

Ces expressions ne sont valables que dans la limite où  $T_v \ll m$ , soit  $h \ll 1$  et  $av \ll m$ . En supposant  $h \sim 10^{-1}$ , le taux de désintégration en fermions est de l'ordre de  $\Gamma(y \rightarrow \text{tt}) \sim 10^{10} \text{ GeV}$ . La température de réchauffage (8,280) est alors  $T_{\text{reh}} \sim 10^{10} \text{ GeV}$  et l'inflation subit environ  $10^3$  oscillations avant de décroître. Pour les bosons, en supposant  $a \sim 10^{-1}$  et  $v \sim 10^{10} \text{ GeV}$ , on trouve que  $\Gamma(y \rightarrow \text{xx}) \sim 10^{10} \text{ GeV}$  seulement. Le réchauffage la température est de l'ordre de  $T_{\text{reh}} \sim 10^{10} \text{ GeV}$  et l'inflation subissent environ  $10^3$  oscillations. Notez que le taux de désintégration pour une interaction du type  $\mathcal{L}_{\text{NT}} = -g^2 \phi^2 \chi^2 / 2$  est  $\Gamma \sim 2g^2 m^2$

$$\Gamma(y \rightarrow \text{xx}) = \frac{1}{2} g^2 v^2 \quad (8.282)$$

Contrairement aux interactions « à trois pattes », ce taux dépend de la valeur de l'inflation. Depuis  $\phi^2 \sim m^{-3} \sim 10^{-3}$ , ce taux de désintégration diminue plus rapidement que le taux de Hubble  $H$ . Un réchauffage perturbateur ne peut donc jamais être produit par des interactions « à quatre pattes ».

Un réchauffage complet ne peut avoir lieu que si  $T_v$  diminue plus lentement que  $t^{-1}$ . Donc supposer que le réchauffement est complet impose des contraintes sur la structure de la théorie et sur les couplages de l'inflaton avec d'autres champs.

#### 8.6.1.4 Phenomenological formulation

To finish, let us mention a simplified version of this mechanism in which we introduce the coupling between the scalar field and radiation. The conservation equations are then transformed into

$$\dot{\rho}_r + H(\rho_r + p_r) = -\dot{\rho}_\phi - \dot{p}_\phi \quad \dot{V}_y = 0 \quad \dot{p}_r + \frac{4}{3}H\rho_r = -\dot{p}_\phi - \dot{p}_y \quad (8.283)$$

Reheating can then be described phenomenologically as a transfer between two fluids.

### 8.6.2 Theory of preheating

The theory of perturbative reheating is simple and intuitive in many aspects. However, the decay of the inflaton can start much earlier in a phase of *preheating* (parametric reheating) where particles are produced by parametric resonance.<sup>3</sup> The preheating process can be decomposed into three stages: (1) non-perturbative production of particles, (2) perturbative stage and (3) thermalization of the produced particles.

#### 8.6.2.1 Parametric resonance

In order to illustrate this mechanism, let us consider a model of chaotic inflation with potential (8.62) and an interaction of the form

$$V_{\text{int}} = \frac{1}{2} g^2 \phi^2 \chi^2 \quad (8.284)$$

The scalar field  $\chi$  can be decomposed, in second quantization, into

$$\chi = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} [X_k^{(t)} a_k^{(t)} + \text{c.c.}] \quad (8.285)$$

Considering only the interaction between this quantum operator and the classical field  $\phi$ , then the evolution of each mode is dictated by

$$X_k'' + \left( \frac{1}{2} X_k + \frac{1}{2} \phi^2 + \frac{1}{2} \phi^2 \right) X_k = 0 \quad (8.286)$$

One can rewrite this equation in terms of the variable  $X_k = a^{-1} x_k$  as

$$x_k'' + \left( \frac{1}{2} x_k + \frac{1}{2} \phi^2 + \frac{1}{2} \phi^2 \right) x_k = 0, \quad \phi^2 = a^2 + \frac{1}{2} \phi^2 - \frac{3}{4} H^2. \quad (8.287)$$

Using the time variable  $z = mt$  and defining the quantities

$$g^2 = \frac{g^2 \phi^2(t)}{4m^2}, \quad A_k = \frac{1}{2} q + \frac{k^2}{m^2 a^2} \quad (8.288)$$

où  $g$  est défini par (8.275), cette équation prend la forme

<sup>3</sup> En définissant un oscillateur paramétrique comme un oscillateur à fréquence dépendante du temps, la résonance associée, lorsqu'elle existe, sera une résonance paramétrique.

$$d \sim 2X_k + (A_k \sim 2q \cos 2z + A)X_k = 0, \quad (8.289)$$

où  $A = [m^2 - 3(2H + 3H^2)/4]/m^2$ . Ce terme est, en général, négligeable, puisque  $m_s/m_C \ll 1$  et, par exemple, si  $H = 2/3t$ , de sorte que  $2H + 3H^2 = 0$ . En fait, pour  $A \ll 1$  et  $A_k$  et  $q$  constants, cette équation est une *équation de Mathieu*.

### 8.6.2.2 Cas spatio-temporel de Minkowski

Pour un espace-temps de Minkowski, les coefficients  $A_k$  et  $q$  sont constants (on pose  $a=1$ ). Alors cette équation admet toujours une solution de la forme  $X_k(z) = P_k(z) \exp(iv_k z)$ , où  $P_k$  est une fonction périodique de période  $n$ .  $v_k$  est l'exposant caractéristique ; elle n'est pas définie de manière unique car la solution est invariante sous  $v_k \rightarrow v_k + 2n$ . La solution est stable lorsque  $\text{Im}(v_k) > 0$ . Dans le cas contraire, cette équation présente des instabilités et la solution augmente alors de façon exponentielle lorsque  $X_k \propto \exp(p_k z)$  avec  $v_k = -ip_k$  avec  $p_k > 0$ . Les propriétés des solutions de cette équation sont ensuite décrites par un diagramme de stabilité (Fig. 8.13). Notez que l'équation de Mathieu est simplement l'équation de Schrödinger pour un électron dans un potentiel périodique. Dans ce cas les zones instables correspondent à des bandes interdites dans le spectre énergétique.

Comme illustré sur la figure 8.13, nous obtenons des bandes de fréquences  $A_n k$  auxquelles nous pouvons associer un indice entier  $n$ . Pour un mode  $k \in A_n k$ , l'instabilité correspond à une croissance exponentielle du nombre d'occupation  $n_k \propto \exp(2p_k n z)$  qui peut être interprété comme une production de particules. Dans ce régime, appelé *préchauffage*, la description perturbative de  $T_n$  n'est pas applicable.

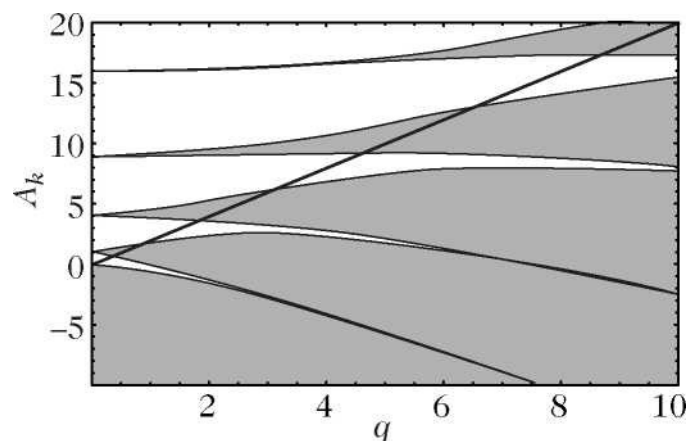


**Fig. 8.13** Stability diagram of the Mathieu equation. The shaded zones are instability zones where  $X_k$  increases in an exponential way. The diagonal line represents  $A_k = 2q$ .

When  $q < 1$ , the width of the instability band is *narrow*. In this regime and for the

### 8.6.2.3 Résonances

first band ( $n = 1$ ), it corresponds to modes  $k \sim m(1 - 2q \pm q)$ . The central mode of the resonance grows as  $\exp(qz/2)$ , i.e. as  $\exp(qTt/8m)$ . The number of particles, defined as

$$f_{Xk} = \frac{1}{1 - k} + |Xk|^2 \quad (8.290)$$

puis grandit comme  $\exp(2p_{\pm} z) \sim \exp(qz)$ . Ce processus peut être interprété comme la désintégration résonante de deux particules  $p$  de masse  $m$  en deux particules  $x$  de quantité de mouvement  $k \sim m$ .

Lorsque  $T$  est grand,  $q$  peut aussi être très grand et la résonance existe pour une *large* bande de modes. L'indice  $p_{\pm}$  peut alors être très grand et le réchauffage devient très efficace. La résonance se produit pour les modes  $k^2/m^2 = A_{\pm} - 2q$ , c'est-à-dire au-dessus de la ligne  $A_{\pm} = 2q$  de la Fig. 8.13. Contrairement aux résonances étroites, le champ  $X_k$  oscille plusieurs fois, environ  $O(y/q)$  fois, au cours d'une oscillation de  $p$ . Pendant la partie principale d'une oscillation, la masse effective de  $x_k$ ,  $m_x = gp(t)$ , est supérieure à  $m$  de sorte que la fréquence des oscillations de  $X_k$  est typiquement  $\omega_k(t) = y/k + gp(t)$ . Dans ce régime adiabatique, la production de particules est faible et  $n_k$  reste sensiblement constant. La production de particules nécessite que la variation de  $\omega_k$  ne soit plus adiabatique

$$\dot{\omega}_k \gtrsim \omega_k. \quad (8.291)$$

ce qui se produit au voisinage de  $p = 0$ . Pour de petites valeurs de  $p$ , on a  $p \sim mT$ , de sorte que cette condition se traduit par  $k < (g \cdot mpT)^{1/3} \sim g^2 p^2$ . Elle ne peut être satisfaite que lorsque  $p < 2p^* = mT/g$ . intervalle maximal en  $k$  pour lequel il y a production de particules correspond à  $p = p^* = T/g$ , voir [10] **L'** pour lequel le nombre d'onde maximal est  $k_{\max} \sim y^2 gmT/2$ . Ainsi, si  $q$  et l'amplitude d'oscillation sont grands, des particules avec une grande quantité de mouvement peuvent être produites. L'estimation du comportement de la résonance paramétrique donnée ici est à comparer avec la solution numérique de la Fig. 8.14. Il faut noter que le comportement de  $n_k$  est beaucoup plus régulier et physiquement transparent que celui de  $x_k$ .

### 8.6.2.4 Expansion de l'espace-temps

Dans un espace-temps en expansion, les résonances n'apparaissent que pour  $q \cdot m > H$ , c'est à dire lorsque

$$gT > 2m \quad \blacksquare \quad (8.292)$$

En fin de gonflage  $H \sim m$  de sorte que la production explosive de particules ne peut se produire que si  $T > m/g$ , soit  $q > 1$ . Ainsi, les résonances étroites ne jouent un rôle que dans les phases tardives du préchauffage mais dans ce régime la réaction inverse induit par les particules  $x_*$  doit être pris en compte. Cela complique sa description.

L'expansion modifie l'image obtenue dans l'espace-temps de Minkowski en (1) décalant vers le rouge les impulsions afin qu'un mode donné traverse différentes zones d'instabilité de l'équation de Mathieu, (2) en amortissant l'amplitude des oscillations et donc de  $q$ , qui varie comme  $qx t^2$ . Ainsi, la fréquence des oscillations du champ  $x$  diminue également

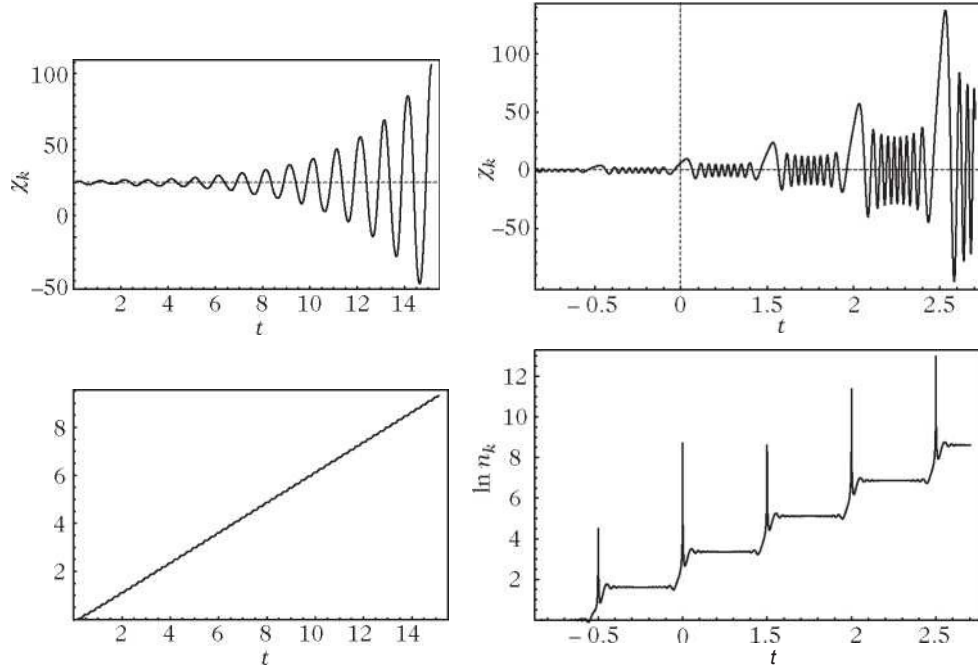


**Fig. 8.14** Evolution of  $X_k$  and of the number of particles  $n_k$  as a function of time in units of  $m/2n$  in Minkowski space-time. (left): Narrow parametric resonance with  $q \sim 0.1$ . The number of particles grows in an exponential way with slope  $\dot{n}_k \sim q/2 \sim 0.05$ . (right): Large resonance with  $q \sim 200$ . At each oscillation of  $X_k$  oscillates several times. The peaks correspond to the moments where  $y = 0$ , where  $n_k$  is not defined. Adapted from Ref. [38].

avec le temps. En particulier, cela modifie la phase de  $X_k$  au moment où  $y = 0$  de manière imprévisible, de sorte que le nombre de particules peut soit augmenter, soit diminuer. C'est ce qu'on appelle la phase de *résonance stochastique*. On peut montrer que  $n_k$  augmente statistiquement trois fois plus souvent qu'il ne diminue de sorte qu'au final  $n_k$  augmente toujours de façon exponentielle.

Si  $q \gg 1$  initialement, il existe une phase de résonance stochastique associée à de grandes résonances. À mesure que  $q$  diminue, le préchauffage continue à travers des résonances étroites puis s'arrête. Cette succession d'événements est illustrée sur la figure 8.15. La théorie complète décrivant ce scénario est développée dans la Réf. [38].

#### 8.6.2.5 Réaction en retour

La dynamique présentée ci-dessus est cependant trop simplifiée car le champ  $X$  a été traité comme un champ test évoluant dans un espace-temps décrit par  $a(t)$  et  $y(t)$  qui ne sont pas eux-mêmes affectés par la production de particules. En effet, du fait de la croissance exponentielle de  $X_k$ , ce champ doit réagir en retour sur la dynamique espace-temps et sur l'évolution du champ  $\phi$ , notamment via une contribution d'ordre  $g^2 \langle X^2 \rangle$  à la masse



**530** *Inflation*

effective de  $\leq p$ .

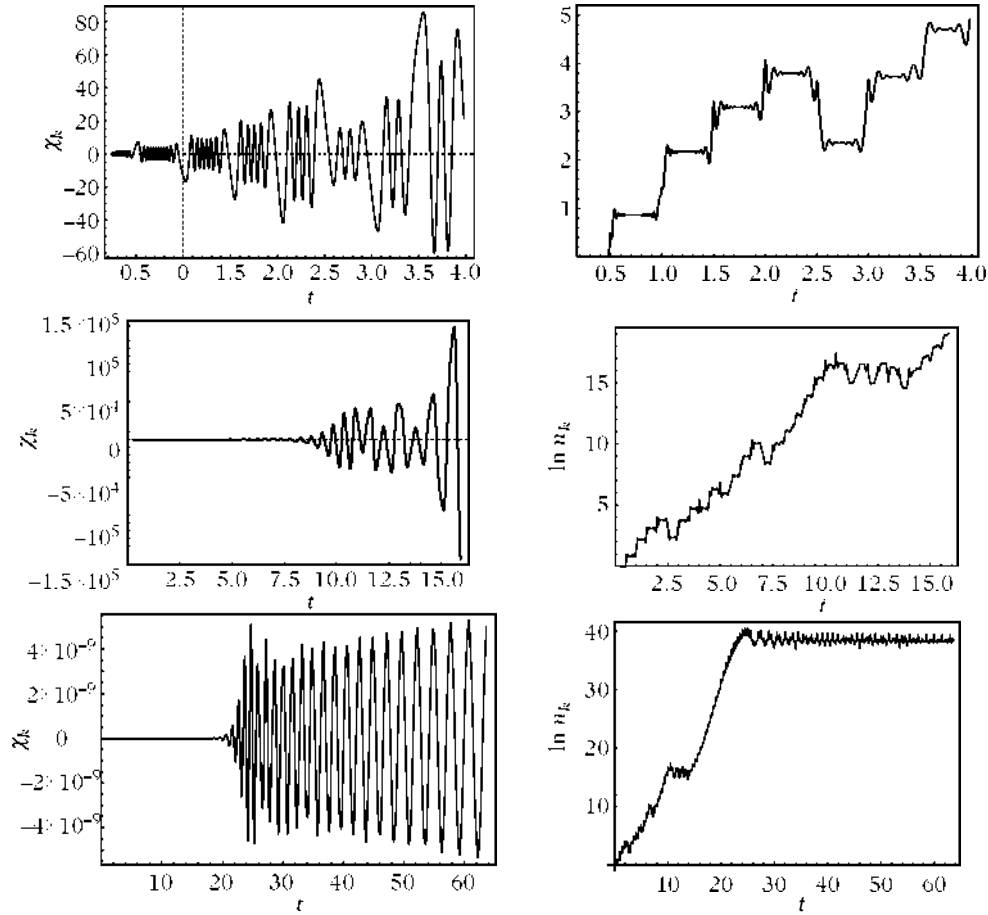


**Fig. 8.15** Evolution of  $X_k$  and of the number of particles  $n_k$  as a function of time in units of  $m/2n$  (i.e. number of oscillations) in an expanding space-time for  $q = 3 \times 10^3$  initially ( $g = 5 \times 10^4$ ,  $m = 10^6 M_P$ ). During the first oscillations (top),  $n_k$  increases but can occasionally decrease, a purely quantum effect that would be impossible if the particles were created in a state of thermodynamic equilibrium. As  $t$  increases,  $q \propto t^2$  and the resonance becomes narrow (middle), then it disappears and  $n_k$  becomes constant (bottom). Adapted from Ref. [38].

Une description plus précise nécessite, dans un premier temps, de prendre en compte la contribution de  $X$  à l'évolution de l'Univers,

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left( \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} \dot{\chi}^2 + \frac{1}{2} \dot{\eta}^2 + \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \dot{\sigma}^2 + \frac{1}{2} \dot{\tau}^2 + \frac{1}{2} \dot{\omega}^2 + \frac{1}{2} \dot{\nu}^2 + \frac{1}{2} \dot{\mu}^2 + \frac{1}{2} \dot{\lambda}^2 + \frac{1}{2} \dot{\kappa}^2 + \frac{1}{2} \dot{\iota}^2 + \frac{1}{2} \dot{\hbar}^2 + \frac{1}{2} \dot{\g}^2 + \frac{1}{2} \dot{\f}^2 + \frac{1}{2} \dot{\e}^2 + \frac{1}{2} \dot{\d}^2 + \frac{1}{2} \dot{\c}^2 + \frac{1}{2} \dot{\b}^2 + \frac{1}{2} \dot{\a}^2 \right) \quad (8.293)$$

où  $p_x$  et  $p_y$  sont les densités d'énergie des particules (c'est-à-dire  $k = 0$ ) de  $x$  et  $y$ .

Il faudrait alors décrire l'évolution couplée des perturbations de  $x$  et  $y$ , qui introduit le tenseur de polarisation pour chaque champ,

$$\dot{X}_k + \frac{1}{2} g_{\text{eff}} \sin^2 X_k = -J'' X_{\text{fo}}(t') n_x(t, t'; \mathbf{k}) \dot{t}', \quad (8.294)$$

$$+ 3 \frac{1}{2} \text{péché}(\text{mt}) \ll k = -J V_k(t') n_v(t, t'; \mathbf{k}) \dot{t}', \text{ où} \quad (8.295)$$

$V_k + v = a^{3/2} S^\wedge$ . Pour aller plus loin, il faudrait donc calculer les tenseurs de polarisation. La description de la phase de préchauffage devient alors plus compliquée et nécessite la réalisation de simulations numériques.

Une manière simplifiée d'aborder la question est de travailler dans l'approximation de Hartree pour laquelle la réaction inverse de  $x$  sur l'évolution de la solution homogène est prise en compte comme

$$\ddot{y} + 3Hy + (m^2 + g(x))y = 0, \quad (8.296)$$

avec

$$(x) = \frac{1}{j} \wedge IX - Ml. \quad (8.297)$$

Ce terme tend à rendre incohérentes les oscillations du gonfleur et à supprimer la résonance. Typiquement, l'inflaton subit quelques dizaines d'oscillations et produit un nombre de particules de l'ordre de  $n_k \sim 10^{-2}$ .

#### 8.6.2.6 Discussion

Les résultats du préchauffage dépendent fortement du modèle. Par exemple, avec le potentiel (8,298)

la résonance ne devient jamais stochastique puisque tous les paramètres de la résonance ont le même comportement en  $\phi$ . Le cas le plus général avec un terme en  $m^2 \phi^2$  et un terme en  $A\phi^3$  donne lieu à diverses possibilités selon la valeur des paramètres [38].

Un autre cas important est celui du réchauffage tachyonique [39] qui repose sur un potentiel effectif de la forme  $V = A(\phi^2 - v^2)^2/4 = A\phi^4/4 - m^2 \phi^2/2 + \dots$ . Le début de la transition de phase ( $\phi \sim 0$ ) est associé à une instabilité tachyonique ( $V'' < 0$ ). Tout mode  $k < m$  croît de façon exponentielle et

$$= r^{kd} k \frac{1}{70^{4n}},$$

until  $(\delta \langle p^2 \rangle) \sim v/4$ . This happens at around  $t^* \sim (2m)^{-1} \ln(n/A)$  and the occupation number grows until

$$n_k \sim \exp(2mt^*) \sim \frac{n^0}{UN} \gg 1.$$

Dans ce cas, le champ décroît avant d'atteindre le minimum du potentiel et la phase de réchauffage est quasi instantanée.

La dynamique du préchauffage est donc très différente de celle proposée par le réchauffage perturbatif. Une question qui n'a pas été abordée est celle de la thermalisation des particules produites. Des phénomènes intéressants peuvent également se produire dans cette phase hors équilibre, comme la restauration des symétries et la possibilité de former des défauts topologiques, ou de subir une phase de gonflement à basse énergie.

Mentionnons que nous n'avons pas abordé l'effet des grandes inhomogénéités de champ

dépendant du temps sur la métrique espace-temps. Ils agissent notamment comme une source de rayonnement gravitationnel [40]. C'est peut-être l'une des seules signatures observationnelles de cette phase. Nous nous référons à la Réf. [41] pour une discussion générale.

Un code numérique en accès libre [42], LATTICEASY, simule l'évolution des champs scalaires en interaction dans un espace-temps en expansion et peut être utilisé pour étudier ces phases de réchauffement.

## 8.7 Inflation éternelle

Les chapitres précédents ont détaillé les signatures observationnelles, principalement sensibles à la dynamique de l'inflation lors des replis électroniques lorsque les modes observables deviennent super-Hubble. Cependant, cette zone de plis ne correspond qu'à une petite région de la dynamique de l'inflation.

La découverte du processus d'auto-reproduction, que nous décrivons ici, constitue une évolution majeure pour l'inflation et la cosmologie. Ce mécanisme était connu pour les modèles d'inflation anciens et nouveaux et a ensuite été étendu aux modèles d'inflation chaotique [43].

### 8.7.1 Argument heuristique

#### 8.7.1.1 Mécanisme

Dans les modèles inflationnistes avec des valeurs élevées de l'inflaton (classe A), les fluctuations quantiques peuvent augmenter localement la valeur de l'inflaton. L'expansion de ces régions est alors plus rapide et leurs propres fluctuations quantiques génèrent de nouveaux domaines inflationnistes. Ce processus conduit naturellement à un Univers auto-reproducteur où il y a toujours des régions en expansion.

Pour comprendre ce mécanisme, nous donnons un argument heuristique. Rappelons que les régions séparées par des distances supérieures à  $H^{-1}$  peuvent être considérées comme évoluant de manière indépendante. Donc toute région de taille  $H^{-1}$  sera considérée comme un Univers indépendant découplé des autres régions.

Considérons une telle région de taille  $H^{-1}$  pour lequel le champ scalaire est suffisamment homogène et vaut  $\phi$  et considérons un potentiel de la forme (8.62). Dans un intervalle de temps  $\Delta t \sim H^{-1}$ , le champ diminue classiquement de  $\Delta\phi \sim \phi \Delta t \sim c\phi/H$ . L'équation de Klein-Gordon en régime de roulis lent implique alors que  $\Delta\phi \sim -M_p^2/4n\phi$ . Cette valeur doit être comparée à l'amplitude typique des fluctuations quantiques,  $|\Delta\phi| \sim H/2n \sim m\phi/y \sim 3nM_p$ .

Les fluctuations classiques et quantiques ont la même amplitude pour

$$|\Delta\phi| \sim M_p^2 \sim \phi^2 \quad (8,299)$$

On peut ainsi distinguer trois phases dans l'évolution de l'inflaton (Fig. 8.16) : une phase pendant laquelle les fluctuations quantiques sont du même ordre (ou plus grandes) que la variation classique du champ, une phase pendant laquelle le champ est dans la forme classique, un roulage lent vers son minimum et une phase où le champ oscille autour de son minimum. Noter que

$V(p^*) = (m/M_{\text{Pl}})M_{\text{Pl}}^4/8 < 10^{-6} M_{\text{Pl}}^4$  de sorte que first regime can be reached even at les énergies sont petites par rapport à  $M_{\text{Pl}}$ .

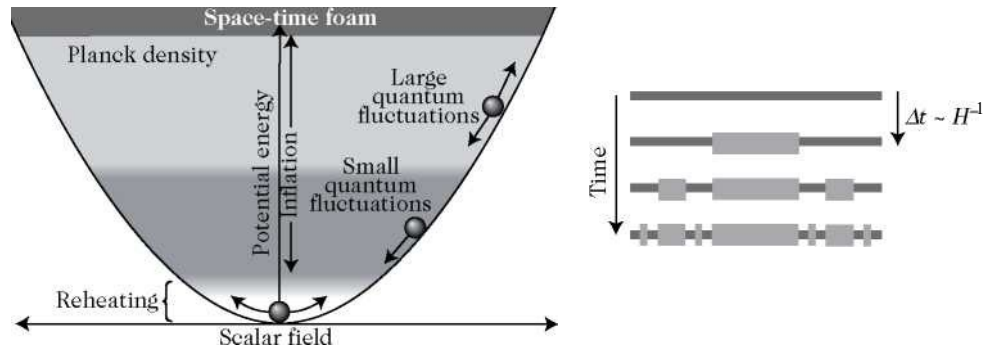


**Fig. 8.16** (left): The three phases of évolution of the inflaton depend on its value compared to  $p^*$ . For  $p > p^*$ , quantum fluctuations are of the same order as (or larger than) the classical variation of the field and the Universe is in a self-reproduction phase. For  $p < p^*$ , quantum fluctuations are negligible and the field rolls slowly towards its minimum. For  $p < p_r$ , the field oscillates around its minimum during the reheating phase. (right): During the self-reproduction phase, in a time  $H^{-1}$ , each region of size  $H^{-1}$  crumbles into roughly 20 regions that become Universes decoupled from one another. Statistically, the value of  $p$  increases in half of them.

Dans le régime où  $p > p^*$ ,  $J_p \approx p$ . La longueur caractéristique des fluctuations  $J_p$  générées pendant le temps  $\Delta t$  est de l'ordre de  $H^{-1}$  pour que le volume initial soit divisé en  $(\exp H \Delta t)^3 \sim 20$  volumes indépendants de rayon  $H^{-1}$ . Statistiquement, la valeur du champ dans la moitié de ces régions est  $p + \Delta p \sim J_p$  et  $p + \Delta p < J_p$  dans l'autre moitié. Ainsi le volume physique des régions où le champ a une valeur supérieure à  $p^*$  est dix fois plus grand

$$V_{t+\Delta t}(p > p^*) \sim 2^{1/3} (\exp H \Delta t)^3 V_t(p > p^*) \sim 10 V_t(p > p^*). \quad (8.300)$$

Le volume physique où l'espace se gonfle croît donc de façon exponentielle avec le temps. Les zones où le champ devient inférieur à  $p^*$  entrent dans une phase de roulage lent. Ils deviennent donc des Univers inflationnistes, découplés du reste de l'Univers, avec une phase de roulement lent, une phase de réchauffage et un Big Bang chaud. Ces zones sont **des univers insulaires** (ou univers de poche) et notre univers observable n'est qu'une infime partie d'un tel univers insulaire.

### 8.7.1.2 Conséquences pour les modèles cosmologiques

Ce scénario a des conséquences importantes pour la cosmologie. Comme nous l'avons vu précédemment, l'Univers a désormais une structure très inhomogène à des échelles supérieures à  $H^{-1}$  : des régions subissant une inflation éternelle donnant continuellement naissance à de nouvelles zones elles-mêmes soumises à l'inflation. À grande échelle, l'Univers présente donc une structure fractale avec une production continue d'Univers insulaires. Chacun de ces Univers insulaires subit alors une phase d'inflation « classique »,

avec un grand nombre de replis et est donc composé de nombreuses régions de la taille de notre Univers observable.

Le modèle simpliste utilisé pour cet argument heuristique utilise un seul champ scalaire et un potentiel avec un minimum unique. En revanche, les modèles réalistes en physique des hautes énergies impliquent de nombreux champs scalaires. Le potentiel de ces champs peut être très complexe et avoir de nombreuses directions et minima plats. Ainsi, la même théorie peut avoir différents vides qui correspondent à différents schémas de rupture de symétrie. Chacune de ces lacunes peut conduire, à basse énergie, à des lois physiquement différentes.

En raison de l'exploration de ce *paysage* par les fluctuations quantiques, l'Univers se retrouve divisé en de nombreuses régions avec des lois physiques différentes (par exemple, différentes valeurs des constantes fondamentales).

Si cette vision de l'Univers primordial est correcte, la physique à elle seule ne peut pas fournir une explication complète de toutes les propriétés de notre Univers observable puisqu'une même théorie physique peut générer de vastes régions aux propriétés très différentes. Ainsi, notre Univers observable aurait les propriétés qu'il possède, non pas parce que les autres possibilités sont impossibles ou improbables, mais simplement parce qu'un Univers avec de telles propriétés permet l'apparition d'une vie similaire à la nôtre.

L'inflation éternelle offre ainsi un cadre pour appliquer le principe anthropique puisque le mécanisme d'auto-reproduction permet de générer des Univers aux propriétés différentes et d'explorer tous les vides possibles de la théorie. De plus, si les conditions nécessaires à l'apparition de la vie existent dans un domaine de la taille de notre Univers observable, alors elles existent aussi dans une région beaucoup plus vaste puisque, dans le contexte d'une inflation éternelle, notre Univers est issu d'une phase d'inflation avec un grand nombre de plis électroniques.

Cette approche est de plus en plus utilisée pour aborder la question de la valeur des constantes fondamentales, ce qui correspond, comme on le verra au chapitre 13, à un choix du vide en théorie des cordes. Dans ce cas, l'espace complet a plus de 4 dimensions, et les nombreux paramètres nécessaires pour décrire la géométrie et la topologie de l'espace de dimensions supplémentaires sont des champs scalaires qui explorent ce qu'on appelle le *paysage* des vides de la théorie des cordes.

Nous disposons ainsi d'un outil pour aborder la vraisemblance de notre Univers et de ses propriétés physiques. Ce cadre nous permet également d'aborder des questions au-delà de l'origine des propriétés de notre Univers, définissant ainsi la limite de ce que nous serons capables d'expliquer.

### 8.7.2 Approche stochastique

Le meilleur outil pour aborder la description de cette phase d'inflation éternelle est l'approche stochastique [44,45]. Cette approche prend en compte les fluctuations quantiques et les intègre dans l'équation de Klein-Gordon, la transformant ainsi en équation de Langevin. Dans certains cas, cette équation peut être écrite sous la forme d'une équation de Fokker-Planck pour la fonction de distribution du champ.

#### 8.7.2.1 Découpe du champ

Dans l'approche stochastique, nous introduisons d'abord une fonction de lissage  $W_R(\mathbf{x})$  où  $R$  est une échelle comobile et l'opérateur  $p$  est ensuite décomposé en deux parties,  $p$  contenant les modes de longueur d'onde longue et  $\hat{p}$  contenant les modes de longueur d'onde courte. Puisque l'échelle de lissage physique est de l'ordre de  $H^{-1}$ , nous posons

$$R = (\text{chaque } H)^{-1}, \quad (8.301)$$

où  $e$  est un coefficient numérique constant. Si  $W_R$  est à symétrie sphérique et  $w(kR)$  sa transformée de Fourier, alors

$$p(\mathbf{x}, t) = p(\mathbf{x}, t) + \hat{p}(\mathbf{x}, t), \quad (8.302)$$

avec

$$p(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} w(kR) [p_k(t) \hat{a}_{\mathbf{k}} + p_k^*(t) \hat{a}_{-\mathbf{k}}], \quad (8.303)$$

de sorte que les composantes de Fourier du champ lissé sont  $p_k = p_k w(kR)$  et  $\hat{p}_k = [1 - w(kR)]p_k$ .

### 8.7.2.2 L'équation de Langevin

En régime de roulis lent, le champ  $p$  satisfait l'équation de Klein-Gordon

$$p(\mathbf{x}, t) = -3H^2 \nabla^2 p + \zeta_Q(\mathbf{x}, t), \quad (8.304)$$

obtenu en insérant la décomposition (8.302) dans l'équation de Klein-Gordon.  $\zeta_Q$  est un bruit quantique décrivant l'effet des courtes longueurs d'onde sur l'évolution du champ lissé. L'équation de Klein-Gordon nous dit que  $\zeta_Q = -\hat{p} - V''(p) \hat{p} / 3H^2$ . Si  $e \ll 1$ , le premier terme domine et

$$\hat{p}(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} w(kR) [p_k(t) \hat{a}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + \text{hc}], \quad (8.305)$$

où nous avons utilisé  $\hat{p}_k = -p_k(1 - w) + w p_k \sim w p_k$  quand  $e \ll 1$ . Nous avons également exprimé  $w$  comme  $w = kR w' = -RH w''$ , où le nombre premier représente une dérivée par rapport à l'argument de la fonction. La fonction de corrélation du bruit ( $\zeta_Q(\mathbf{x}, t)$ ) est donc

$$\begin{aligned} \langle \zeta_Q(\mathbf{x}, t) \zeta_Q(\mathbf{x}', t') \rangle &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sin kR \left( \frac{C}{HR(t)} w[kR(t)] \right) p_k(t) p_k^*(t'), \\ &= [HR(t')] w' \left[ \frac{kR(t')}{HR(t)} \right] p_k(t) p_k^*(t'), \end{aligned} \quad (8.306)$$

après intégration sur les angles.

Bien que  $p$  soit un opérateur quantique, on peut introduire un champ stochastique classique

dont la dynamique est décrite par l'équation de Langevin où le bruit  $\zeta_Q$  est



$$P(t) + A(t) = G(t, t)P(t, t) \quad (8.311)$$

Le calcul de la fonction de Green dans un petit intervalle de temps nécessite d'écrire une version discrète de l'équation de Langevin (8.310). Il n'existe pas de moyen unique d'y parvenir puisque le terme stochastique peut être évalué à différents moments de l'intervalle  $[t, t+\Delta t]$ ,

$$\hat{\phi}(t + \Delta t) = \hat{\phi}(t) + \sum_j W_j \{F[\hat{\phi}_j(t)]\Delta t + a \int \hat{\phi}_j(t) V \hat{\phi} dt\},$$

où  $\hat{\phi}_j(t) = p_j \hat{\phi}(t) + (1 - p_j) \hat{\phi}(t - \Delta t)$  avec  $\sum_j W_j = 1$  et  $p = \frac{1}{2} \sum_j W_j$ . Expansion  
cette équation à l'ordre linéaire en  $\Delta t$ , on obtient

$$\hat{\phi}(t + \Delta t) = \hat{\phi}(t) + \{F[\hat{\phi}(t)] + (1 - P)[\hat{\phi}(t - \Delta t)]\} \Delta t + a[\hat{\phi}(t)]V\Delta t.$$

Les différentes approximations de l'équation de Langevin dans l'intervalle  $\Delta t$  se réduisent donc à une modification de la force  $F$ . Il existe deux choix fréquents,  $p=1$  (version d'Ito) et  $p=1/2$  (version de Stratanovich) qui reviennent à évaluer la bruit au début ou au milieu de l'intervalle de temps. Un tel développement permet alors l'intégration de (8.311) au second ordre dans  $\Delta t$  [47].

La fonction de distribution de probabilité satisfait alors l'équation de Fokker-Planck

$$\frac{dP}{dt} = D J(\phi) = -F[\phi]P + 2V[\phi]P^2 \quad (8.312)$$

Dans notre cas particulier, cette équation prend la forme

$$dP = \left[ V^* W_{P(t,t)} + \frac{H^2}{8n} \Delta H(\phi)^P \right] [H^3(\phi)P(\phi)] \quad (8.313)$$

Sous la forme (8.312), l'équation de Fokker-Planck apparaît comme une équation de continuité qui découle de la conservation des probabilités.

La valeur moyenne de toute fonction de l'opérateur quantique  $l$ ,  $\langle f(l) \rangle$ , peut alors être obtenue comme

$$\langle f(l) \rangle = \int f(\phi) P(\phi, t) d\phi, \quad (8.314)$$

où la valeur moyenne est maintenant calculée à partir du champ stochastique

#### 8.7.2.4 Discussion

L'équation de Fokker-Planck permet d'étudier la dynamique à des échelles supérieures à  $H^{-1}$  sur lequel l'Univers est très inhomogène. A noter que les équations de Fokker-Planck et Langevin ne sont équivalentes que lorsque le bruit n'est pas corrélé. Nous soulignons également que nous avons négligé les perturbations métriques. Une version plus détaillée de l'inflation stochastique peut être obtenue dans la réf. [48].

La solution stationnaire de (8.312) est donnée par

$$P(p, t) = N \exp \left[ -\frac{8nV(p)}{3H^2} \right] \quad v^{-3/2},$$

où  $N$  est un facteur de normalisation. La dépendance au paramètre  $p$  est donc fonction

sous-exponentielle. La solution se rapproche donc asymptotiquement de la distribution

$$P_{eq}(p) = N \exp \left[ -\frac{8nV(p)}{3H^2} \right]$$

A titre d'exemple, si  $V = Ap^4/4$ , alors

$$P_{eq}(p) = \frac{(32nA)^{1/4}}{3} \exp \left[ -\frac{n^2 A^{1/4} p^4}{3H^2} \right] \quad (8.315)$$

La fonction de distribution de  $p$  n'est pas gaussienne et satisfait  $\langle p^2 \rangle = \frac{r}{3} \frac{4}{r+4} \frac{H^2}{n^2 A^{1/4}}$  et  $\langle p^4 \rangle = \frac{r}{3} \frac{4}{r+4} \frac{H^2}{n^2 A^{1/4}} + 0,812$ .

Il est également intéressant d'introduire la probabilité  $P(p, t|x)$  pour que  $p(t)$  ait la valeur  $p$  au temps  $t$  si  $p = x$  initialement. On peut montrer [44] que cette distribution de probabilité conditionnelle satisfait l'équation adjointe de (8.313) appelée équation inverse de Kolmogorov,

$$\frac{dP(p, t|x)}{dt} = \frac{H^2}{3} \frac{d^2 P(p, t|x)}{dx^2} \pm \frac{dV(x)}{dx} \frac{dP(p, t|x)}{dx} \sim 8n \frac{dV(x)}{dx} \frac{dP(p, t|x)}{dx} \quad (8.316)$$

$$P_{eq}(P, x) = \exp \left[ -\frac{8V(x)}{3H^2} \right]$$

La solution stationnaire de cette équation est

$$\exp \left[ -\frac{8V(x)}{3H^2} \right] \quad (8.317)$$

Malheureusement, si  $V = 0$  à son minimum, cette fonction de distribution n'est pas normalisable. Cela est dû au fait qu'un état stationnaire n'existe que si la diffusion stochastique, qui augmente  $p$ , peut compenser la dérive classique vers le minimum du potentiel. Pour  $p < p_{\text{min}}$ , la contribution stochastique n'est plus là. Aucune solution physiquement acceptable ne peut donc être stationnaire.

Pour récupérer la stationnarité, nous devrions introduire la fonction de distribution de probabilité  $P_{\text{phys}}(p, t|x)$ , qui est l'analogue de  $P_{eq}(p, t|x)$  défini ci-dessus mais en termes de volumes physiques au lieu de volumes comobiles. Pendant un intervalle  $dt$ , le volume physique d'une région donnée croît d'une quantité  $3H(p)dt$  de sorte que l'équation d'évolution de  $P_{\text{phys}}(p, t|x)$  est

$$\frac{dP_{\text{phys}}}{dt} = \frac{H V W_P + \frac{H_{\text{SI}} \wedge (p) A}{3H(p)^P_{\text{phys}} + 8n_2}}{dp^{\wedge H(p)^P_{\text{phys}}}} \quad (p)^P \quad a^{+3H(p)^P} + 3H(p)^P_{\text{phys}}$$

or equivalently,

$$\frac{dP_{\text{phys}}}{dt} = \frac{H_{\text{SI}}(x)}{8n_2} \quad 'H(x) \frac{dP_{\text{phys}}}{dx} 1 \quad \frac{V^{\wedge}(x) dP_{\text{phys}}}{(x)^P_{\text{phys}}} + 3H(x)^P_{\text{phys}} dx + 3H$$

If we only consider the regions of space for which the density is lower than the Planck density, these equations then have a stationary solution of the form [44],

$P_{\text{phys}}(<M\%) \sim \exp(cMpt)A(<\mathcal{E})B(x)$ . Si  $V \ll M_{\text{pl}}^3$ , on récupère le résultat que  $B(x) \ll \exp[-3M_{\text{pl}}^2 / 8V(x)]$  et la probabilité normalisée de trouver un volume donné dans un état avec une valeur donnée de  $\mathcal{E}$  est  $P_{\text{phys}}(\mathcal{E}, t|x) \sim A(\mathcal{E})B(x)$ .

Ce résultat a une conséquence importante. Dans l'argument heuristique, nous n'avions qu'une seule région de taille  $H$  avec  $\mathcal{E} \approx \mathcal{E}^*$ . Cependant, si l'on part d'un grand nombre de régions, même avec  $\mathcal{E} < \mathcal{E}^*$ , puisque la probabilité (8,317) est non nulle, certaines d'entre elles peuvent entrer dans une phase d'inflation éternelle.

Cela implique également que toute hypothèse sur l'état initial de l'Univers devient complètement déconnectée des observations. Si une région de l'Univers entre dans une phase d'auto-reproduction, elle produit un nombre infini d'Univers insulaires dont les propriétés se rapprochent de celles d'un état stationnaire, indépendamment des conditions initiales. Nous soulignons la difficulté rencontrée à définir clairement les probabilités et la notion de mesure. Néanmoins, la probabilité d'un déclenchement de l'inflation devient totalement indifférente - dès qu'elle ne disparaît pas complètement.

De plus, il semble que l'Univers ne soit pas éternel dans le passé et qu'il possède encore une singularité initiale [49], au sens où l'espace-temps est géodésiquement incomplet dans le passé (un espace est géodésiquement complet dès que toutes les géodésiques de cet espace peut être poursuivi indéfiniment). Cette conclusion repose sur l'hypothèse que la condition d'énergie faible est satisfaite, cette condition peut cependant être violée par des fluctuations quantiques.

## 8.8 Rallonges

Le cadre précédent est le cadre minimal de l'inflation. Nous présentons maintenant quelques extensions pour montrer la richesse du paradigme inflationniste. Ces extensions nous permettent d'aborder des questions sur la robustesse des prédictions que nous avons établies.

### 8.8.1 Inflation multichamp

Dans les modèles inflationnistes à champ unique, l'inflaton contrôle à la fois l'expansion de l'Univers et la génération de perturbations de densité et d'ondes gravitationnelles. Ceci explique l'existence d'une relation de cohérence.

Les théories des hautes énergies (chapitre 10) contiennent des légions de champs scalaires. Si certains de ces champs sont légers, ils développeront des corrélations super-Hubble. Dans le cadre d'une inflation multidomaine, on peut étendre l'espace des possibilités d'inflation, simplement par une simple « division du travail » entre le domaine de l'inflation et le domaine auxiliaire. En particulier, des champs supplémentaires permettent de concevoir la génération de perturbations d'isocourbure, d'étendre la relation de consistance, de modifier l'indice spectral et de générer des non-gaussianités.

#### 8.8.1.1 Équations de Friedmann et Klein-Gordon

Pour commencer, regardons comment les équations de champ sont modifiées lorsqu'il existe de nombreux champs scalaires. Les équations de Friedmann deviennent

$$4\pi G_N \sum_i \dot{\phi}_i^2 + 2V(\phi_1, \dots, \phi_N) = F = -4\pi G_N \sum_{je} \dot{\phi}_{je}^2 - 2V(\phi_1, \dots, \phi_N) \quad (8,318)$$

et l'équation de Klein-Gordon pour chaque champ prend la forme

$$c_{pi} + 3 \sum_{j \neq i} \dot{\phi}_j^2 = \frac{1}{2} \dot{\phi}_i^2. \quad (8.319)$$

Ces  $N$  équations sont couplées si  $V$  n'est pas la somme de  $N$  potentiels, c'est à dire de la forme  $V(\phi_1, \dots, \phi_N) = \sum_{i=1}^N V_i(\phi_i)$ . Notez cependant que même en l'absence d'interactions explicites dans le champ scalaire lagrangien, les champs sont toujours couplés gravitationnellement et, en particulier, l'amortissement de Hubble qui entre dans les équations individuelles de Klein-Gordon implique la somme de tous les champs.

Considérons, pour simplifier, le cas de deux domaines. Les deux champs peuvent être décomposés en une partie tangente à la trajectoire dans l'espace du champ,  $u$ , et une partie perpendiculaire,  $s$ ,

$$\phi_i = \phi_i^0 + \delta\phi_i = \phi_i^0 + \delta s + \delta u_i, \quad (8.320)$$

où l'angle  $\theta$  est défini par

$$\cos \theta = \frac{\dot{\phi}_1}{\sqrt{\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2}}, \quad \sin \theta = \frac{\dot{\phi}_2}{\sqrt{\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2}} \quad (8.321)$$

La relation (8.320) implique que  $s$  est constant et l'équation de Klein-Gordon se réduit à

$$U + 3HU + U_{,a}U_{,a} = 0, \quad \dot{V} + 3H\dot{V} = 0. \quad (8.322)$$

L'équation de Friedmann prend la forme

$$H^2 = \frac{1}{3} [\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2 + 2V(u, s = \text{const.})], \quad (8.323)$$

puisque la valeur de  $s$  est une constante, par construction, le long de la trajectoire. Les champs  $u$  et  $s$  sont les composantes adiabatiques et d'isocourbure de  $(\phi_1, \phi_2)$ .

### 8.8.1.2 Exemples

Comme exemple de dynamique de l'inflation multichamp, citons l'inflation assistée [50] dans laquelle on considère  $n$  champs scalaires à forts potentiels exponentiels.

$$V \sim \sum_i U_i \exp\left(-\frac{m_{A_i} \phi_i}{M_P}\right)$$

Chaque potentiel de champ scalaire est trop raide pour entraîner l'inflation à lui seul si  $A_i > 2$  the additional damping effect due to the collective presence of the scalar field in the Friedmann equation leads to a particular power-law solution,  $a \propto t^p$  with  $p = 2/A_i$ .

mais où les champs combinés ont un potentiel effectif  $V \propto \exp(-\sqrt{8n} \phi / M_P)$ . Ainsi  $A = 0$  lorsque le nombre de champs augmente ( $n \propto$ ) et on peut avoir une inflation lente même si chaque  $A_i > 2$ .

Another topical example is Nflation [51] in which the effective potential is of the form

$$V = \frac{1}{2} \sum_i m_i^2 \phi_i^2$$

$i$

The case  $n = 1$  is indeed our standard chaotic inflationary model. But to get inflation, we have seen that the initial value of the scalar field should be several Planck masses. With many fields, the collective dynamics can yield inflation even for sub-Planckian initial values of the fields.

### 8.8.1.3 Perturbation equations

Using the definitions (8.126) and (8.127), the perturbation equations (8.129)-(8.131) take the form

$$\delta\dot{\phi} + H\delta\phi = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \delta\phi + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \delta\phi \quad (8.324)$$

$$\delta\ddot{\phi} + 3H\delta\dot{\phi} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \delta\phi = -4\pi G_N \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \delta\phi + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \delta\phi \right) \quad (8.325)$$

$$\delta\ddot{\phi} + 3H\delta\dot{\phi} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \delta\phi = -2V + 4\pi G_N \delta\phi, \quad (8.326)$$

where we have used  $\delta\phi = \delta\phi$ . By construction,  $\delta\phi$  is gauge invariant so that  $\delta\phi = Q_s = \delta\phi$ , while  $Q_s = X_s + \delta\phi/H$ . Using

$$M = -f/MJ, \quad \delta M = -f/MJ - f/M, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (8.327)$$

the Klein-Gordon equation (8.326) takes the form

$$\delta\ddot{\phi} + 3H\delta\dot{\phi} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \delta\phi = -2V + 4\pi G_N \delta\phi \quad (8.328)$$

and the Poisson equation becomes

$$4\pi G_N \delta\phi = \delta\ddot{\phi} + 3H\delta\dot{\phi} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \delta\phi \quad (8.329)$$

avec  $f) = -U, s/\delta$ . Puisque le potentiel  $U$  satisfait

$$\frac{U_{,ss}}{U_{,ss}} = MV_j M, \quad (8.330)$$

on en déduit le système couplé pour les perturbations



$$X_a + 3H X_a + \dots + U_{,aa} X_a = a^{-2} \left( \dot{U}_a + 4\dot{a} \dot{S} + 2(-\dot{S}S) - 2U_{,a} S \right) \quad (8.331)$$

$$S\dot{S} + 3HS\dot{S} + \frac{A}{a} \frac{\dot{S}}{H} = -7 \frac{\dot{A}}{2} \quad (8.332)$$

Equation (8.331) translates into an evolution equation for  $Q_a$

$$Q_a + 3H Q_a = \frac{[4 + 2 - U_{,aa}]}{a} \frac{1}{H} (< aH) \quad Q_a = 2 \frac{H}{H} S \quad (8.333)$$

#### 8.8.1.4 Modes adiabatiques et isocourbures

En définissant les perturbations de courbure comme dans (8.151), nous trouvons que

$$R = C + \frac{1}{3} (\dot{\zeta} + S\dot{\zeta} + 9\dot{S}^2) = C + \frac{1}{3} S a^2 \dot{Q}_a \cdot P + P \quad (8.334)$$

Cette équation peut aussi prendre la forme

$$R = -RV_1 + \text{péché} \cdot RV_2 \quad (8.335)$$

Ainsi  $a$  joue le rôle du gonfleur et ses perturbations génèrent des perturbations de courbure. Les fluctuations de  $s$  n'affectent pas  $R$ ;  $s$  est un mode d'isocourbure.

$R$  n'est désormais plus conservé (Chapitre 5). Définir l'entropie comme

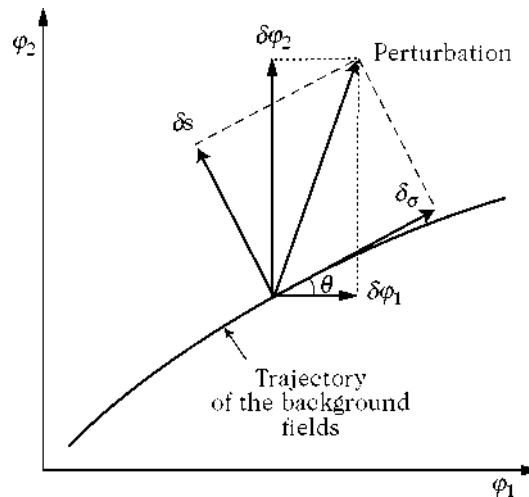


**Fig. 8.17** Illustration of the scalar field decomposition into an adiabatic perturbation, tangent to the trajectory, and an isocurvature component.

$$s = H(T - T_0) = 7 \times 10^{-10} \text{ m}^2$$

puis pour les modes super-Hubble, (5.150) nous apprend que

$$7R = \frac{HA}{H_{\text{une}}^2} A - 3Hc \frac{?}{s} S. \quad (8.336)$$

Nous constatons donc que

$$7R = \frac{HAH}{H_{\text{une}}^2} S + 2c \frac{?}{s} \frac{0\delta}{un}. \quad (8.337)$$

Tant que  $\theta = 0$ , les deux modes de perturbations sont découplés :  $\delta s$  se comporte comme un champ scalaire de test évoluant dans un espace-temps non perturbé et les perturbations métriques ne sont couplées qu'à  $\delta$ . Si  $\theta = 0$ , les modes isocourbure et adiabatique peuvent se mélanger et  $R$  n'est plus constant, même pour les modes super-Hubble.

#### 8.8.1.5 Modes d'isocourbure corrélés

Ce cadre offre une phénoménologie riche que nous ne pouvons détailler.

L'un des aspects les plus intéressants concerne les perturbations d'isocourbure. Comme vu précédemment, un champ scalaire ne développe des perturbations super-Hubble que s'il est léger. L'équation (8.332) nous dit que la masse effective du champ  $s$  est  $U_{,ss} + 3\theta^2$ , de sorte que des perturbations d'entropie super-Hubble ne se produiront que si

$$U_{,ss} + 3\theta^2 < 2H^2. \quad (8.338)$$

En supposant que les deux champs sont légers et qu'initialement  $\theta = 0$ , ce qui est le cas en régime de roulis lent, les champs seront découplés et chacun d'eux générera des fluctuations super-Hubble,  $Q_{ijk} = aH = (H^2/2f e_i) e_j(\mathbf{k})$ , où  $e_j$  est une variable aléatoire satisfaisant  $\langle e_i(\mathbf{k}) e_j(\mathbf{k}') \rangle = \delta_{ij} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ . La relation (8.320) implique que  $\delta$  et  $s$  satisfont des relations équivalentes et sont proportionnels à deux variables aléatoires,  $e_a$  et  $e_s$ , qui ne sont pas corrélées [puisqu'elles sont liées à  $e_1$  et  $e_2$  par (8.320)]. Au cours de l'évolution ultérieure des modes super-Hubble, (8.331) a un terme source proportionnel à  $\delta s$  si  $\theta = 0$ . Ainsi, au cours de cette évolution, les fluctuations métriques développent une composante proportionnelle à  $e_s$ . Nous en déduisons que les perturbations de courbure et d'entropie peuvent être corrélées,

$$(RS) = 0, \quad (8.339)$$

ou de manière équivalente,  $(Q_s \delta s) = 0$ . Pour aller plus loin, nous devrions préciser comment les deux champs se désintègrent afin de déterminer quel type de perturbations d'isocourbure sont créées. Un exemple intéressant [52] considère un modèle de double inflation [53] avec un potentiel  $V = m_1^2/2 + m_2^2/2$  et suppose que  $\phi_1$  se désintègre en matière noire froide et  $\phi_2$  en rayonnement.

À l'ère des radiations, la courbure « primordiale » et les perturbations d'entropie sont

$$\text{données par } ({}^R Z) = ({}^1 S)({}^R) \blacksquare$$

Dans la matrice de transfert,  $T_{RR} = 1$  puisque la perturbation de courbure est conservée pour toutes les perturbations strictement adiabatiques et  $T_{SR} = 0$  car les perturbations adiabatiques ne peuvent générer aucune perturbation d'isocourbure.

Le spectre de puissance des perturbations de courbure est donc la somme de deux composantes ayant des spectres différents. En effet, en régime de roulis lent, le spectre de  $S$  est déterminé par celui de  $\delta s$  et dépend donc de sa masse et des paramètres de roulis lent, alors que celui de  $R$  dépend uniquement des paramètres de roulis lent.

#### 8.8.1.6 Conclusion pour les prédictions de l'inflation

Dans ce cadre, deux des prédictions de l'inflation à champ unique sont modifiées : (1) les perturbations ne sont plus adiabatiques et (2) le spectre des modes scalaires n'est plus une loi de puissance presque invariante à l'échelle. Nous pouvons également montrer que la relation de consistance (8.239) s'étend à une relation plus générale [54]. Définir

$$r_z = \frac{(\delta R)_{\text{adi}}}{(\delta R)_{\text{tot}}} = \frac{(\delta S)_{\text{adi}}}{(\delta S)_{\text{tot}}} \quad (8.341)$$

avec  $A_z$  défini par  $\tau = 2(\xi S)/5$ , la relation de consistance devient

$$r_z = \frac{2}{5} \frac{(\delta S)_{\text{adi}}}{(\delta S)_{\text{tot}}} \quad (8.342)$$

Quand  $r_c = 0$ , les modes sont complètement découplés et on retrouve la relation habituelle. Notez que cela implique que  $r_c \rightarrow -n_s/2$ , l'égalité étant atteinte uniquement dans le cas d'une inflation à champ unique.

#### 8.8.1.7 Scénario Curvaton

Ce scénario [55-57] relie l'origine des fluctuations primordiales non pas à l'inflaton mais aux fluctuations quantiques d'un champ auxiliaire,  $x$ , maintenant appelé courvaton (la réf. [55] n'a pas nommé le champ supplémentaire).

Le champ  $x$  doit d'abord être léger lors du gonflage ( $m_x < H^*$ ) afin de développer des fluctuations super-Hubble. Son spectre de puissance possède alors un indice spectral donné par (8.120). Ensuite, les perturbations de courbure générées par le gonflement devraient être négligeables, ce qui est possible si l'échelle d'énergie du gonflement est suffisamment basse,  $H^* e^{i\phi} < 10^4 MP$ .

Dès que la constante de Hubble devient inférieure à la masse de la courbure, celle-ci se met à osciller et se comporte comme un fluide sans pression. Cela peut se produire après la fin de l'inflation. Si  $H^* < C x^*$ , le contraste de densité de ce fluide est  $5p_x/p_r = 25x/x^*$ , donc  $\rho_x/\rho_r = H^*/nx^*$ . Dans cette phase, l'Univers est composé d'un mélange de matière et de rayonnement. Les quantités  $Z_{\text{BST}}$  pour le rayonnement et  $x$  sont conservées séparément puisque les deux fluides n'interagissent pas. La perturbation totale de la courbure est donc

$$Z_{\text{BST}} = \frac{4p_r C_r + 3p_x Z_x}{4p_r + 3p_x}$$

Avant le début de la phase oscillatoire,  $Z_{\text{BST}} = Z_r$ , ce qui était supposé négligeable. Donc,

$$Z_{\text{BST}} = 4 + \frac{r}{37} \frac{p_r}{x}, \quad r = p; \bullet \quad (8,343)$$

Selon que  $x$  se désintègre avant ou après avoir dominé le contenu en matière de l'Univers,  $Z = S_x/3$  ou  $Z = rS_x/4$ .

Enfin, le champ  $x$  devrait se désintégrer et transférer ses perturbations au rayonnement ou à la matière. Cela impose une contrainte sur la masse de la courbure puisque cette désintégration doit avoir eu lieu avant la nucléosynthèse primordiale. Dans la version la plus simple de ce scénario, toutes les perturbations de la courbure sont transformées en perturbations adiabatiques.

Contrairement à l'inflation, les fluctuations de densité primordiale sont sensibles à la physique une fois devenues super-Hubble. De plus, la génération d'ondes gravitationnelles est déconnectée de celle des perturbations de densité. La relation de cohérence est donc perdue et  $R_{\text{C}}$ .

#### 8.8.1.8 Fluctuations modulées

Les champs lumineux peuvent modifier les prévisions d'inflation d'une autre manière. Si le terme de couplage de l'inflaton aux champs de matière dépend de la valeur d'un tel champ lumineux selon

$a(M)$  alors le taux de décroissance de l'inflaton pendant la phase de réchauffage peut varier aux échelles super-Hubble [58,59]. Depuis  $r_x a^2 m_v$  et la température de réchauffage est  $T_{\text{reh}} = E_{\text{v}} M_P$ , on en déduit que cela induit des fluctuations de densité pour le fluide rayonnant de l'ordre de

$$\frac{\delta p_r}{p_r} \sim \frac{S T_{\text{reh}}}{T_{\text{reh}}} \frac{S a}{a} \frac{1}{a_{\text{reh}}^M}$$

Si les perturbations métriques produites lors de l'inflation sont négligeables, le potentiel gravitationnel durant l'ère de la matière est alors de l'ordre de  $\Phi = S r_v / T v$  [59].

Ce scénario peut également être mis en œuvre dans le cadre d'une inflation hybride [60] où la phase de réchauffage est tachyonique. La transition entre la phase inflationniste et l'ère des radiations peut être considérée comme instantanée. Si le potentiel effectif est du

form

$$1 \text{ je } (X \setminus f_2 \quad 2 \setminus \quad \cdot \cdot \cdot (x) \quad V=4 \text{ M}^{\wedge} \text{M}^{a-v}) + \wedge F \sim + V(\zeta \gg),$$

la fin de l'inflation se produit lorsque  $\langle \xi \rangle_c(x)$ . Pour  $\langle p_c \rangle$ ,  $a = 0$  et le système se découple en un système qui décrit les perturbations couplées aux métriques et  $x$  comme un champ de test avec un potentiel  $A(x/M)^v/4$ . En utilisant les conditions de jonction (8.167) et (8.168) sur la surface  $q =$

—  $y_c(x)$ , on peut montrer

$$R_{\text{RDU}} = R_{\text{inf}} —$$

avec  $y = \text{dip } \epsilon / dx$  au moment de la transition. Si  $x$  est léger lors du gonflage, il génère alors des fluctuations super-Hubble qui modulent la fin du gonflage. Puisque  $m^{\wedge} =$

## 550 Inflation

$(v/4)dA/dx \sim$ ,  $x$  ne peut être léger que si  $A$  ne dépend pas du champ, le la dépendance de doit alors être héritée de  $g$ .

Le spectre de puissance des ondes gravitationnelles n'est pas sensible à la forme précise de la transition entre l'inflation et l'ère des radiations. Nous en déduisons que la relation de dispersion prend la forme

$$1 + 4ny \quad (8.344)$$

Encore une fois, nous constatons que  $R < E$ .

### 8.8.2 Non-gaussianité

Puisque les perturbations de courbure primordiales sont liées aux fluctuations quantiques d'un champ scalaire initialement dans son état de vide, elles ont des statistiques gaussiennes. Tant que l'évolution des perturbations est linéaire, aucune non-gaussianité ne peut être générée.

Cependant, comme la relativité générale est non linéaire, nous nous attendons à quelques écarts par rapport à la gaussianité. En particulier, de tels écarts peuvent être importants dans le cas d'une inflation multidomaine.

Cette question et les contraintes observationnelles sont détaillées dans la revue [61].

#### 8.8.2.1 Gonflage à un seul champ

En négligeant les contributions des perturbations métriques, l'équation de Klein-Gordon pour un champ scalaire prend généralement la forme

$$+ 3H\dot{g} > \frac{k^2}{2} - J, = -V''\dot{y} - 3V' \cdot (5y \cdot 2 + \dots) \text{un}$$

Pour que le champ génère de la non-gaussianité pendant la phase inflationniste, les termes non linéaires doivent être non négligeables. Si le terme quadratique domine le développement de la droite alors  $> V''/V'$ . Comme vu précédemment,  $\sim H$ . Alors que la bande de longueur d'onde  $[A, A + \Delta A]$  associée aux échelles observables est devenue super-Hubble, le paramètre de roulis lent  $g_v$  a varié de  $\Delta g_v \sim (8\pi G \dot{V} - f \dot{V}) / f \dot{V} \Delta y / M_P$ . Nous en déduisons que pendant un certain nombre de e-folds  $N$ ,  $g_v$  varie de  $10^{-n} N$ , en utilisant pour ces modes  $H/E \sim 10^{-2} M_P$ .

Ainsi, si le terme quadratique domine, le régime de roulement lent se termine rapidement. En effet, le régime de roulement lent impose le potentiel d'être très plat alors qu'il doit avoir une courbure significative pour que les termes non linéaires dominent. Ceci explique pourquoi les perturbations initiales restent gaussiennes pendant la phase inflationniste.

Au second ordre dans les perturbations, les non-linéarités peuvent induire une certaine non-gaussianité, mais cette dernière doit être faible. Une façon de paramétrer cet effet est d'introduire une déviation (satisfaisant l'axe statistiques) qui caractérise la fonction à trois points. Dans l'espace de Fourier,

$$\tilde{I} = \int_{\text{NL}} (\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}) \delta_{\text{lin}}(\mathbf{k}_1) \delta_{\text{lin}}(\mathbf{k}_2) \delta_{\text{lin}}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2), \quad (8.345)$$

où  $f_{\text{NL}}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k})$  est une fonction qui peut être calculée dans certains modèles [61] et  $T_{\text{lin}}$  est le potentiel de Bardeen en régime linéaire. Avec cette définition,

$$\langle S_{\text{FCX}} \mathbf{PR} \mathbf{PR} \rangle = \frac{J_0(\mathbf{fe}_1 + \mathbf{fe}_2 + \mathbf{fe}_3)}{(2n)^{3/2}} \left[ f_{\text{NL}}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) P_{\text{lin}}^*(\mathbf{MP}^n(\mathbf{k}_2)) \right. \\ \left. + (1 - 2 - 3) + (1 - 3 - 2) \right].$$

Plusieurs  $f_{\text{NL}}$  sont introduits dans la littérature, selon la variable dont ils paramétrisent la non-gaussianité, par exemple  $f_{\text{NL}}^S$  ou  $f_{\text{NL}}^R$  ou  $f_{\text{NL}}^R$  défini par  $\exp 2R = 1 + 2R$ . Ces  $f_{\text{NL}}$  sont liés par

$$f_{\text{NL}}^{(0)} = 3 f_{\text{NL}}^R, \quad f_{\text{NL}}^{(E)} = f_{\text{NL}}^R + j e$$

Dans un modèle d'inflation à champ unique, la non-gaussianité est induite par la dynamique du second ordre et ce coefficient est typiquement de l'ordre de [62] où  $g(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)$  est une fonction telle que  $g \rightarrow 0$  dans la limite  $k_1 \ll k, k_2 \ll k$  ou  $k_2 \ll k, k_3 \ll k$ . Comme prévu  $f_{\text{NL}}$  est de l'ordre des paramètres de slow-roll.

$$f_{\text{NL}}^{(k_1, k_2, k_3)} \approx 4^{(n_s - 1)} + \frac{1}{2} g(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3), \quad (8.346)$$

L'analyse des données WMAP [29] peut être utilisée pour établir la contrainte

$$-9 < f_{\text{NL}} < 111 \quad (8.347)$$

à un niveau de confiance de 95 % si  $f_{\text{NL}}$  est constante. Les expériences futures, comme Planck, espèrent pouvoir atteindre une valeur de  $f_{\text{NL}} \sim 5$ .

Dans le contexte des modèles mono-champ, une alternative consiste à considérer des potentiels qui ont des échelles caractéristiques pour lesquelles la dérivée du potentiel varie très rapidement [63]. Ces modèles induisent une non-gaussianité localisée à l'échelle donnée.

Pour plus de détails concernant la théorie des perturbations cosmologiques au second ordre et son implication sur la non-gaussianité, nous renvoyons le lecteur aux Refs. [62,64-66].

### 8.8.2.2 Extensions permettant la génération de non-gaussianité

Diverses extensions du modèle à champ unique permettent la production d'une non-gaussianité importante. Citons différentes sources qui ont été considérées et nous nous référons à la Réf. [61] pour une revue de l'état de l'art.

- **défauts topologiques** : ces modèles introduisent des champs scalaires avec une contribution négligeable à l'énergie de fond. Ce sont donc de pures perturbations. L'énergie étant quadratique par rapport au champ, elle induit une certaine non-gaussianité dans les perturbations. On peut citer les modèles de  $y$  - 'graines' [67], d'axions [68] et de défauts topologiques [69].
- **inflation multichamp** : Dans ce cas, les effets non linéaires peuvent être beaucoup plus importants dans le sens de l'isocourbure sans affecter la dynamique de l'inflation. Le champ auxiliaire devient non-gaussien et cette non-gaussianité est ensuite transférée au mode adiabatique dans une phase ultérieure pour laquelle  $\dot{f} = 0$  [61] ou contribue à un mode d'isocourbure [55]. Il est intéressant de noter que la fonction de distribution de probabilité en un point de la perturbation de courbure à la fin du gonflement peut être calculée exactement [70].

## 552 Inflation

- **courvaton** : dans la limite où  $H^* \propto x^*$ , la perturbation est plus grande que l'imper-  
valeur turbidée pour que le contraste de densité pendant la phase où la courvaton os-  
cillates soit  $\delta = (\delta x^*)/(\langle \delta x^* \rangle)$ . Ce régime est fortement contraint par les observations, mais  
dans le cas intermédiaire où  $H^* \sim x^*$  la perturbation de courbure (8.343) devient [57]  
conduisant à  $\delta = -7/6 - 5r/6 + 5/4r$  auquel il faut ajouter le effets des perturbations au

$$\delta_{\text{BST}} = 4 \quad (?)^{2''}$$

second ordre.

### 8.8.3 Problème trans-planckien

Les prédictions de l'inflation sont basées sur l'utilisation de la théorie quantique des champs dans un espace-temps courbe. Même si la métrique est traitée de manière quantique, nous avons montré qu'en ordre linéaire, techniquement tout se réduit à la quantification d'un champ scalaire libre dans un espace-temps de Friedmann-Lemaître.

#### 8.8.3.1 Origine du problème

Si l'on considère, pour être concret, un modèle inflationniste avec un potentiel de la forme (8.68) avec  $n = 4$ , (8.70) implique que la valeur de l'inflation au moment où les échelles observables deviennent super-Hubble est  $(y^*/M_P)^4 = (N^* + 1)/n$ . Nous en déduisons que le paramètre de Hubble est alors  $(H^*/M_P)^2 = X_4 (p^*/M_P)^4 = \text{UNE}_4 (N^* + 1)^{3/n}$ . D'après (8.69), le paramètre de roulement lent est  $\xi^* = 1/(N^* + 1)$ , d'où nous déduisons que

$$\frac{H^*}{\xi^* M_P} = \frac{1}{n} (N^* + 1).$$

Les contraintes observationnelles imposent que cette quantité soit de l'ordre de  $10^{-2}$ , ce qui fixe  $A_4 \sim 10^{-3}$ , en utilisant  $N^* \sim 60$ . Cependant, la condition initiale d'inflation chaotique  $V(y) \sim$

$M_P^4$  impose que le nombre total de e-folds soit de l'ordre de  $N \sim 5 \times 10^4$ . Nous en déduisons que la longueur d'onde du mode correspondant aujourd'hui au rayon de Hubble,  $l_{H_0} \sim 10^{26} \text{ m}$ , avait une longueur d'onde de l'ordre de  $l_H \sim 10^{-3} \exp(-N) C l_P$ . Ainsi les modes observables aujourd'hui avaient une longueur sous-planckienne au début de l'inflation.

Nous pouvons estimer le nombre de plis  $e$  nécessaire pour que les échelles observables soient sous-planckiennes lors de l'inflation à partir de (8.61). En supposant que  $T_{\text{reh}} \sim V^{1/4} \sim 10^{16} \text{ GeV}$ , cette relation nous indique que le mode correspondant à l'échelle de Hubble avait aujourd'hui une longueur de Planck d'environ 70 e-folds avant la fin du gonflage.

De manière générique, une dizaine de plis  $e$  au-delà des 60 plis  $e$  requis sont suffisants pour que les modes actuellement observables soient sous-planckiens. Il est légitime de se demander dans quelle mesure les résultats obtenus jusqu'à présent sont robustes par rapport à la physique inconnue à l'échelle de Planck. Comme l'illustre la figure 8.18, au moment où ces modes deviennent super-planckiens, la constante de Hubble est bien en dessous de l'échelle de Planck, ce qui implique que la description de l'espace-temps avec un espace-temps de Friedmann-Lemaître reste justifiée. Le problème trans-planckien [71] ne fait donc intervenir que des

fluctuations et se distingue de la question de la description espace-temps lorsque  $V(y) \sim M_P^4$ .

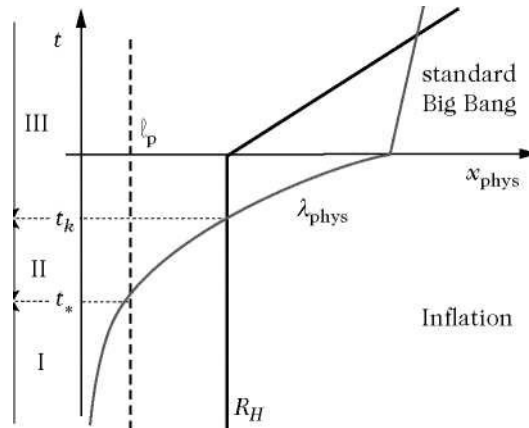


**Fig. 8.18** Evolution de la longueur d'onde physique d'un mode donné et du rayon de Hubble en fonction du temps. Le mode devient super-Hubble à  $t_k$  et est sous-Planckien pour  $t < t_*$ . Dans la région II, le mode sous-Hubble est cis-Planckien ; c'est dans ce régime que l'approche de la théorie quantique des champs est sous contrôle.

Deux questions liées se posent alors. Les prédictions sur l'inflation sont-elles robustes par rapport à cette physique inconnue et cette physique peut-elle laisser une signature observationnelle ? Le principal problème pour répondre à ces questions réside dans le fait que cette physique est jusqu'à présent inconnue. Il est donc difficile de prévoir son influence sur l'inflation. Pour contourner ce problème, la question a été résolue jusqu'à présent en introduisant des modifications *ad hoc* de la théorie quantique des champs, censées décrire les modifications issues de la gravité quantique. La conclusion de ces études est double. Si les prédictions de l'inflation sont robustes par rapport à ces modifications, alors il est raisonnable de penser qu'elles le seront également par rapport à celle induite par la gravité quantique. Si ce n'est pas le cas, alors la vraie théorie est nécessaire pour déterminer les amplitudes exactes des effets attendus.

Parmi les nombreuses propositions dans la littérature, nous en décrivons deux, la modification de la relation de dispersion et l'approche dite « minimale ».

### 8.8.3.2 Modèle avec une relation de dispersion modifiée

L'approche initiale de ce problème suit celle développée pour étudier le rayonnement Hawking des trous noirs. L'origine du terme en  $k^2$  dans l'équation d'évolution de  $v_k$  et  $p_k$  peut être attribuée à l'hypothèse que la relation  $\omega_{\text{phys}} = k_{\text{physique}}$  était satisfaite. Tout comme la relation de dispersion change en physique de la matière condensée à mesure que la longueur d'onde devient de l'ordre de la distance interatomique, on peut conjecturer que la relation de dispersion des fluctuations quantiques sera modifiée pour des longueurs d'onde physiques de l'ordre de la longueur de Planck. On peut donc espérer modéliser la structure « discrète » de l'espace-temps en modifiant la relation de dispersion en

$$k_{\text{physique}} = \sqrt{k_{\text{physique}}^2 + \ell_p^2}; \quad (8.348)$$

ce qui, en termes de quantités à déplacer, revient à la modification



$$k^2 \quad k f f(k, n) = a^2 F^2 (= w(k, n)). \quad (8.349)$$

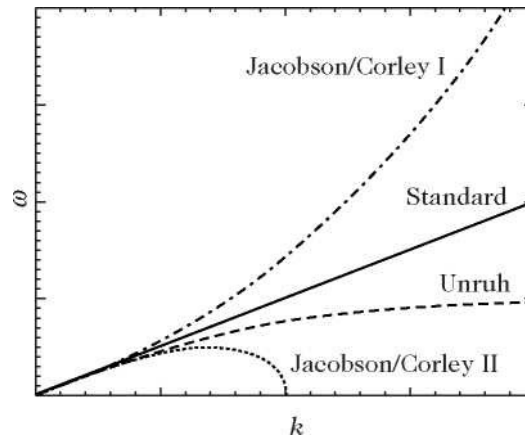


**Fig. 8.19** Some of the dispersion relations considered in the literature.

La fonction  $F$  est linéaire tant que  $k/a \ll k_c$ , où  $k_c$  est une nouvelle échelle. La figure 8.19 illustre quelques relations de dispersion utilisées. La relation de dispersion devient alors dépendante du temps et l'équation d'évolution  $\omega_k$  ou  $\omega_k$  devient

$$v_k + (k, n) v_k = 0$$

On peut obtenir une dérivation rigoureuse de cette équation à partir d'un principe

$$(k, n) = \omega(k, n) - \quad (8.350)$$

variationnel [72]. A noter que l'équation d'évolution reste linéaire, la gaussianité sera préservée.

Pour suivre la procédure standard, nous demandons que  $v_k$  satisfasse la normalisation Wronskienne (8.182). Il faudrait alors imposer une condition de positivité pour la fréquence des modes, car ces modes seront ensuite utilisés pour définir les opérateurs  $a_k$  à partir desquels l'espace de Fock peut être construit. Physiquement, il faudrait imposer qu'à l'instant initial  $n_i$ , les modes  $k/a H$  soient dans leur état fondamental. Dans l'approche habituelle, il n'y a aucune ambiguïté dans la définition du vide puisque  $k$  est constante. Avec une relation de dispersion modifiée,  $w$  dépend de  $n$  même à l'instant initial. On perd donc la définition classique du vide.

Une solution est d'utiliser l'approche adiabatique [24] et de supposer que la configuration initiale minimise sa densité d'énergie. Cette densité énergétique prend la forme [72]

$$\frac{1}{4na} \int dk k \left( \left( \frac{v_k}{a} \right)^2 + W \frac{|V_k|^2}{|a|} \right) \quad (8.351)$$

En décomposant  $v'_k$  comme  $v'_k = x + iy$  et en imposant la normalisation (8.182), la minimisation de l'énergie implique que

$$v_k(n_i) = \frac{w(k, m)}{k} \quad (8.352)$$

Cette prescription coïncide avec celle obtenue en choisissant localement un état de Minkowski lorsque  $w = k$ . Ce vide adiabatique est associé à une solution, de type dite WKB- [73], de fréquence positive avec  $|a_k| = |p_k| = 1$ . Cela implique que les fluctuations primordiales sont modulées et que tout se passe comme si l'on définissait le vide en  $n_i$  d'un état sans vide. Dans la région II (Fig. 8.19), le terme  $z''/z$  est négligeable et  $F = k/a$ . Nous en déduisons que le spectre primordial devient

$$V_k = \frac{1}{2k} \exp \left[ -i \int_{n_i}^{n_f} w(k, u) du \right] \quad (8.353)$$

This solution is valid as long as the adiabaticity condition

$$\left| \frac{1}{a} \frac{d}{dn} \left( \frac{H}{w} \frac{d \ln w_{\text{phys}}}{d \ln k_{\text{phys}}} \right) \right| \ll 1 \quad (8.354)$$

is satisfied.

If this adiabaticity condition is not violated between  $n_i$  and a time  $n_f$  for which the dispersion relation is linear and the mode is sub-Hubble, then the solution for  $n > n_f$  is

$$V_k = \frac{1}{2k} \exp \left[ -i \int_{n_i}^{n_f} w(k, u) du \right] \quad (8.355)$$

The phase has no effect on the absolute value of  $v_k$  and on the observables.

So, in order for a modification to be present, the dispersion relation must be such that there is a violation of the WKB regime. In this case, the solution at  $n_f$  is of the form

$$V_k = \frac{1}{2k} \exp \left[ -i \int_{n_i}^{n_f} w(k, u) du \right] + P_k \exp \left[ +i \int_{n_i}^{n_f} w(k, u) du \right] \quad (8.356)$$

$$P = P_0 \{ 1 + 2e^{i\phi} [P_k(e^{i\phi})] + O(P^2) \}, \quad (8.357)$$

où  $P_0$  est le spectre obtenu en utilisant la condition (8.184) et  $p_k$  est une phase. Cette relation est valable si

$$\frac{k}{H} \gg 1. \quad (8.358)$$

En élargissant la solution au second ordre dans l'approximation WKB, on peut montrer que si (8.354) est satisfait entre  $n_i$  et  $n_f$  alors  $p_k \sim \exp(-i \int_{n_i}^{n_f} w(k, u) du)$ . En conclusion, si la condition (8.354) est satisfaite et  $a \gg 1$  alors les prédictions d'inflation ne sont pas modifiées [74]. En revanche, si ces conditions ne sont pas satisfaites, des modulations spectrales apparaissent du fait de l'existence de modes de fréquence négative en  $n_f$ . Cependant, cette situation est contrainte puisqu'un état hors vide est à l'origine d'une contre-réaction gravitationnelle importante. cela pourrait mettre en péril l'ensemble du régime inflationniste.

### 8.8.3.3 Relation de commutation et approche minimale

Une deuxième approche repose sur une modification des relations de commutation de la mécanique quantique [75]. En supposant que les relations de commutation standards deviennent

$$[x, p] = i\hbar (1 + \alpha p^2 + \dots),$$

alors la relation d'incertitude se transforme en

$$\Delta x \cdot \Delta p > \frac{\hbar}{2} (1 + \alpha \Delta p^2 + \dots).$$

Cela implique l'existence d'une distance minimale  $l_{\min} = \sqrt{\hbar/\alpha}$ . Cette modification a deux effets. L'équation d'évolution des perturbations est modifiée et la relation d'incertitude sature lorsque la longueur d'onde physique est de l'ordre de  $l_{\min}$ . On peut alors supposer que chaque mode possède son propre temps de création défini par

$$t_k = t_{\min}, \quad (8.359)$$

puisque cela n'a aucun sens de parler de fluctuations avant  $p_k$ . Donc  $p_k$  dépend de  $k$ , ce qu'il faut comparer au cas standard où  $p_k = \sqrt{\hbar k}$  —œ pour tous les modes.

Une approche minimale [76] tente d'éluder complètement le problème trans-planckien. Il suppose que le mode est créé à  $p_k$  puis évolue avec l'équation standard (8.179). L'état le plus général en  $p_k$  est de la forme

$$|c_k + d_k\rangle = i(c_k - d_k) \hat{a}(k, p_k) \quad (8.360)$$

with  $|c_k| + |d_k| = 1$ . Les coefficients peuvent être développés en fonction de  $a = H l_{\min}$  comme

$$c_k = 1 + ya + \dots \quad d_k = xa + \dots$$

Lorsqu'un  $\theta$ , on récupère la prescription du vide habituel ( $c_k = 1$  et  $d_k = 0$ ). Les paramètres  $x$  et  $y$  sont totalement libres et  $a$  est un petit paramètre. Nous pouvons montrer que cela induit la présence d'oscillations d'amplitude  $|x|a$  dans le spectre de puissance [77],

$$P_z = \frac{H^2}{4\pi^2 M^2} \left( \frac{a}{\Lambda} \right)^2 \left( 1 - 2|x|a \cos \left( \frac{2\pi}{\Lambda} (1 + \epsilon + \epsilon \ln k l_{\min}) + a \right) \right) \quad (8.361)$$

où est une phase à comparer avec (8.227). La longueur d'onde des oscillations est  $\Lambda \ln k = a/\epsilon$ . De plus, pour éviter la réaction gravitationnelle, nous devrions avoir  $|x| < 10 \cdot a/\epsilon$ .

### 8.8.3.4 Réaction en retour

Comme l'illustre l'exemple de la relation de dispersion modifiée, ces modèles conduisent généralement à des états avec  $\dot{f}_k = 0$  à l'instant  $t_k$ . Ainsi, ces modèles se résument grosso modo

à considérer un mélange de fréquences positives et négatives à ce moment initial.

Si les modes observables sont initialement dans un état hors vide, alors leur densité d'énergie domine rapidement celle de l'espace de Friedmann-Lemaître. En effet, un tel mode devient super-Hubble à  $N(k) \sim 56 - \ln(hk/a_0 H_0)$  e-folds avant la fin du gonflement. Son élan physique est alors  $k_{\text{phys}} = H_{\text{inf}}$ . Ce mode avait donc un élan  $k_{\text{phys}} = \exp(N_i) H_{\text{inf}}$  au début de l'inflation,  $N_i = N_{\text{total}} - N(k)$ . Comme vu précédemment, en général  $N_i \gg 1$  si les conditions initiales chaotiques sont imposées. La densité énergétique de ce mode est de l'ordre de  $5p_k \sim n_k \exp(4N_i) H_{\text{inf}}^4 / 2n^2$  en supposant que l'énergie du point zéro a été soustraite. Nous en déduisons que

$$\rho_{\text{critique}}^k \sim n_k \exp(4N_i) \quad (8,362)$$

Pour éviter tout problème de réaction en retour, ce nombre doit être inférieur à l'unité. En fixant l'échelle d'inflation à  $10^{-5} M_{\text{Pl}}$ , cela impose que

$$n_k < \exp(28 - 4N_{\text{je}}) \Leftrightarrow N_{\text{je}} < 7. \quad (8,363)$$

Cette restriction n'est pas naturelle, de sorte que nous devrions conclure que nous avons besoin de  $n_k \ll 1$ . La contre-réaction gravitationnelle n'est donc évitée que si ces modes sont initialement dans le vide ou dans un état extrêmement proche. Le problème général de la réaction inverse est discuté dans la réf. [78].

Dans le cas des relations de dispersion modifiées, on peut conclure de manière générique que si la condition d'adiabaticité (8.354) a été violée lors de l'évolution d'un mode donné, alors lorsque cette condition est rétablie, ce mode se comporte comme un mélange de fréquences positives et négatives, ce qui signifie qu'un certain nombre de quanta ont été créés et que leur densité d'énergie est aujourd'hui grande par rapport à la densité critique de l'Univers [72,79].

Dans le cas trans-Planckien, on peut montrer que si la condition d'adiabaticité est violée pendant une période  $\Delta \ln n = e$  alors  $\tilde{f} \ll e$  et  $a_k \sim 1 - e$ . La densité d'énergie des fluctuations est alors de  $5p \sim O(c^2 k'^2 c)$  de sorte que pour éviter tout problème de réaction en retour, on devrait avoir  $ek \ll M_{\text{Pl}} \inf[\tau_2]$ .

Le problème de la réaction en retour est un problème générique des modifications trans-planckiennes. En général, imposer que ce problème soit résolu, réduit à zéro la possibilité d'observer d'éventuels effets spécifiques.

## 8.9 Statut du paradigme

### 8.9.0.5 Prédictions génériques

Les modèles inflationnistes à champ unique comportent des prévisions robustes, indépendantes de leur mise en œuvre spécifique.

- L'Univers observable doit être homogène et isotrope. L'inflation efface toutes les inhomogénéités classiques. L'Univers observable peut ainsi être décrit par un Univers de Friedmann-Lemaître.
- L'Univers doit être spatialement plat. Lors de l'inflation, la courbure de l'Univers est supprimée de façon exponentielle. L'inflation prédit donc que  $f_l = 1$  jusqu'à l'amplitude

des perturbations de densité de super-Hubble, soit jusqu'à environ  $10^{-4}$ .

- Des perturbations scalaires sont générées. L'inflation trouve l'origine des perturbations de densité dans les fluctuations quantiques de l'inflaton qui sont amplifiées et décalées vers le rouge aux échelles macroscopiques. Tous les modes correspondant aux échelles observables aujourd'hui sont des super-Hubble en fin d'inflation. L'inflation prédit que ces perturbations sont adiabatiques, ont des statistiques gaussiennes et ont un spectre de puissance presque invariant à l'échelle. L'indice spectral peut varier légèrement avec la longueur d'onde. Ces perturbations sont cohérentes, ce qui se traduit par une structure de pics acoustiques dans le spectre de puissance angulaire des anisotropies de température du CMB (Chapitre 6).
- Il n'y a pas de perturbations vectorielles. Les modes vectoriels sont supprimés de manière exponentielle.
- Des ondes gravitationnelles sont générées. De la même manière que pour les modes scalaires, les ondes gravitationnelles ont une origine quantique et sont produites par amplification paramétrique. Ils ont également des statistiques gaussiennes et un spectre de puissance presque invariant à l'échelle. Il existe une relation de cohérence entre leur indice spectral et l'amplitude relative des modes scalaire et tensoriel.
- Tout champ de test de lumière génère des fluctuations super-Hubble. Les fluctuations quantiques de tout champ lumineux ( $M < H$ ) sont amplifiées. Ce champ développe des fluctuations super-Hubble d'amplitude  $H/2n$ .

Plus généralement, les modèles inflationnistes changent radicalement notre vision de la cosmologie à deux égards.

- Les particules sont produites par le mécanisme de préchauffage. La décroissance de l'inflation permet d'expliquer la production de particules en fin d'inflation.
- L'inflation est éternelle. En plaçant les modèles inflationnistes dans le contexte de conditions initiales chaotiques, nous obtenons une image très différente de l'Univers. Cette dernière devrait être en éternelle inflation et donne naissance à des Univers insulaires.

Nous pouvons conclure que l'inflation offre un cadre satisfaisant pour réfléchir sur l'Univers, et en particulier sur les conditions initiales. Il résout les problèmes cosmologiques et décrit l'origine de la structure à grande échelle.

#### 8.9.0.6 Contraintes actuelles

Les observations cosmologiques nous permettent de tester la dynamique de l'inflation au cours des 8 à 10 e-folds au cours desquels les échelles observables deviennent super-Hubble. L'étude de cette phase repose principalement sur l'approximation du roulement lent.

Les observations actuelles, et en particulier celles de WMAP [28], peuvent être utilisées pour contraindre certains paramètres des spectres primordiaux. Les observations du fond diffus cosmologique sont compatibles avec les fluctuations primordiales gaussiennes, adiabatiques et presque à grande échelle.

Les ondes gravitationnelles n'ont pas encore été détectées et leur contribution est contrainte à être inférieure à 30 % du signal total. Comme nous l'avons souligné, leur détection est essentielle pour vérifier la relation de cohérence, qui serait une preuve d'inflation. La mesure d'un  $r$  peut être limitée en utilisant l'observation à des échelles plus petites, comme une lentille faible [80] ou la forêt Lyman- $\alpha$ .

L'inflation prédit un Univers plat ( $|Q_0 - 1| < 10^{-4}$ ) et les observations actuelles sont compatibles avec  $Q_0 = 1$ . Les données WMAP-1 favorisaient légèrement un univers sphérique [28] puisque  $Q_0 = 1,02 \pm 0,02$ . Bien que des données plus récentes, conduisant à  $Q_0 = 1,0049 \pm 0,013$  [29], ne supportent plus un Univers fermé, nous soulignons que la détection d'une courbure positive, même petite, serait en soi un problème majeur pour l'inflation [81]. Pour cela modélisons l'inflation par une phase de De Sitter avec  $K = +1$ . Le facteur d'échelle évolue comme  $a = a_0 \cosh^{1/3}(A/3t)$  et  $S = Q - 1$  évolue comme  $S = 1/\sinh^2(A/3t)$ , où  $t = 0$  correspond au minimum du facteur d'échelle lors du gonflage. L'instant auquel le mode  $k_0 = a_0 H_0$  devient super-Hubble est donc donné par  $y^{1/3} A/3t^* = \text{arcsinh}(1/\sqrt{S_0})$ . Nous en déduisons que le nombre maximal de e-folds avant cet instant, c'est à dire entre  $t = 0$  et  $t^*$ , est

$$N_{\text{maximum}} = 1 \ln + \xi) - 2, \quad (8,364)$$

pour  $S_0 = 0,02$ . L'image de la phase primordiale serait donc fortement modifiée s'il était démontré qu'une courbure non nulle était présente, même si nous disposons aujourd'hui de la meilleure estimation  $Q_0 = 1,0049 \pm 0,013$  [29]. Des modèles de gonflage ouvert [82] et fermé [83] ont été proposés. Nous soulignons que l'existence d'une courbure induit une échelle caractéristique qui peut être associée à un écart par rapport à une loi de puissance stricte pour le spectre de puissance primordial. La robustesse par rapport à un cisaillement primordial a été étudiée dans la Réf. [84].

Enfin, la structure causale de l'inflation a été étudiée et on peut montrer que la singularité initiale prévaut [49]. En ce sens, la théorie n'est pas complète et le problème des conditions initiales n'est pas défini.

### 8.9.0.7 Conclusions

L'inflation à un seul champ a des prévisions robustes, testables et falsifiables. Il s'agit donc d'un modèle physique tout à fait satisfaisant qu'il convient d'accommoder dans le cadre du modèle cosmologique standard. Ce modèle inclut donc le modèle chaud du Big-Bang, qui décrit l'évolution post-inflationniste de notre Univers, et le modèle de l'inflation qui décrit sa phase primordiale.

Ce modèle est prédictif et ses prédictions, basées sur la relativité générale et la théorie quantique des champs, ne sont pas contestées. D'un point de vue technique, l'analyse linéaire repose donc sur une base solide. Notez cependant que ces prédictions sont basées sur l'hypothèse d'un roulement lent au second ordre. Ces prédictions ne sont pertinentes que pour une dizaine d'e-folds,

- i. e. un petit intervalle de variation du gonflement.

Dans ce cadre, il faut donc ajouter 5 paramètres cosmologiques supplémentaires : l'amplitude, les indices spectraux des spectres de densité et de puissance des ondes gravitationnelles et leurs dérivées, soit 6 paramètres moins 1 pour la relation de consistance. Les amplitudes typiques des fluctuations de densité et des ondes gravitationnelles sont  $H^2/\epsilon$  et  $H$ . Les observations impliquent que l'échelle énergétique de l'inflation est de l'ordre de  $10^{16}$  GeV.

Il reste encore à construire des modèles explicites qui s'intègrent naturellement dans le cadre de la physique des hautes énergies. Les théories grand unifiées et supersymétriques ont de nombreux candidats au champ scalaire. Mais il faut souligner qu'à ce jour aucun champ scalaire n'a encore été directement détecté. Notez également que ce champ scalaire n'est pas

nécessairement un champ fondamental puisque les théories  $f(R)$  sont dynamiquement équivalentes à la relativité générale avec un champ scalaire non couplé de manière minimale. Ainsi, une question centrale de ces modèles est de *savoir quelle est la nature de l'inflation ?*

Ce modèle possède également de nombreuses extensions (inflation multichamp,...) qui permettent de tester la robustesse des prédictions. Il offre, avec l'inflation éternelle, un cadre pour utiliser le principe anthropique.

D'autres questions restent ouvertes et nécessitent des études plus approfondies. C'est le cas pour les modes trans-planckiens, pour la rétroaction des perturbations et pour la complétude passée de l'inflation.

## Les références

- [1] E. GLINER , « Propriétés algébriques du tenseur énergie-impulsion et des états de la matière de type vide » *Sov. Phys. JETP* , **22** , 378, 1966.
- [2] R. BROUT , F. ENGLERT et E. GUNZIG , « La création de l'Univers en tant que phénomène quantique », *Ann. Phys.* **115** , 78, 1978.
- [3] A. STAROBINSKY , « Spectre du rayonnement gravitationnel relique et état primitif de l'Univers », *JETP Lett.* **30** , 682, 1979.
- [4] A. GUTH , « Univers inflationniste : une solution possible aux problèmes d'horizon et de planéité », *Phys. Rev. D* **23** , 347, 1981.
- [5] AD LINDE , « Un nouveau scénario inflationniste : une solution possible aux problèmes d'horizon, de planéité, d'homogénéité, d'isotropie et de monopole primordial », *Phys. Lett. B* **108** , 389, 1982 ;
- [6] V. MUKHANOV et G. CHIBISOV , « Fluctuations quantiques dans un univers non singulier », *JETP Lett.* **33** , 532, 1981.
- [7] S. HAWKING , « Le développement d'irrégularités dans un univers inflationniste à bulle unique », *Phys. Lett. B* **115** , 295, 1982 ; A. STAROBINSKY , « Dynamique de transition de phase dans le nouveau scénario inflationniste et génération de perturbations », *Phys. Lett. B* **127** , 175, 1982 ; A. GUTH et S.-Y. PI , « Fluctuations dans le nouvel univers inflationniste », *Phys. Le révérend Lett.* **49** , 1110, 1982 ; J. BARDEEN , P. STEINHARDT et M. TURNER , « Création spontanée de perturbations de densité presque sans échelle dans un univers inflationniste », *Phys. Rev. D* **28** , 679, 1983.
- [8] A. LINDE , « Inflation chaotique », *Phys. Lett. B* **129** , 177, 1983.
- [9] A. LINDE , *Physique des particules et cosmologie inflationniste* , Harwood Academic Publishers, 1990.
- [10] V. MUKHANOV , H. FELDMAN ET R. BRANDENBERGER , « Théorie des perturbations cosmologiques », *Phys. Rep.* **215** , 203, 1992 .
- [11] D. LYTH et A. RIOTTO , « Modèles de physique des particules de l'inflation et de la - perturbation de la densité cosmologique », *Phys. Rep.* **314** , 1, 1999.
- [12] A. GUTH et E. WEINBERG , « L'Univers aurait-il pu se remettre d'une lente transition de phase de premier ordre ? », *Nuc. Phys. B* **212** , 321, 1983.
- [13] A. ALBRECHT et P. STEINHARDT , « Cosmologie pour de grandes théories unifiées avec rupture de symétrie induite par rayonnement », *Phys. Le révérend Lett.* **48** , 1220, 1982.



- [14] D. SALOPEK et JR BOND , « Évolution non linéaire des fluctuations métriques de grande longueur d'onde dans les modèles inflationnistes », *Phys. Rév.D* **42** , 3936, 1990.
- [15] F. LUCCHIN et S. MATARRESE , « Inflation selon la loi de puissance », *Phys. Rév.D* **32** , 1316, 1985.
- [16] D. POLARSKI et A. STAROBINSKY , « Semi-classicalité et décohérence des perturbations cosmologiques », *Classe. Quant. Grav.* **13** , 377, 1996.
- [17] A. LICHNEROWICZ, *Théories relativistes de la gravitation and de l'électromagnétisme*, 542 *References*  
 Masson, 1955; W. ISRAËL, 'Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity', *Nuovo Cimento B* **44**, 1, 1966 and correctif dans *Nuovo Cimento B* **48**, 463, 1966; G. DARMOIS, *Les équations de la gravitation einsteinienne*, Memorial des sciences mathématiques **XXV**, Gauthier-Villars, 1927; K. LANCZOS, 'Flächenhafte Verteilung der Materie in der Einsteinschen Gravitationstheorie', *Ann. Phys. (Leipzig)* **74**, 518, 1924.
- [18] B. CARTER , « Essentiels de la dynamique classique des branes », *Int. J. Théor. Phys.* **40** (2001) 2099.
- [19] JC HWANG et ET VISHNIAC , « Conditions de jonction invariantes de jauge pour les perturbations cosmologiques », *Astrophys. J.* **382** , 363, 1991.
- [20] N. DERUELLE et V. MUKHANOV , « Sur les conditions correspondantes pour les perturbations cosmologiques », *Phys. Rév. D* **52** , 5549, 1995.
- [21] J. MARTIN et DJ SCHWARZ , « L'influence des transitions cosmologiques sur l'évolution des perturbations de densité », *Phys. Rév. D* **57** , 3302, 1998.
- [22] V. MUKHANOV , *Sov. Phys. JETP* **68** , 1297, 1988 ; M. SASAKI , *Prog. Théorique. Phys.* **76** , 1036, 1986.
- [23] A. GRIB , S. MAMAEV et V. MOSTEPANENKO , *Effets quantiques dans des champs externes forts* , Atomizdat, Moscou, 1980.
- [24] N. BIRELL et P. DAVIES , *Champs quantiques dans un espace courbe* , Cambridge University Press, 1982.
- [25] D. LYTH et ED STEWART , « Un calcul analytique plus précis du spectre des perturbations cosmologiques produites pendant l'inflation », *Phys. Lett. B* **302** , 171, 1993.
- [26] ED STEWART et J.-O. GONG , « Les spectres de puissance de perturbation de densité pour les corrections de second ordre dans l'expansion lente », *Phys. Lett. B* **510** , 1, 2001.
- [27] A. KOSOWSKY et M. TURNER , « Anisotropie CBR et fonctionnement de l'indice spectral scalaire », *Phys. Rév.D* **52** , R1739, 1995.
- [28] D. Spergel *et al.* , 'Observations WMAP de première année : détermination des paramètres cosmologiques', *Astrophys. J. Suppl.* **148** , 175, 2003.
- [29] E. KOMATSU *et coll.* , 'Observations WMAP sur cinq ans : interprétation cosmologique', *Astrophys. J. Suppl.* **180** , 330, 2009.
- [30] S. LEACH et A. LIDDLE , « Contraindre l'inflation lente avec WMAP et 2dF », *Phys. Rév.D* **68** , 123508, 2003.

- [31] A. LIDDLE et S. LEACH , « Combien de temps avant la fin de l'inflation des perturbations observables se sont-elles produites ? », *Phys. Rév. D* **68** , 103503, 2003 ; S. DODELSON et L. HUI , « Un ratio d'horizon lié aux fluctuations inflationnistes », *Phys. Le révérend Lett.* **91** , 131301, 2003.
- [32] D. LYTH , « Qu'apprendrions-nous en détectant un signal d'onde gravitationnelle dans l'anisotropie du fond diffus cosmologique ? », *Phys. Le révérend Lett.* **78** , 1861, 1997.
- [33] L. KNOX et M. TURNER , 'Déteçtabilité des perturbations tensorielles par anisotropie du rayonnement de fond cosmique', *Phys. Le révérend Lett.* **73** , 3347, 1994.
- [34] L. KNOX et Y.-S. CHANSON , « Une limite à la déteçtabilité de l'échelle énergétique de l'inflation », *Phys. Le révérend Lett.* **89** , 011303, 2002 ; M. KESDEN , A. COORAY et M. KAMIONKOWSKY , « SÉPARATION DES ONDES GRAVITATIONNELLES ET des contributions du cisaillement cosmique à la polarisation du fond micro-ondes cosmique », *Phys. Le révérend Lett.* **89** , 011304,

- [35] J. LIDSEY *et coll.* , 'Reconstruire le potentiel d'inflation - un aperçu', *Rev. Mod. Phys.* **69** , 373, 1997.
- [36] M. HOFFMAN et M. TURNER , « Contraintes cinématiques des principaux observables inflationnistes », *Phys. Rév. D* **64** , 023506, 2001 ; W. KINNEY , « Inflation : flux, points fixes et observables dans un ordre arbitraire en cours lent », *Phys. Rév. D* **66** , 083508, 2002 ; R. EASTHER et W. KINNEY , « Reconstruction Monte Carlo du potentiel inflationniste », *Phys. Rév. D* **67** , 043511, 2003.
- [37] A. LIDDLE , « Sur les équations des flux inflationnistes », *Phys. Rév. D* **68** , 103504, 2003.
- [38] Y. SHTANOV , J. TRASCHEN et R. BRANDENBERGER , « Réchauffement de l'univers après l'inflation » *Phys. Rév. D* **51** , 5438, 1995 ; L. KOFGAN , A. LINDE et A. STAROBINSKY , « Vers la théorie du réchauffement après inflation », *Phys. Rév. D* **56** , 3258, 1997 ; P. GREENE *et coll.* , 'Structure de résonance en préchauffage après gonflement', *Phys. Rév. D* **56** , 6175, 1997.
- [39] G. FELDER *et al.* , 'Dynamique de rupture de symétrie et de préchauffage tachyonique', *Phys. Lett. B* **87** , 011601, 2001.
- [40] SY KHLEBNIKOV et II TKACHEV , « Ondes gravitationnelles reliques produites après préchauffage », *Phys. Rév. D* **56** , 653, 1997.
- [41] J.-F. DUFAUX *et al.* , 'Théorie et numérique des ondes gravitationnelles du préchauffage après inflation', *Phys. Rév. D* **76** , 123517, 2007.
- [42] TREILLIS FACILE :  
<http://physics.stanford.edu/gfelder/latticeeasy/> ;  
 G. Felder et I. Tkachev, *LATTICEASY : un programme de simulations sur réseau de champs scalaires dans un univers en expansion* , [hep-ph/0011159].
- [43] A. VILENKIN , « Naissance des univers inflationnistes », *Phys. Rév. D* **27** , 2848, 1983 ;  
 A. LINDE , « Univers inflationniste chaotique auto-reproducteur existant éternellement », *Phys. Lett. B* **175** , 395, 1986 ; AS GONTCHAROV , AD LINDE et VF MUKHANOV , « La structure globale de l'univers inflationniste », *Int. J. Mod. Phys. A* **2** , 561 , 1987.
- [44] A. STAROBINSKY , « Stade stochastique de Sitter (inflationniste) au début de l'Univers », *Lect. Notes Phys.* **246** , 107, 1986 ; A. STAROBINSKY et J. YOKOYAMA , « État d'équilibre d'un champ scalaire auto-interactif dans le contexte de De Sitter », *Phys. Rév. D* **50** , 6357, 1994 ; A. LINDE , D. LINDE et A. MEZHLUMIAN , « De la théorie du Big-Bang à la théorie d'un univers stationnaire », *Phys. Rév. D* **49** , 1783, 1994.
- [45] S. WINITZSKI et A. VILENKIN , « Bruit efficace dans une description stochastique de l'inflation », *Phys. Rév. D* **61** , 084008, 2000.
- [46] J. MARTIN et M. MUSSO , 'Quintessence stochastique', *Phys. Rév. D* **71** , 063514, 2005.
- [47] S. CHANDRASEKHAR , « Problèmes stochastiques en physique et en astronomie », *Rev. Mod. Phys.* **15** , 1, 1943.
- [48] DS SALOPEK et JR BOND , « Inflation stochastique et gravité non linéaire », *Phys. Rév. D* **43** , 1005, 1991.

2002

- [49] A. BORDE et A. VILENKIN , « L'inflation éternelle et la singularité initiale », *Phys. Lett. B* **72** , 3305, 1993 ; A. BORDE et A. VILENKIN , « La singularité dans les situations inflationnistes »

- cosmologie : une revue", *Int. J. Mod. Phys. D* **5**, 813, 1996.
- [50] AR LIDDLE , A. MAZUMDAR ET FE SCHUNCK , « Inflation assistée », *Phys. Rév. D* **58** , 061301, 1998.
- [51] S.Dimopoulos ET *al.* , 'N-inflation', [hep-th/0507205].
- [52] D. LANGLOIS , 'Perturbations adiabatiques et isocourbures corrélées dues à la double inflation', *Phys. Rév.D* **59** , 123512, 1999.
- [53] D. POLARSKI et AA STAROBINSKY , « Perturbations d'isocourbure dans plusieurs modèles inflationnistes », *Phys. Rév. D* **50** , 6123, 1994.
- [54] N. BARTOLO , S. MATARRESE et A. RIOTTO , « Perturbations adiabatiques et isocourbures dues à l'inflation : spectres de puissance et relations de cohérence », *Phys. Rév.D* **64** , 123504, 2001.
- [55] AD LINDE et VF MUKHANOV « Perturbations d'isocourbure non gaussiennes dues à l'inflation » *Phys. Rév.D* **56** , R535, 1997.
- [56] T. MOROI et T. TAKAHASHI , « Effets des champs de modules cosmologiques sur le fond cosmique des micro-ondes », *Phys. Lett. B* **522** , 215, 2001.
- [57] D. LYTH et D. WANDS , « Générer des perturbations de courbure sans gonflement », *Phys. Lett. B* **524** , 5, 2002.
- [58] L. KOFMAN , *Sonder la théorie des cordes avec des fluctuations cosmologiques modulées* , [astro-ph/0303614].
- [59] G. DVALI , A. GRUZINOV et M. ZALDARRIAGA , « Un nouveau mécanisme pour générer des perturbations de densité à partir de l'inflation », *Phys. Rév. D* **69** , 023505, 2004.
- [60] F. BERNARDEAU , L. KOFMAN et J.-P. UZAN , « Fluctuations modulées de l'inflation hybride », *Phys. Rév. D* **70** , 083004, 2004.
- [61] N. BARTOLO *et al.* , « Non-gaussianité issue de l'inflation : théorie et observations », *Phys. Rep.* **402** , 103 , 2004.
- [62] J. MALDACENA , 'Caractéristiques non gaussiennes des fluctuations primordiales dans les modèles inflationnistes à champ unique', *JHEP* **0305** , 013, 2003.
- [63] A. STAROBINSKY , « Au-delà des modèles cosmologiques inflationnistes les plus simples », *Grav. Cosmol.* **4** , 88, 1998.
- [64] K. NAKAMURA , « Théorie des perturbations cosmologiques invariantes de jauge de second ordre », *Prog. Théorique. Ph.* **117** , 7, 2007.
- [65] S. WEINBERG , « Contributions quantiques aux corrélations cosmologiques », *Phys. Rév. D* **72** , 043514, 2005.
- [66] D. SEERY et JE LIDSEY , « Non-gaussianités primordiales dans l'inflation à champ unique », *JCAP* **0506** , 003, 2005.
- [67] PJE PEEBLES , 'Un modèle d'isocourbure pour l'assemblage précoce des galaxies', *Astrophys. J.* **483** , L1, 1997.
- [68] TJ ALLEN *et coll.* , « Perturbations de densité non gaussiennes dans les cosmologies inflationnistes », *Phys. Lett. B* **197** , 66, 1987.

- [69] A. GANGUI et S. MOLLERACH , « Signatures non gaussiennes du fond micro-onde cosmique provenant de modèles de texture analytiques », *Phys. Rév. D* **54** , 4750, 1996 ;  
R. DURRER , M. KUNZ et A. MELCHIORRI , « Formation de structures cosmiques avec défauts topologiques », *Phys. Rapport* **364** , 2002.
- [70] F. BERNARDEAU et **J.-P.** UZAN , « Non-gaussianité dans l'inflation multichamp », *Phys. Rév.D* **66** , 103506, 2002.

- [71] R. BRANDENBERGER et J. MARTIN , « Le problème transplanckien de la cosmologie inflationniste », *Phys. Rév.D* **63** , 123501, 2001.
- [72] M. LEMOINE *et coll.* , 'Le tenseur énergie-contrainte pour la cosmologie trans-planckienne', *Phys. Rév. D* **65** , 023510, 2002.
- [73] A. MESSIE , *Mécanique quantique* , Dunod, 1964 ; Voir également J. MARTIN et DJ SCHWARZ , « approximation WKB pour les perturbations cosmologiques inflationnistes », *Phys. Rev. D* **67** , 083512, 2003 pour l'application cosmologique de cette méthode.
- [74] J. NIEMEYER et R. PARENTANI , « Dispersion trans-planckienne et invariance d'échelle des perturbations inflationnistes », *Phys. Rév.D* **64** , 101301, 2001.
- [75] A. KEMPF et J. NIEMEYER , 'Spectre de perturbation dans l'inflation avec coupure', *Phys. Rév.D* **64** , 103501, 2001.
- [76] U. DANIELSSON , « Note sur l'inflation et la physique transplanckienne », *Phys. Rév. D* **66** , 023511, 2002.
- [77] J. MARTIN et C. RINGEVAL , « Oscillations superposées dans les données WMAP ? », *Phys. Rév.D* **69** , 064406, 2004.
- [78] V. MUKHANOV , R. ABRAMO et R. BRANDENBERGER , « Sur le problème de la réaction inverse pour les perturbations gravitationnelles », *Phys. Le révérend Lett.* **78** , 1624, 1997 ; R. ABRAMO , R. BRANDENBERGER et V. MUKHANOV , « Le tenseur énergie-impulsion pour les perturbations cosmologiques », *Phys. Rév.D* **56** , 3248, 1997.
- [79] T. TANAKA , Un *commentaire sur la physique trans-planckienne dans l'univers inflationniste* , [astro-ph/0012431] ; AA STAROBINSKY , « Robustesse du spectre de perturbations inflationnistes pour la physique transplanckienne », *Pisma Zh. Ex. Théor. Fiz.* **73** , 415, 2001.
- [80] I. Tereno *et al.* , « Prévisions conjointes des paramètres cosmologiques à partir des données CFHTLS-cosmic shear et CMB », *Astron. Astrophysique.* **429** , 383, 2005.
- [81] J.-P. UZAN , U. KIRCHNER et GFR ELLIS , 'Données WMAP et courbure de l'espace', *Mois. Pas. R. Astron. Soc.* **344** , L65, 2003.
- [82] M. BUCHER , AS GOLDHABER et N. TUROK , « Une inflation ouverte à partir de l'inflation », *Phys. Rév. D* **52** , 3314, 1995.
- [83] A. LASENBY et C. DORAN , « Univers fermés, espace de Sitter et inflation », *Phys. Rév. D* **71** , 063502, 2005.
- [84] T. PEREIRA , C. PITROU et J.-P. UZAN , « Théorie des perturbations cosmologiques dans un univers anisotrope », *JCAP* **09** , 006, 2007 ; C. PITROU , T. PEREIRA et J.-P. UZAN , « Prédications d'une ère inflationniste anisotrope », *JCAP* **04** , 004, 2008.

# **Partie III**

## **Au-delà des modèles standards**



## 9 Grande unification et baryogenèse

---

Le modèle standard des interactions électrofaibles et fortes (Chapitre 2), combiné à la gravité d'Einstein (Chapitre 1), fournit une image représentative de nos connaissances en termes d'interactions fondamentales. Néanmoins, comme nous l'avons souligné dans les deux chapitres introductifs, cette description des interactions fondamentales ne doit pas être considérée comme un dernier mot. Le but de ce chapitre est donc d'essayer d'aller plus loin (Grande Unification), et d'en examiner les conséquences cosmologiques.

Nous discutons d'abord de l'extension naturelle que l'on peut apporter à la description du secteur non gravitationnel, à savoir la Grande Unification (dans la section 9.2). Cette théorie vise à décrire toutes les interactions non gravitationnelles sur un même pied, en utilisant uniquement les techniques bien maîtrisées développées pour la théorie quantique des champs. Bien motivée d'un point de vue expérimental, elle peut vraiment être considérée comme l'extension la plus simple possible, au sens du rasoir d'Ockham, qu'on peut chercher « au-delà du mode standard ! ».

Une telle extension devrait s'appliquer dans le régime des hautes énergies et, à mesure que l'énergie diminue (ou la température dans une configuration cosmologique), on devrait retrouver le modèle standard. Nous nous attendons donc à des transitions de phase, comparables à la transition électrofaible discutée au chapitre 2.

La dynamique des différentes transitions possibles, et notamment celles qui se produisent à des énergies plus élevées, peut avoir des conséquences importantes sur l'évolution de l'Univers. Ils peuvent notamment induire la baryogenèse, c'est-à-dire fournir un mécanisme expliquant pourquoi l'Univers tel que nous l'observons est majoritairement constitué de baryons et non d'antibaryons. Dans la section 9.3, nous décrivons les différents mécanismes via lesquels il est possible de produire le suivi! asymétrie entre particules et antiparticules.

### 9.1 Interactions

Dans le modèle électrofaible, les constantes de couplage des interactions électromagnétiques et faibles sont différentes non seulement après la rupture de symétrie, mais aussi avant, ce qui semble contredire l'idée même d'unification. La raison en est que le groupe d'unification, dans ce cas  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ , est un produit de deux groupes simples différents, et n'est donc pas lui-même un groupe simple. Pour réellement unifier les interactions, il ne devrait y avoir qu'une seule constante de couplage ; cela implique un simple groupe de jauge d'unification.

### 9.1.1 Principe de superposition

#### 9.1.1.1 Espace de stockage

La théorie quantique considère les états physiques associés aux valeurs propres des observables. Le principe de superposition implique que les combinaisons linéaires d'états physiques sont aussi des états physiques de la théorie. Ceci se justifie tant que les équations de la théorie sont linéaires. Nous pouvons alors construire un espace d'états (un espace de Hilbert à particule, puis un espace de Fock comme produit tensoriel d'espaces de Hilbert avec un nombre croissant de particules), et en particulier une base sur laquelle tout état physique peut être développé.

De plus, les Lagrangiens des théories des champs décrits au chapitre 2 introduisent différents termes de couplage entre les champs, ce qui se traduit par des termes d'interaction apparaissant dans les équations du mouvement.

Pour un seul champ, lors de la quantification, ces termes se traduisent par des auto-interactions du champ, c'est-à-dire des interactions entre les différentes particules, autrement dit des excitations de ce champ.

Considérons l'exemple d'un champ scalaire massif libre,  $\phi$ , de potentiel  $V(\phi) = \frac{1}{2}m^2 \phi^2$ . Son équation de Klein-Gordon (2.60) est alors linéaire. Ainsi, en termes de particules, tout état dont l'évolution est décrite par cette équation satisfera au principe de superposition quantique. Un tel état est donc bien défini, restant un état propre de l'hamiltonien à tout instant. Par exemple, l'état à une particule,  $|\mathbf{p}\rangle = |0\rangle$ ,

conserve la même forme au cours de son évolution et décrit ainsi une particule d'impulsion  $p$ .

Supposons maintenant que le potentiel contient un terme d'auto-interaction, par exemple  $V_3 = \frac{\lambda}{3} \phi^3$ . L'équation de Klein-Gordon devient alors

$$(\square - m^2)\phi = \lambda \phi^2. \quad (9.1)$$

Cette équation n'est pas linéaire et n'est pas satisfaite, entre autres, par les états à une particule. Nous ne pouvons donc pas espérer avoir une description complète de ces états de particules même si elles peuvent être utilisées pour calculer les probabilités d'interaction avec une bonne approximation. En effet, même si les particules que nous observons doivent interagir pour que nous puissions les détecter, elles restent des états comportant un nombre fixe de particules.

En pratique, les états avec un nombre donné de particules sont considérés comme des états asymptotiques, définis dans des régions pour lesquelles l'interaction est négligeable ; cela signifie généralement que les particules considérées sont éloignées les unes des autres. Les interactions non gravitationnelles effectivement observées dans la nature agissent sur des distances et des temps très courts. De telles interactions incluent, par exemple, des diffusions qui modifient l'état physique, voire des désintégrations.

On peut ainsi faire l'hypothèse que le terme d'interaction est la plupart du temps négligeable, de sorte que les états des particules dans l'espace de Fock, en principe rigoureusement définis uniquement asymptotiquement, représentent une bonne approximation des états physiques. Nous supposons au moins qu'ils représentent toujours une base valable pour le véritable espace de Fock. C'est une hypothèse extrêmement importante puisque c'est aussi en fonction de ces états que se font les expérimentations (mesures).

### 9.1.1.2 Équation de Tomonaga-Schwinger

En mécanique quantique non relativiste, le temps est quelque peu différent de l'espace tant qu'on utilise un traitement hamiltonien. En effet, l'équation d'évolution du corps  $t \rangle$  est, dans la plupart des cas, non linéaire. Pour obtenir une équation linéaire, et ainsi pouvoir appliquer le principe de superposition, il faut introduire une fonction d'onde  $\psi(x)$ , et considérer des états indépendants du temps définis dans tout l'espace, c'est à dire avec les fonctions  $\psi(x)$ , formant une base  $\{|0(x)\rangle\}$ , pour  $T$ . L'objet de base sera alors  $\psi(0(x), t) = |T(t)\rangle$ . Rappelez-vous ce qui se fait réellement en mécanique quantique ordinaire

dans lequel les équations d'évolution sont également non linéaires pour les opérateurs de position et de moment. Ces non-linéarités sont évitées en considérant l'équation d'évolution de la fonction d'onde,  $\psi(x, t) = \langle x | V(t) \rangle$ . La méthode est ici analogue. Dans la théorie quantique des champs, on peut interpréter le champ comme l'analogue de l'opérateur de position. Ainsi, en introduisant la fonctionnelle  $T$ , l'analogue de la fonction d'onde  $\psi$  de la mécanique quantique, on devrait pouvoir obtenir une équation d'évolution linéaire, indépendamment de la forme du potentiel.

On rappelle que l'action (1.106) du champ  $\phi$  peut être utilisée pour définir un élan conjugué  $\pi$ , défini par (2.76), et donc un hamiltonien fonctionnel à la fois de  $\phi$  et de  $\pi$ ,

$$W[\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{x})] = \int d^3x \left( \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + V(\phi) \right), \quad (9.2)$$

qui est une simple généralisation de (2.77) pour un potentiel arbitraire.

L'équation d'évolution de la fonctionnelle  $T[\phi(\mathbf{x}), \pi]$  s'obtient en faisant la correspondance, dans la représentation  $\pi$ , dans laquelle le corps est simplement un opérateur multiplicatif, et son élan conjugué un corps dérivative selon  $\pi(\mathbf{x}) \rightarrow -i\delta/\delta\pi(\mathbf{x})$ . Les relations de commutation (2.20) sont évidemment satisfaites par construction. On peut alors obtenir l'équation de Schrödinger associée pour la fonctionnelle  $T$ , à savoir

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial T[\phi, \pi]}{\partial t} = & \\ & + (V(\phi))^2 + 2V(\phi)(\pi) T[\phi, \pi]. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Cette équation fonctionnelle est appelée équation de Tomonaga-Schwinger [1]. En général, c'est extrêmement compliqué à résoudre, c'est pourquoi nous étudions des situations simples d'échange de particules, auquel cas il suffit de calculer les valeurs des opérateurs de création et d'annihilation entre états à nombre fixe de particules. On remarque de plus que (9.3) est linéaire, ce qui est normal puisqu'il s'agit essentiellement de l'équation de Schrödinger sous forme fonctionnelle. Même si l'on peut considérer des termes d'interaction très non linéaires (comme  $\phi^4$  par exemple), le principe de superposition s'applique toujours en théorie des champs avec interactions, mais pour la fonctionnelle  $T$ .

### 9.1.2 États des particules TV

Lorsque les interactions sont prises en compte, les états à une ou plusieurs particules ne sont plus des états propres de l'hamiltonien. Cela implique notamment que le nombre de particules n'est pas nécessairement constant dans le temps au cours du processus d'interaction.

#### 9.1.2.1 Échange de particules

Nous pouvons interpréter les interactions comme un échange de particules virtuelles. C'est le cas par exemple de l'électromagnétisme pour lequel l'interaction entre deux électrons résulte

de l'échange d'un photon virtuel, c'est-à-dire inobservable. Dans le Lagrangien (2.156), on peut voir que cet échange naît du terme  $-2g^A \sin d_w C7_M .4^M c$ , qui est représenté graphiquement sous la forme



où le sommet, c'est-à-dire le point central, a la valeur  $-2\sqrt{2}\sin\theta_w$  (voir, par exemple, les Réf. [7, 8] du Chapitre 2 pour plus d'informations sur l'utilisation des diagrammes de Feynman en physique des particules).

L'évolution de la fonctionnelle T, et donc de l'état du Système pour tout  $t > t_0$  peut être obtenue par exponentiation. L'équation fonctionnelle de Schrödinger a la même forme que l'équation de Schrödinger habituelle et peut donc être intégrée finalement de la même manière. Ainsi,

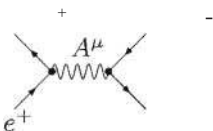
$$T[A^M(x), c(x), \bullet \bullet \bullet, t] = \exp \{iH[A^M(x), c(x), \bullet \bullet \bullet](t - t_0)\} \quad , \quad (9.4)$$

et l'état du Système est connu à tout moment, à condition de le connaître dans un premier temps pour-

Tout comme en mécanique quantique ordinaire, il est possible de passer de la représentation de Schrödinger à celle de Heisenberg dans laquelle les états dépendent du temps, mais pas des opérateurs qui agissent sur ces états. L'évolution d'un État est donnée par

$$|A^M(x), c(x), \bullet \bullet \bullet, t\rangle = e^{iH(t \sim t_0)} |A^M(x), c(x), \bullet \bullet \bullet, t_0\rangle . \quad (9.5)$$

En développant l'exponentielle des équations (9.4) ou (9.5), nous obtenons une série de termes impliquant des puissances de plus en plus élevées de l'interaction. Graphiquement, cela peut par exemple être représenté par l'échange d'un photon entre un positon et un électron. Par exemple, le diagramme,



a deux points sommets et est proportionnel à  $4p|\sin\theta_w|^2$ .

9.1.2.2 Transitions

Revenons au cas plus simple d'un champ scalaire réel à auto-interaction, et imaginons que nous réalisons une expérience pour mesurer les interactions entre les excitations de ce champ. Un état asymptotique général est donc un état dans l'espace de Fock défini pour les particules libres, et les états initial  $|\Gamma_{in}\rangle$  et final  $|\Gamma_{out}\rangle$  prennent alors nécessairement la forme où  $N_{in}$  et  $N_{out}$  compter les particules, respectivement, entrant et sortant de la collision.

Puisque l'équation fonctionnelle de Schrödinger (9.3) est linéaire, la conservation de probabilité (2.49) implique que les états  $|\Gamma_{in}\rangle$  et  $|\Gamma_{out}\rangle$  doivent être liés par une transformation unitaire

$$I^{out} = U(i_{out}, i_{in}) I^{in}, \text{ avec } [P^{out, fin}] = U^{out}(i_{out}, i_{in}) \quad (9.7)$$

Cette relation décrit la transition de l'état  $I^{in}$  au moment  $t_{in}$  à l'état  $I^{out}$  au moment  $i_{out}$ . Dans le cas d'états avec un nombre fixe de particules entrantes et sortantes comme (9.6), cet opérateur de transition peut être vu comme une matrice contenant un nombre infini d'éléments qui donnent les probabilités de transition. C'est la matrice  $S$ .

### 9.1.2.3 Constantes de couplage

Si l'on s'intéresse aux séries complètes, c'est-à-dire à la synthèse de tous les cas possibles, on voit que l'interaction complète peut être représentée schématiquement sous la forme

$$e \quad e' \quad e \quad e'$$

où les points représentent tous les termes de l'expansion qui ne sont pas affichés explicitement. Le premier diagramme est un diagramme *en arbre* (chaque partie est reliée aux autres par de simples branches), qui correspond à l'échange d'un seul photon. Le deuxième diagramme est un diagramme *à une boucle* et implique la formation d'une paire virtuelle  $e^+ - e^-$  qui se forme et s'annihile dans la boucle tandis que le photon échangé se propage. Ce terme introduit la constante de couplage à la quatrième puissance. Comme cette constante est supposée petite, on s'attend à ce que le terme de la boucle soit simplement une correction du diagramme arborescent. Ceci est d'autant plus vrai lorsque le couple  $e^+ - e^-$  est virtuel, c'est à dire que l'énergie des photons échangés n'a pas besoin d'être supérieure à deux fois la masse de l'électron pour que cette correction soit présente (classiquement, cela serait tout simplement impossible). Cependant, à mesure que l'énergie d'interaction entre l'électron d'origine et le positron augmente, la boucle  $e^+ - e^-$  devient de moins en moins virtuelle, et le terme devient donc plus significatif. Cela implique que cette correction dépend en fait de l'énergie d'interaction. Mais cela dépend aussi des masses des particules impliquées dans la boucle : on comprend donc aisément que la variation de l'énergie des constantes de couplage dépend du spectre des particules existant dans la théorie au travers d'éventuelles boucles virtuelles (voir chapitre 10 pour plus d'informations). implications de cette propriété).

Le diagramme total peut être interprété comme l'interaction effective entre un électron et un positron. Cela revient à prendre en compte toutes les corrections de boucle en les incluant dans la valeur de la 'constante' de couplage de l'électromagnétisme. De ce point de vue, on retrouve l'interaction électromagnétique habituelle mais avec une constante de couplage qui dépend désormais de l'énergie.

Il est possible, bien que cela dépasse le cadre de ce livre, de calculer explicitement les corrections et de prédire précisément comment la constante de couplage des différentes interactions varie avec l'énergie. Par exemple, pour l'électromagnétisme, on sait que  $\alpha \sim 1/137$  à basse énergie, et mesurer  $\alpha \sim 1/128$  lorsque l'énergie d'interaction correspond à la masse du boson intermédiaire  $Z^0$ . Cette mesure, qui a été réalisée au CERN, est en parfait accord avec les calculs théoriques (voir Réf. [11] du Chapitre 2)

## 9.2 Grande unification

La dépendance énergétique des constantes de couplage conduit, comme nous le verrons plus loin, à postuler l'existence d'une unification au-delà de celle déjà réalisée dans le cadre du modèle standard. Une telle extension est également motivée d'un point de vue théorique, en raison des nombreux problèmes du modèle standard.

### 9.2.1 Problèmes du modèle standard

Bien qu'il soit compatible avec toutes les expériences disponibles jusqu'à récemment, le modèle standard des interactions électrofaibles et fortes souffre de sérieux inconvénients théoriques et, comme cela a été montré ces dernières années, également de problèmes expérimentaux. Il convient en particulier de souligner que le boson de Higgs, qui est au cœur de sa construction théorique, n'est toujours pas détecté.

#### 9.2.1.1 L'arbitraire

Comme présenté au chapitre 2, le modèle standard de la physique des particules repose sur le groupe de jauge  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ . Certains pourraient se sentir mal à l'aise avec une telle structure, car la raison pour laquelle ce groupe particulier détermine les symétries est inexpliquée ; d'autres pourraient cependant soutenir qu'aucune théorie n'est censée expliquer ses propres structures. Ce qui est peut-être plus ennuyeux, cependant, est le fait que le modèle contient trois familles de quarks et de leptons, ce qui ressemble à une réplication encore une fois inexpliquée de la même théorie, mais à des échelles d'énergie différentes. Ces particules sont placées dans des représentations qui semblent complètement arbitraires.

Le problème théorique le plus grave dont souffre le modèle standard est probablement la prolifération de paramètres libres, qui sont exclusivement déterminés à partir de mesures expérimentales et ne sont pas calculables selon les premiers principes. Alors que la gravité n'introduit qu'un seul paramètre libre, la constante de couplage  $G_N$ , la théorie électrofaible et forte en requiert 19 ! Ceux-ci sont :

- les 3 constantes de couplage associées aux trois groupes de jauge,
- les 9 masses des fermions massifs,
- les 3 angles et la phase du Cabibbo Kobayashi Maskawa. matrice (ou matrice CKM, décrite dans la section suivante),
- la valeur attendue du vide du champ de Higgs  $\langle \phi \rangle = v$ , ainsi que sa constante d'auto-couplage  $\lambda$ ,
- et enfin le paramètre  $\alpha_s$  de l'interaction forte.

Compte tenu de la possibilité d'une masse pour le neutrino, il y a alors 3 masses supplémentaires, une pour chaque génération, et par conséquent de nouveaux angles et phases de mélange. Cette extension extraordinairement simple porte le nombre de paramètres libres à plus de 25, ce qui est considéré comme excessif pour une théorie censée expliquer de manière unifiée trois des quatre interactions fondamentales.

### 9.2.1.2 La matrice CKM

Contrairement aux leptons, tous les quarks apparaissent sous des formes gauche et droite, de sorte qu'ils sont tous massifs. Pour les trois générations de quarks ainsi que de leptons, il convient de généraliser (2.166) en utilisant la substitution

$$\begin{aligned} e \mathbf{e}'_A &= (e', \nu', /) \\ &= XXX) \\ {}^u P_A &= \\ n'_A &= (d', s', b') \end{aligned} \quad (9.8)$$

where a quantity with a prime indicates an eigenstate of SU(2). The index 'A' represents a génération index, and the quarks are designated in a generic way, by analogy with the isospin nomenclature  $I$  for which the proton (p) has the eigenvalue  $I_3(p) = +\frac{1}{2}$  and the neutron (n) has  $I_3(n) = -\frac{1}{2}$ . In (9.8), it is replaced by the weak isospin  $T$ , so we correspondingly would have  $T_3(u) = +\frac{1}{2}$  and  $T_3(d) = -\frac{1}{2}$ . The doublets then become

$$\ell_{AL} = \begin{pmatrix} \nu'_A \\ e'_A \end{pmatrix}_L \quad \text{and} \quad q_{AL} = \begin{pmatrix} p'_A \\ n'_A \end{pmatrix}_L \quad (9.9)$$

et de la même manière, les singlets portent également un indice de génération.

L'ensemble du modèle standard peut alors être simplement réécrit en reprenant les termes déjà obtenus au chapitre 2 et en remplaçant les états propres de SU(2)<sub>L</sub>, communément appelés états propres de jauge ou états propres d'interaction, par ceux de (9.8) puis en prenant la somme sur les générations. On remarque alors qu'en général, les coefficients qui apparaissent dans le (2.166) deviennent des matrices où  $\phi$  est toujours le champ de Higgs [ $\phi$  est le même que défini ci-dessous (2.166)].

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = \sum_{A,B} - \left[ f_{AB}^{(e)} \bar{\ell}_{AL} \cdot \phi e'_{BR} + f_{AB}^{(p)} \bar{q}_{AL} \cdot \phi p_{BR} + f_{AB}^{(n)} \bar{q}_{AL} \cdot \phi n'_{BR} + \text{h.c.} \right], \quad (9.10)$$

Cette substitution implique que pour les états propres de jauge, les masses des fermions sont des matrices de masse 3x3 (puisque'il y a trois générations de particules). Ces matrices sont, avant toute mesure, complètement arbitraires et en particulier elles n'ont aucune raison d'être diagonales. En fait, ils n'ont même pas besoin d'être symétriques ni hermitiens, et leurs éléments ne peuvent être déterminés qu'expérimentalement. Le terme de masse du Lagrangien prend la forme

Les matrices de masse peuvent être diagonalisées grâce à des transformations bilinéaires. Remarquons tout d'abord que pour chacune de ces matrices, l'opérateur  $MM^\dagger$  est hermitien par construction. Il n'a donc que des valeurs propres positives et peut être diagonalisé comme

avec  $\text{tr} M M^\dagger = \sum_i m_i^2$ . La matrice de masse  $M_d = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{diag}(m_d, m_s, m_b)$  obtenue dans ce chemin est liée à  $M$  par une transformation bilinéaire,

$$M_d = S^\dagger M T,$$

où  $T T^\dagger = 1$  tel que (9.12) soit satisfait. Le terme d'interaction Yukawa devient alors

$$= \frac{1}{2} \bar{L}^M d V_R,$$

si les états propres de masse (sans le premier) sont définis par

Le courant d'interaction entre les quarks et les bosons de jauge chargés est obtenu de la même manière que pour l'équation (2.156), et on trouve

$$(9.13)$$

$$J_n = V_2 g_2 \sum_i \bar{\psi}_i \gamma_5 \psi_i$$

### P.4L

Cela peut être exprimé en termes d'états propres de masse comme

$$\sum_{AB} \bar{\psi}_A \gamma_5 \psi_B \quad \text{«BL,} \quad \text{»}$$

afin que l'on puisse diagonaliser les termes de masse et écrire ceux impliquant les interactions en changeant uniquement les quarks  $d, s$  et  $b$ . Le courant résultant peut alors s'écrire

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} g_2 \sum_i \bar{\psi}_i \gamma_5 \psi_i \quad \text{»/L} \quad (9-14)$$

où  $V_{CKM} = \frac{1}{\sqrt{2}} S(\theta)$  est une matrice unitaire, appelée Cabbibo-Kobayashi- Maskawa matrice.

#### 9.2.1.3 Violation du CP

Pour  $N$  générations de quarks, la matrice  $V_{CKM}$  possède  $N^2$  éléments matriciels indépendants, une fois prise en compte la condition d'unité. Il est possible de redéfinir  $2N - 1$  de ces éléments en modifiant toutes les phases des quarks sauf une, puisqu'une rotation globale de



toutes les phases d'une même quantité est toujours autorisée. De plus, puisqu'une matrice orthogonale contient  $N(N-1)/2$  angles, on constate qu'elle a  $(N-1)(N-2)/2$  phases indépendantes. Pour  $N=2$  générations, cela donne un seul angle, appelé angle de Cabibbo et pas de phase. Pour trois générations, on obtient trois angles et une phase. Cette phase conduit à des violations légères mais néanmoins mesurables de la symétrie **CP**.

Le courant (9.14) se couple en effet au boson vecteur tel qu'il existe un terme d'interaction de la forme

$$r_{\text{couplage}} = J_M IV + \text{h.c.}, \quad (9.15)$$

qui contient le terme

$$\text{couplage } V_{ud} \bar{u} \gamma^\mu W_\mu^+ d + \text{h.c.}, \quad (9.16)$$

$$+ V_{U>} \gamma_M W^+. \quad (9.17)$$

La deuxième ligne indique la transformation des termes sous CP, et nous avons utilisé le fait que  $(V^\dagger)_{du} = V_{ud}^*$ , où ici, par simplicité de notation et puisqu'il n'y a aucun risque de confusion,  $V$  représente la matrice CKM avec les éléments  $V_{ij}$  entre les quarks  $i$  et  $j$ . Cette transformation s'obtient en généralisant (2.170) et (2.175) (voir Réf. [8] du chapitre 2) au cas des fermions et des bosons de jauge, en tenant compte que c'est de l'action, et non du Lagrangien, que on dérive la dynamique. Cela signifie notamment que les Lagrangiens  $\mathcal{L}(x)$  et  $\mathcal{L}(-x)$  donnent exactement la même action  $S = \int d^3x \mathcal{L}(x) = \int d^3x \mathcal{L}(-x)$ . Ainsi, ils décrivent la même théorie physique que, par un abus de notation simplificatrice, nous pouvons écrire  $\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(-x)$ .

Les équations (9.16) et (9.17) soulignent le fait que si tous les termes de la matrice CKM sont réels, c'est à dire s'il existe une phase qui ne peut pas être résorbée dans la définition du champ, alors la symétrie CP n'est pas remplie, et les processus impliquant les états conjugués les uns aux autres sous CP ne seront pas nécessairement produits au même rythme. Ceci est particulièrement important en cosmologie car cela pourrait permettre de générer une asymétrie entre matière et antimatière.

#### 9.2.1.4 Oscillations des neutrinos

La même analyse dans le secteur leptonique n'implique pas la matrice CKM puisque les neutrinos sont supposés être sans masse. Cela implique notamment que l'on puisse postuler, en accord avec les expériences, que les neutrinos n'existent que dans des états « gauchers », de sorte qu'il existe un terme d'interaction unique entre les électrons et les neutrinos. Puisque la matrice de masse des neutrinos disparaît, il est inutile de la diagonaliser. On peut donc diagonaliser le terme de masse des électrons indépendamment du terme de couplage. Ensuite, on peut simplifier la forme des couplages en redéfinissant les champs de neutrinos, opération inoffensive (non physique). Bien entendu, si les neutrinos s'avèrent massifs, toutes ces conclusions seront modifiées, et on retrouvera alors la situation CKM précédente, avec quelques différences subtiles, dues au fait que ces particules ne sont pas soumises à l'interaction forte.

Une façon de déterminer si le neutrino est réellement sans masse ou si sa masse est simplement trop petite pour avoir été détectée est d'observer les oscillations entre les

différentes générations. Nous considérons dans ce qui suit le cas simplifié de deux espèces mixtes, avec un angle de mélange unique et sans phase. Il n'est pas difficile, et même recommandé à titre d'exercice, de généraliser ce calcul à trois espèces de neutrinos.

Supposons par exemple qu'il existe un mélange entre les deux familles de neutrinos  $\nu_e$  et  $\nu_\mu$ . Ces deux espèces peuvent se décomposer en une base d'états propres de masse  $\nu_1$  et  $\nu_2$ , de masses  $m_1$  et  $m_2$  respectives. Si le mélange se fait via l'angle de Cabibbo,  $\theta$ , on peut exprimer les différents états par les relations

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \quad (9.18)$$

où les états  $|\nu_i\rangle$ ,  $i = 1, 2$  sont les états propres de l'hamiltonien

$$H |\nu_i\rangle = E_i |\nu_i\rangle = \frac{p^2}{2m_i} |\nu_i\rangle \quad (9.19)$$

pour les états d'impulsion  $\mathbf{p}$ .

Considérons maintenant un neutrino produit par une réaction nucléaire au Soleil. Puisqu'il résulte d'une interaction, il s'agit nécessairement d'un neutrino  $\nu_e$  dans notre théorie simplifiée qui ne décrit que deux états d'interaction. Pour être concret, supposons qu'il s'agisse d'un neutrino électronique. Dans la représentation de Schrödinger, l'état  $|\nu_e(t)\rangle$  évolue comme (2.50), ce qui donne, avec  $|\nu_e(0)\rangle = |\nu_e\rangle$

$$\begin{aligned} |\nu_e(t)\rangle &= e^{-iEt} |\nu_e\rangle \\ &= e^{-iEt} (\cos \theta |\nu_1\rangle + \sin \theta |\nu_2\rangle) \\ &= e^{-iE_1 t} \cos \theta |\nu_1\rangle + e^{-iE_2 t} \sin \theta |\nu_2\rangle \\ &= (\cos^2 \theta e^{-iE_1 t} + \sin^2 \theta e^{-iE_2 t}) |\nu_e\rangle \\ &\quad + \sin \theta \cos \theta (e^{-iE_1 t} - e^{-iE_2 t}) |\nu_\mu\rangle \end{aligned} \quad (9.20)$$

Ainsi, le neutrino ne reste pas constamment dans l'état neutrino électronique, il oscille entre l'état électronique et muonique.

D'après la loi (2.43), la probabilité de détecter le neutrino dans son état électronique est alors

$$P_{ee} = |\langle \nu_e | \nu_e(t) \rangle|^2 = |\cos^2 \theta e^{-iE_1 t} + \sin^2 \theta e^{-iE_2 t}|^2, \quad (9.21)$$

où nous avons utilisé le fait que la base  $\{|\nu_1\rangle, |\nu_2\rangle\}$  est orthonormée et avons supposé un détecteur idéal, sans perte (a.11 neutrinos électroniques sont détectés).

Pour les neutrinos relativistes avec  $m^2 \ll p^2$ , nous pouvons augmenter l'énergie comme  $E \sim |\mathbf{p}| + \frac{m^2}{2|\mathbf{p}|}$ , et on trouve

$$P_{ee}(\nu_e) \simeq 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \left( \frac{\Delta m^2 L}{4|\mathbf{p}|} \right) \quad (9.22)$$

La distance  $L = t$  est celle entre le Soleil et le détecteur (les neutrinos étant relativistes, ils se déplacent essentiellement à la vitesse de la lumière), et  $\Delta m^2 = |m_1^2 - m_2^2|$ .

La relation (9.22) indique qu'un déficit du nombre de neutrinos électroniques détectés par rapport à celui émis n'est possible que si les neutrinos ont une masse non nulle et si, de plus, ces masses sont différentes pour chaque génération. La connaissance des réactions nucléaires du Soleil permet de prédire avec précision son taux d'émission de neutrinos. On constate depuis quelques temps que le flux de neutrinos électroniques reçu est bien inférieur à celui prévu, dans une proportion atteignant 75 % dans certaines expériences. Ce problème des

neutrinos solaires a donc donné la première indication de la possibilité que les neutrinos soient massifs.

Enfin, on remarque que la propagation des neutrinos dans la matière est différente de celle dans le vide puisque deux effets supplémentaires contribuent aux oscillations. Tout neutrino actif interagit avec les quarks et les leptons par échange d'un boson  $Z^0$ , tandis que les neutrinos stériles, discutés dans ce qui suit, ne subissent pas par définition cette - interaction. De plus, seuls les neutrinos et antineutrinos électroniques interagissent avec les électrons, qui constituent une partie importante de la matière, par échange de  $W^\pm$ . Ces deux effets peuvent facilement être pris en compte en introduisant une longueur d'oscillation typique, indépendante de l'énergie des neutrinos, mais fonction de la densité de matière. Elle s'avère être de l'ordre de 14 km dans la Terre, et d'environ 200 km au cœur du Soleil [2],

9.2.1.5 *Masses des super-Kamiokande et des neutrinos*

Depuis 1998, la situation expérimentale a changé. L'expérience Super-Kamiokande [3], un détecteur de neutrinos, <sup>10</sup>a montré l'existence d'une dépendance angulaire dans la distribution des neutrinos électroniques reçus sur Terre. Le flux de neutrinos provenant de différentes directions zénithales est différent, ce qui indique que le nombre de neutrinos incidents est fonction de la distance qu'ils ont parcourue à travers la Terre, comme prévu par le modèle d'oscillation.

Plus récemment, l'expérience KamLAND [4] au Japon a établi les oscillations des neutrinos de manière encore plus précise, comme le montre la figure 9.1 où le rapport entre la distribution attendue des neutrinos sans oscillations et les mesures est rapporté. Cette expérience consiste en un. Sphère transparente de 13 m de diamètre contenant 1000 tonnes d'un scintillateur liquide très pur et entourée de 1879 photomultiplicateurs remplissant la surface interne d'un conteneur de 18 m de diamètre. Les antineutrinos électroniques sont détectés par la désintégration inverse  $\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n$ , avec un seuil d'énergie de 1.8 MeV. Le tout est entouré d'un détecteur Cerenkov à eau de 3 200 tonnes qui absorbe les photons et les neutrinos de l'environnement et détecte les muons cosmiques.

Autour du site expérimental de KamLAND, il y a 53 réacteurs électriques, avec des flux d'émissions de neutrinos dépendants du temps, ce qui permet un bon calibrage et l'élimination des effets systématiques. Après avoir collecté des données entre mars 2002 et janvier 2004, l'expérience a conclu à l'existence d'oscillations avec des paramètres

|                                                                                                                 |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\Delta m_{21}^2 = 7.9^{+1.2}_{-1.0} \times 10^{-5} \text{ eV}^2 \text{ et } \tan^2 \theta = 0.4^{+0.2}_{-0.1}$ |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

où la différence de masse se situe entre le neutrino électronique et une autre espèce de neutrinos, encore non spécifiée (appartenant probablement à l'une des deux autres saveurs disponibles dans le modèle standard), l'analyse étant limitée à deux espèces. Ces chiffres ont été établis en prenant en compte d'autres expériences dédiées uniquement à l'observation des neutrinos solaires.

<sup>10</sup>Conçu à l'origine pour détecter la désintégration des protons, ce grand réservoir Cerenkov (50 000 tonnes d'eau),  
<sup>11</sup>enfoui profondément dans le sol afin de se protéger autant que possible des rayons cosmiques, s'est avéré parce que  
<sup>12</sup>de par sa taille et son emplacement, pour être un détecteur de neutrinos très efficace.

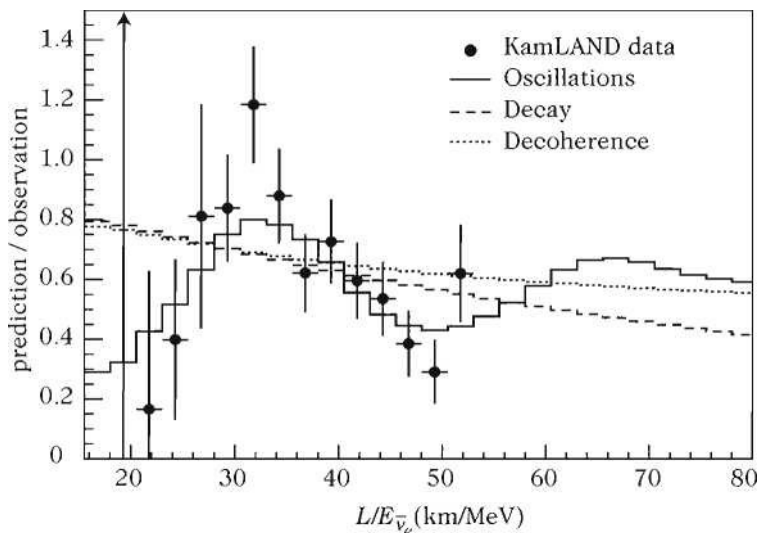


Fig. 9.1 Distribution observée des neutrinos comparée à la distribution attendue en l'absence d'oscillations dans l'expérience KamLAND. Les points mesurés sont en désaccord avec les modèles possibles (décroissance ou décohérence) autres que les oscillations.

9.2.2 Unification des constantes de couplage

L'existence de couplages entre les particules implique que les différentes constantes introduites dans l'interaction lagrangienne totale doivent être renormalisées pour chaque valeur de l'énergie à laquelle une interaction donnée se produit. Le déroulement de la constante de couplage avec l'énergie est illustré sur la figure 9.2 pour les trois interactions non gravitationnelles, extrapolées à partir de données expérimentales jusqu'au pic  $Z^0$  (expérience LEP au CERN) et à partir des propriétés des particules connues. On remarque une très nette tendance à la convergence des trois courbes, indiquant la possibilité qu'à très haute énergie, en pratique de l'ordre de  $10^{14}$  GeV, les trois constantes de couplage, très différentes à basse énergie, soient de même nature, ordre de grandeur pour des énergies aussi élevées, et on peut postuler qu'elles pourraient en fait fusionner en une valeur commune. Dans ce cas, les trois interactions seraient indiscernables puisque non seulement elles seraient de même intensité, mais elles agiraient également de la même manière. On peut ainsi supposer que les trois groupes de symétrie, couleur  $SU(3)_c$  issue de l'interaction forte, et  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  issue des interactions électrofaibles, sont regroupés en un seul groupe  $Q$  qui les contient tous, un grand groupe d'unification. En d'autres termes, ces trois interactions ne seraient que des manifestations différentes à faible énergie d'une même interaction.

Il est intéressant de noter à ce niveau, que les charges électriques des quarks et des leptons conduisent à la relation (à ce stade inexplicable)

$$\sum_{\text{particules}} Q_i = 0$$

où les  $Q_i$  sont les charges des particules : ceci est obtenu si chaque quark est compté trois

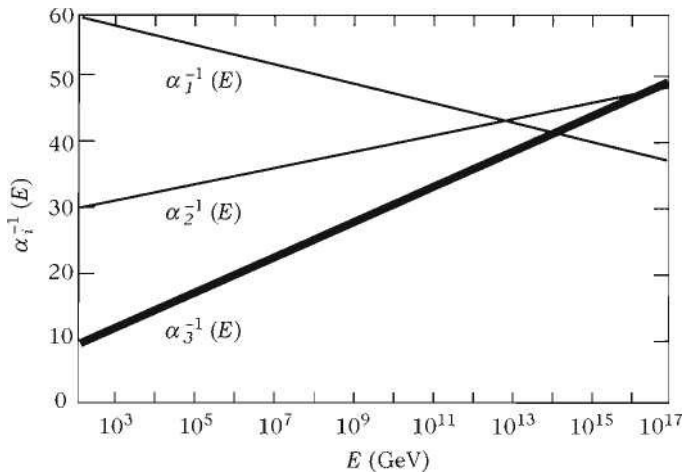


Fig. 9.2 Exécution des constantes de couplage inverse du modèle standard des interactions électrofaibles ( $\alpha_1^{-1}$  et  $\alpha_2^{-1}$ ) et d fortes ( $\alpha_3^{-1}$ ) avec l'énergie d'interaction  $E$ . On voit que  $\alpha_1^{-1}$  et  $\alpha_2^{-1}$  sont des fonctions croissantes de l'énergie, alors que  $\alpha_3^{-1}$  décroît avec  $E$ . Ces courbes sont calculées avec l'ensemble des données expérimentales (moyenne des valeurs obtenues en 1991), et leur largeur reflète l'incertitude expérimentale, qui est plus significative pour les interactions fortes (03). L'extrapolation de ces courbes aux très hautes énergies indique une tendance à converger vers  $10^{14}$ — $10^{15}$  GeV, que nous appelons la grande énergie unifiée. Au dessus de cette énergie, les trois interactions ont une grandeur comparable et on suppose que les trois forces sont unifiées, avec une symétrie étant celle d'un groupe simple  $G$  contenant  $S(7(3)) \times S(17(2)) \times U(1)$  (voir 03) pour compenser le fait que les quarks ont des charges fractionnaires. À condition de prendre en compte l'interaction forte, condition nécessaire à une théorie unificatrice, ce comptage est très naturel puisque chaque particule en interaction forte se présente dans trois états de couleur.

Il se trouve que cette relation par ailleurs incongrue est essentielle pour que la théorie ne présente aucune anomalie, c'est-à-dire qu'elle soit renormalisable, et donc dotée d'un pouvoir prédictif suffisant pour en faire une théorie physique. Même si les interactions électrofaibles et fortes sont indépendantes, on remarque que le modèle électrofaible n'est renormalisable qu'à condition de considérer les degrés de liberté issus de la chromodynamique. Cela renforce l'idée d'unification. Dans le cadre d'une telle unification, où l'on essaie de décrire les quarks et les leptons dans les mêmes multiplets, la charge électrique devient un générateur du groupe de symétrie de Lie unifié. Il ne s'agit plus d'une quantité arbitraire comme dans le modèle standard, mais dérivée des actions du groupe. En tant que tel, l'opérateur de charge électromagnétique doit être sans trace lorsqu'il agit sur un multiplet. La relation précédente, qui est complètement arbitraire (et donc une étrange coïncidence) dans le cadre du modèle standard habituel, devient une simple conséquence de tout schéma d'unification. C'est, de notre point de vue, l'argument théorique le plus convaincant en faveur de l'unification.

9.2.3 Modèles d'unification

Historiquement, ce sont H. Georgi et SL Glashow, en 1974 [5], qui ont proposé la première

Théorie Grand Unifiée (GUT), basée sur le groupe  $SU(5)$ . La théorie électrofaible, introduite au chapitre 2, ne représente qu'une unification partielle puisque les constantes  $g_1$  et  $g_2$  des groupes  $U(1)_Y$  et  $SU(2)_L$  ne sont pas égaux avant la rupture de symétrie. Techniquement, cela est dû au fait que le groupe d'unification est le produit de deux groupes simples différents. Pour réaliser une unification avec une seule constante de couplage, le groupe de symétrie doit être de la forme  $Q^n$ , où  $Q$  est simple et  $n$  un entier arbitraire. Pour  $n=1$ , une symétrie discrète doit également être imposée entre les représentations utilisées pour  $\mathcal{C}$ . C'est grâce à cette symétrie que les groupes peuvent être considérés comme équivalents, ce qui permet la présence d'une seule constante de couplage malgré la présence de plusieurs groupes.

Comme nous l'avons vu au chapitre 2, tous les groupes simples sont connus et classés. En particulier, nous connaissons les groupes qui jouissent de représentations complexes et donc pour lesquels il est plus facile d'ajuster toutes les particules connues puisqu'elles sont déjà inscrites dans des représentations complexes de  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ . Les groupes intéressants de ce point de vue sont donc  $SU(n)$  pour  $n > 2$ ,  $E_6$  et  $SO(4n+2)$ .

### 9.2.3.1 Modèle Pati-Salam

Avant que la possibilité d'une unification totale ne se soit réalisée, Pati et Salam [6] ont proposé, dans un premier temps, de considérer chaque génération de leptons comme une quatrième couleur, substituant ainsi le groupe  $SU(3)_C$  par le groupe  $SU(4)_C$ . Pour que cela soit possible, les doublets et singulets de quarks et de leptons doivent avoir les mêmes propriétés et, pour commencer, ils doivent être divisés de la même manière. On exige alors que le doublet de  $SU(2)_L$ ,  $(q, \ell)$ , se transforme comme la représentation  $\mathbf{4}$  de  $SU(4)_C$ , mais l'ensemble composé des particules conjuguées  $(\bar{q}, \bar{\ell})$  devrait alors être aussi un pourpoint. Puisque le neutrino est supposé sans masse et n'a par conséquent qu'une composante gauche, cela nécessite l'introduction d'un nouvel état de neutrino dit « stérile »  $\nu_s$ , ne portant aucun numéro quantique du modèle standard. Ce neutrino complète le doublet  $(q, \ell)$ , avec l'identification  $iP = i/\nu_s$ . L'ensemble composé de l'électron droit et du neutrino stérile est alors un doublet de  $SU(2)_R$ , tel que la symétrie du modèle de Pati-Salam est  $G_{PS} \sim SU(4)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R$ .

Le groupe  $SU(4)_C$  contient le groupe  $SU(3)_C$  des couleurs ordinaires comme sous-groupe, mais aussi un  $U(1)$  qui doit être identifié par  $B - L$ , où  $B$  est le nombre de baryons et  $L$  est le nombre de leptons. Ces nombres comptent simplement combien de baryons et de leptons se trouvent dans un état donné, ce qui nous permet d'identifier ces particules dans les doublets. Les propriétés mesurées des différentes particules sont reproduites tant que la relation Gell-Mann-Nishijima (2.153) est modifiée sous la forme

$$Q = T_3 + T_8 + \frac{1}{2}(B - L). \quad (9.23)$$

On voit que l'on peut réaliser ici une première forme d'unification : si une symétrie  $L \leftrightarrow R$  est imposée, on n'aura qu'une seule constante de couplage pour les deux groupes  $SU(2)_L$  et  $SU(2)_R$ . Le groupe Pati-Salam est présent dans de nombreux projets de rupture de symétrie de groupes d'unification de rang supérieur. Le neutrino stérile est alors souvent identifié au neutrino droitier. Ceci, à son tour, implique que le neutrino est massif... et donc oscille, en accord avec les données discutées précédemment.

Le modèle d'unification Pati-Salam n'est pas totalement satisfaisant du point de vue de l'unification puisque même s'il unifie les quarks et les leptons, c'est-à-dire les particules de matière, dans un ensemble équivalent, il ne donne aucune prédiction sur les interactions





moins). Nous allons ensuite un peu plus loin et recourons au prochain groupe d'unification possible dans la liste, à savoir  $SO(10)$ . En l'occurrence,  $SO(10)$  a une représentation de dimension **16**, dans laquelle on peut facilement faire rentrer toutes les particules connues... plus une ! Cet élément supplémentaire de la **16** représentation de  $SO(10)$ , est un bi-spineur comme les autres éléments, et doit être interprété comme un état de neutrino droitier. Ainsi, une prédiction générale d'une grande unification au-delà de  $SU(5)$  est l'existence d'une masse pour le neutrino.

Tous les autres groupes d'unification sont possibles, à condition qu'ils satisfassent à certaines contraintes, comme par exemple l'existence de représentations complexes [7]. Cependant, pour les groupes de haut rang, il devient nécessaire, pour obtenir le modèle électrofaible standard à basse énergie, de s'appuyer sur de nombreux bosons de Higgs pour briser les symétries, qui introduisent un grand nombre de paramètres arbitraires. Cela réduit considérablement l'avantage et l'aspect « naturel » de tels modèles. C'est pourquoi, en général, on ne considère comme réalistes que les groupes jusqu'au rang 6, comme  $E_6$ , ou  $SU(7)$ , ou de rang 7, comme  $SO(14)$  ou  $SU(8)$ . On retrouve aussi ponctuellement (et issus de la théorie des cordes) les groupes  $E_8$  et  $SU(9)$ , de rang 8, mais la profusion de générateurs, déjà à ce stade, rend les calculs souvent inextricables.

### 9.2.3.3 Schéma de grande unification qui brise la symétrie

Pour construire le modèle standard de la physique des particules à partir de la symétrie d'une grande unification *Ç donnée*, il convient d'introduire des champs de Higgs pour réduire progressivement la symétrie jusqu'à atteindre celle du modèle standard, à savoir  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_{\text{em}}$ . La manière dont nous choisissons de répartir ces champs scalaires dans les différentes représentations possibles de  $Q$  indique quel sera le schéma de rupture de symétrie. Par exemple, si l'on choisit la représentation de la dimension **126** de  $SO(10)$  alors, lorsque le champ de Higgs prend une valeur attendue non nulle, la symétrie se réduit à  $SU(5) \times Z_2$ .

Pour comprendre ce mécanisme, il est préférable de considérer un exemple simple, même s'il ne sera pas réaliste du point de vue d'une grande unification ; c'est ce que nous appelons un « modèle jouet », c'est-à-dire un modèle théorique possédant l'ensemble des propriétés d'une théorie réelle (du moins nous l'espérons) mais suffisamment simple pour pouvoir « jouer » avec.

Supposons donc que la symétrie initiale de la théorie est celle du groupe  $SU(2)$ . La théorie décrit la dynamique d'un champ de Higgs dans une représentation de  $SU(2)$  ainsi que les bosons de jauge associés aux transformations de  $SU(2)$ . Le Lagrangien qui nous intéresse possède donc tous les termes cinétiques usuels déjà décrits, ainsi qu'un potentiel de rupture de symétrie avec un minimum à  $\langle \phi \rangle^2 = r^2$ . Selon la représentation choisie pour le champ de Higgs, nous aurons différents schémas de cassure, conduisant à différentes théories physiques à basse énergie.

Par exemple, si le champ de Higgs est dans la représentation réelle **3** [représentation fondamentale de  $SO(3)$ , qui est isomorphe à  $SU(2)$ ], c'est à dire un vecteur composé de trois champs scalaires

$$\begin{matrix} fa(x,t) \\ \langle / \rangle \quad fa(x,t) \\ fa(x,t) \end{matrix}$$

alors son module au carré est simplement défini par  $\langle / \rangle^{13} = \zeta!>^2 + (\wedge + \langle \wedge^3$ , tel qu'il existe encore une infinité de configurations possibles, réparties sur la sphère de l'espace interne du champ de Higgs, correspondant à la symétrie SU(2). Afin de pouvoir réellement effectuer des calculs, il faut choisir une de ces configurations. A ce stade, ceci est complètement arbitraire et sans implications physiques locales<sup>2</sup>. Supposons alors que la configuration du vide est donné par 03

$$\phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \eta \end{pmatrix}$$

Les générateurs de SU(2) exprimés dans la représentation 3 sont simplement les matrices usuelles générant les rotations infinitésimales

$$T_1 : \begin{matrix} /O\ 0\ 0 \backslash \\ 0\ 0\ -d \\ \backslash 0\ je\ 0\ J \end{matrix} \quad \hat{I}_2 = \begin{matrix} /O\ 0\ je \backslash \\ 0\ 0\ 0 \\ je\ 0\ 0/ \end{matrix} \quad \text{et } T_3 = \begin{matrix} /O\ -je\ 0 \backslash \\ p\ 0\ 0, \\ \backslash 0\ 0\ 0/ \end{matrix}$$

qui correspondent respectivement aux rotations autour des axes 1, 2 et 3. Il est clair que le troisième générateur, T3, est annihilé par le vide  $0>_o$ , soit  $T_3 0Q = 0$ . Le vide est donc toujours invariant sous transformations de la forme  $\exp(-iocfa)$ , qui forme un sous-groupe U(1) du groupe SU(2) d'origine. Ce schéma s'exprime donc symboliquement sous la forme SU(2) -U(1). Remarquons qu'un choix de vide différent aurait produit un autre générateur invariant, et finalement le même schéma, à une rotation près.

Considérons maintenant le cas où  $\langle / \rangle$  se transforme comme la représentation complexe 2, i.e. it is a doublet

$$\begin{matrix} \langle / \rangle \quad fa = \hat{i}ie\ (0i) + i\ Sm\ (fa)\ fa \\ = \hat{i}ie\ (fa) + i\ 9m\ (fa) \end{matrix}$$

Une fois la symétrie brisée, on a  $|\langle / \rangle|^{12} + \backslash fa |^2 = fa$ . qui est obtenu, par exemple, par le choix du vide

$$\phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix}$$

Étant donné les générateurs de SU(2) de cette représentation, ici les matrices de Pauli, il est facile de se convaincre qu'aucune combinaison de ces générateurs n'annihile le vide, et par conséquent aucune symétrie n'est laissée invariante. On a donc le schéma SU(2) {Id}, le groupe se réduit à l'élément identité.

Enfin, un dernier cas intéressant concerne les ruptures multiples, que l'on retrouve souvent dans les théories réalistes de grande unification puisqu'il n'est pas toujours possible de rompre directement

<sup>13</sup>Nous verrons plus loin, au chapitre 11, que d'un point de vue global, le choix n'est pas forcément anodin car il peut conduire à la formation de défauts topologiques.

la symétrie initiale dans celle du modèle standard. Reprenons l'exemple du  $\langle p$  dans la représentation **3** de SU(3), et ajoutons à cette théorie un autre champ scalaire,  $\chi$ , qui se transforme également en **3**. Afin de décrire complètement la dynamique de cette nouvelle théorie, nous introduisons également un potentiel de Higgs pour ce nouveau champ et un terme de couplage, supposés renormalisables, donnés respectivement par

$$V_\chi(\chi) = \frac{\lambda_\chi}{4} (\chi^2 - \eta_\chi)^2 \quad \text{and} \quad V_{\text{coupl}}(\phi, \chi) = \alpha (\phi \cdot \chi)^2,$$

où  $\lambda_\chi$ ,  $\eta_\chi$  et  $\alpha$  sont constants. Pour minimiser ce nouveau potentiel global, il faut non seulement  $\langle p^2 = \eta_j^2$  et  $\chi^2 =$  mais aussi  $\langle p\chi = 0$ , ce qui implique, une fois la direction de  $\langle p$

or  $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_\chi \\ 0 \end{pmatrix}$  déterminée de la même manière que dans l'exemple précédent, qu'on peut prendre  $\mathbf{X} =$  0

Dans les deux cas, il ne reste plus de symétrie, et on a donc le schéma multiple SU(2) — U(1) — {Id}. Compte tenu de cette série d'exemples, nous arrivons à la conclusion qu'il peut y avoir différentes manières d'atteindre la même symétrie finale, à partir d'une symétrie donnée.

A symétrie initiale donnée, la physique des basses énergies qui en résultera sera entièrement déterminée par les représentations selon lesquelles les champs de Higgs se transformeront, et leur potentiel d'interaction ; cela ouvre tellement de possibilités que des exigences externes doivent être imposées pour qu'une théorie réelle soit écrite.

Toutes ces considérations s'appliquent en effet directement à des groupes plus réalistes et nous permettent d'esquisser les idées principales de ce qui aurait pu se produire dans l'Univers primordial à partir de la période où, comme nous le pensons, la grande unification fut réalisée.

## 9.2.4 Conséquences de la grande unification

Les conséquences d'une grande unification sont doubles. À basse énergie, l'unification peut se manifester par de petits effets dans l'interaction entre les particules. Cela apparaît notamment lorsque l'on étudie la stabilité des protons, et pourrait également se manifester dans des interactions impliquant des neutrinos. De plus, l'existence d'une grande phase unifiée à très hautes énergies, c'est-à-dire à hautes températures, peut avoir influencé l'évolution précoce de l'Univers. Enfin, ces deux sortes de conséquences peuvent se mélanger, produisant des effets inhérents à la physique des particules, mais dont l'influence principale est sensible lors des premières phases de l'Univers.

### 9.2.4.1 De nouvelles interactions

Bien qu'expérimentalement défavorisé, reconsidérons cependant, comme modèle jouet, l'exemple prototypique de la théorie GUT, basée sur le groupe SU(5). Une transformation arbitraire de ce groupe est représentée sous la forme générale

$$\begin{array}{l}
\text{SU}(3)_c(X,T) \\
5 \quad (x,y) \text{SU}(2)_{L\text{ xu}(i)}_r
\end{array}
\tag{9.25}$$

en prenant en compte les interactions du modèle standard. Si l'on forme un scalaire à partir de cette matrice avec les champs dans la représentation 5 de l'équation (9.24), par exemple de la forme  $5T^A 5$ , on voit immédiatement que les termes non diagonaux, c'est à dire ceux notés  $X$  et  $Y$  dans (9.25), mélanger les quarks et les leptons. Autrement dit, ils induisent une interaction directe entre ces particules.

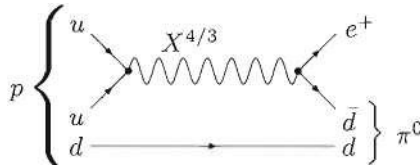
Puisque les quarks ont des charges fractionnaires, il est facile de se convaincre que les bosons intermédiaires  $X$  et  $Y$  sont également chargés fractionnellement, et nous avons, dans nos représentations ,

$$Q_{\text{élec}}(Xq = \pm \frac{1}{6}) \text{ et } Q_{\text{élec}}(Y^M) = \pm \frac{1}{2}.$$

Ces particules doivent également avoir une masse de l'ordre de la grande échelle d'unification, c'est-à-dire, d'après la figure 9.2,  $M_{X,Y} \sim 10^{14} \text{ GeV}$ .

#### 9.2.4.2 Désintégration du proton

La masse obtenue ci-dessus est cependant très fortement contrainte par la durée de vie du proton. En effet, les interactions mentionnées ci-dessus impliquent également que le proton ne peut plus être stable puisque des diagrammes tels que



par lesquels un proton se désintègre en positon et en  $\pi^0$ , sont également possibles. La largeur de désintégration  $\Gamma(p \rightarrow \pi^0 e^+)$  pour ce processus est facilement calculable en suivant les principes de base de la théorie des champs et nous trouvons où  $m_p$  est la masse du proton et  $g_5$  la constante de couplage du groupe  $SU(5)$ . Cette constante, qui peut également être lue sur la figure 9.2, est quelque peu contrainte et ne peut donc pas être rendue aussi petite que souhaité. En conséquence, la durée de vie  $\tau_p$  du proton est essentiellement contrôlée par la masse du boson intermédiaire  $X$ . Pour que le proton soit suffisamment stable, nous voyons que l'énergie caractéristique de la grande unification doit être assez grande. A partir de cette contrainte et de la dépendance énergétique mesurée des constantes de couplage, nous voyons que les grandes théories unifiées ne sont pas purement spéculatives mais sont également falsifiables (toutes les théories spéculatives ne partagent pas cette propriété !). L'ensemble des données actuelles convergent vers une durée de vie supérieure à  $10^{29}$  ans dans les modes de désintégration invisibles (il s'agit donc d'une contrainte absolue et indépendante de tout modèle théorique) et à  $10^{33}$  ans dans le mode particulier évoqué précédemment. Compte tenu de la valeur attendue de la constante de couplage de la figure 9.2 ainsi que de l'échelle d'énergie, ces nombres sont à peine compatibles avec les théories d'unification les plus simples ; comme déjà mentionné,  $SU(5)$  est déjà exclu pour cette raison. C'est peut-être l'argument théorique le plus fort en faveur des extensions supersymétriques des théories standards.

$$\Gamma(p \rightarrow \pi^0 e^+) \equiv \tau_p^{-1} = g_5^4 \frac{m_p^5}{M_X^4}, \quad (9.26)$$

9.2.5 Masse des neutrinos

Hormis le modèle SU(5), toutes les grandes théories unifiées exigent l'existence d'un neutrino droitier, et exigent donc que les neutrinos soient massifs. Par ailleurs, les masses mesurées lors des expériences d'oscillation des neutrinos sont extrêmement faibles, de l'ordre du millièème d'électron-volt. Ceci pose, déjà dans le cadre du modèle standard, un problème de réglage des paramètres. Ce problème semble beaucoup plus grave dans le contexte d'une grande unification puisque les énergies impliquées sont considérablement plus élevées. Ce n'est en réalité pas le cas, et au contraire il est même possible d'utiliser ces hautes énergies pour produire naturellement de très petites masses de neutrinos. Il s'agit du mécanisme à bascule, qui donne une très grande masse au neutrino droitier, expliquant ainsi pourquoi il n'a jamais été directement produit et observé, et en même temps, par extension, une très petite masse au neutrino droitier. neutrino gaucher, expliquant ainsi ce dernier.

9.2.5.1 Neutrinos de Dirac et Majorana

En général, il existe deux types de termes de masse pour les neutrinos, ceux pour lesquels le neutrino est sa propre antiparticule, et les autres. Dans le premier cas, on l'appelle neutrino de Majorana, et il peut être complètement décrit par un bi-spineur. Le second nécessite un véritable quadri-spinor et est un neutrino de Dirac. Le modèle standard de la physique des particules comporte trois neutrinos gauchers décrits par des bi-spineurs avec L e (e,p,r) et les grands modèles unifiés prédisent l'existence d'autres états similaires, disons N, génériquement conçus comme des neutrinos stériles. , que nous dénotons  $\chi_{QR}$ ,  $a = 1, \bullet, \blacksquare \bullet N$ .

, où l'exportateur 'c'

Gathering the neutrinos in the multiplet  $\nu =$

stands for the charge conjugation, then the most general mass term that we can write is of the form

$$\mathcal{L}_{\text{mass}} \nu = \quad + \text{h.c.}, \tag{9.27}$$

où la matrice de masse  $M$  est décomposée comme

$$\tag{9.28}$$

avec  $M_D$  et  $M_M$ , respectivement, matrices de masse de Dirac et Majorana. Dans le cas où les valeurs propres de  $M_M$  sont très grandes, comparez! à celui de  $M_D$ , nous sommes dans le régime de la bascule, et les états propres de Af ont des masses effectives qui peuvent être très différentes.

9.2.5.2 Mécanisme à bascule

Illustrons ce mécanisme par l'exemple d'une seule génération de leptons et d'un seul neutrino stérile. Dans ce cas, on peut ignorer les indices et les matrices de masse de Dirac et Majorana deviennent de simples nombres. La diagonalisation de (9.28) conduit aux deux valeurs propres

$$M_{\pm} = \frac{1}{2} \left( M_M \pm \sqrt{M_M^2 - 4M_D^2} \right) \sim \begin{cases} M_M - \frac{M_D^2}{M_M}, \\ \frac{M_D^2}{M_M}, \end{cases} \quad (9.29)$$

où nous avons explicitement considéré le cas  $M_D \ll M_M$ . Cette relation montre qu'avec une échelle de masse caractéristique de la grande unification, disons  $M_M \sim 10^{15}$  GeV ( $\sim M_+$ ), *on peut* obtenir une très petite masse pour le neutrino gaucher ( $M_-$ ), à savoir de l'ordre du meV disons, à condition que les masses de Dirac soient de l'ordre d'une centaine de GeV, soit une masse comparable à celle des autres particules du modèle standard. On voit aussi que le neutrino droitier garde naturellement une masse  $M_+$  très élevée, de l'ordre de l'échelle d'unification, ce qui explique qu'il n'ait jamais été observé.

### 9.3 Baryogenèse

A très haute température, il existe, même dans le modèle standard, des interactions qui violent la conservation du nombre de baryons. A l'équilibre thermique, la production de particules doit être égale à celle des antiparticules pour que le nombre total de baryons, c'est-à-dire le nombre de baryons moins le nombre d'antibaryons, disparaisse. Les observations indiquent cependant une forte asymétrie entre baryons et antibaryons, au moins localement. De plus, les modèles contenant autant de baryons que d'antibaryons, mais répartis de manière très inhomogène (pour expliquer pourquoi nous vivons dans une région fortement dominée uniquement par les baryons), sont très contraints. Par exemple, dans un univers aussi inhomogène, il doit exister des frontières entre les domaines dominés par la matière et ceux dominés par l'antimatière. Celles-ci auraient la structure de murs de domaines et seraient des régions de contact et donc d'anéantissement. Cela signifie qu'ils émettraient très intensément en rayons X et  $\gamma$  et seraient facilement détectables. Aucune région de ce type n'ayant jamais été détectée, nous avons tendance à croire qu'il existe une asymétrie initiale entre particules et antiparticules.

À moins d'imposer manuellement une telle asymétrie initiale simplement pour reproduire les données, il doit y avoir eu un mécanisme dynamique à l'œuvre par lequel le nombre de baryons est devenu beaucoup plus grand que celui des antibaryons : ce mécanisme est appelé baryogenèse. Certaines théories y parviennent à basse énergie, et dans ces cas on s'attend à ce qu'elles soient testables dans des accélérateurs (voir notamment l'expérience BABAR et les tests de violation de  $CP$  dans le Système  $B^0 - \bar{B}^0$  [8]), alors qu'en Selon d'autres théories, le nombre baryonique est produit à haute énergie et est ensuite protégé de la thermalisation par la symétrie  $B - L$  [9].

#### 9.3.1 Conditions de Sakharov pour la baryogenèse

En 1967, Sakharov [10] a formulé les conditions dans lesquelles il est possible de produire une asymétrie entre baryons et antibaryons dans l'Univers. Trois ingrédients sont nécessaires :

1. Violation du nombre de baryons. C'est bien entendu une condition nécessaire si l'on suppose que la condition initiale est celle d'un état contenant autant de baryons que d'antibaryons, voire n'en contenant aucun.
2. *du  $CP$* . Encore une fois, il s'agit d'une condition *sine qua non* puisque cela implique que les antiparticules ne se comportent pas exactement comme les particules. Si ce

n'était pas le cas, alors pour chaque production d'un baryon à partir d'une particule, il y aurait production d'un antibaryon à partir de l'antiparticule avec la même probabilité, et le nombre total serait ainsi conservé.

3. État hors d'équilibre. Cette dernière condition garantit que la production d'un type arbitraire de particule via un mécanisme n'est pas immédiatement compensée par la disparition de cette particule par la réaction inverse, qui se produirait avec la même fréquence à l'équilibre.

Si trois conditions sont présentes, il est alors possible de produire un nombre baryonique global non nul. La question est maintenant d'envisager des modèles précis permettant de quantifier l'amplitude de cet effet, et de la comparer aux observations.

### 9.3.1.1 Observations

Notant par  $N_B = n_b - \bar{n}_b$  l'asymétrie entre les baryons,  $n_b$ , et les antibaryons,  $\bar{n}_b$ , et  $n_\gamma$  la densité numérique des photons, alors les observations concernant la baryogenèse impliquent généralement le rapport [voir (4.119)]

$$\eta = \frac{N_B}{n_\gamma} \sim 5 \cdot 10^{-10}, \quad (9h30)$$

ce qui est un nombre petit mais non nul que les théories devraient expliquer.

### 9.3.1.2 La gravité quantique

Quelle que soit la théorie détaillée, on peut supposer que les effets de la gravité quantique, durant les tout premiers instants de l'Univers, à une température de l'ordre de la température de Planck, sont capables de violer toute conservation des nombres quantiques, et par conséquent,  $B$ , ainsi que  $CP$ . Puisque la notion d'équilibre thermique n'est probablement pas définie pour ces théories, l'ensemble des conditions de Sakharov peut être hypothétiquement supposé être satisfait et la baryogenèse aurait pu se produire avant toute autre chose.

Malheureusement, cette vision n'est pas très précise car, en l'absence de théorie convaincante, il est impossible de faire le moindre calcul. Donc, dans un certain sens, cela se réduit essentiellement à imposer une condition initiale, d'une manière pas tellement plus élaborée (mais avec une meilleure formulation). Une telle baryogenèse à l'échelle de Planck présente également un inconvénient majeur. Comme expliqué au chapitre 8, l'Univers a très probablement traversé une phase inflationniste au cours de laquelle toute asymétrie préexistante aurait été effacée. C'est pourquoi, dans l'état actuel, les mécanismes crédibles de baryogenèse reposent sur des échelles énergétiques soit de l'ordre de la grande unification, soit de l'électrofaible (ou peut-être un mélange des deux).

### 9.3.1.3 Grande unification

Presque toutes les théories de grande unification couplent les quarks et les leptons de manière à violer efficacement la conservation du nombre de baryons, ce qui en fait de sérieux candidats à la baryogenèse. De plus, même si le modèle électrofaible standard prédit une violation *de CP* (ce qui a été observé), il n'y a aucune raison pour qu'un



modèle réaliste de grande unification, qui devrait également décrire ces effets, ne viole pas également  $CP$ , et vraisemblablement à un niveau plus élevé (cela cela a été le cas de toutes les théories qui ont été étudiées en détail jusqu'à présent). Enfin, de nombreuses particules dans ces théories sont instables, à commencer par les bosons de jauge  $X$  et  $Y$ . Leur désintégration, au moment où la température devient suffisamment basse pour arrêter leur production en nombre suffisant, rompt l'équilibre thermodynamique. De plus, ces particules sont responsables de la non-conservation de  $B$ . Autrement dit, les conditions de Sakharov peuvent là encore être satisfaites, et des calculs précis semblent indiquer que le nombre de baryons produit pourrait être compatible avec les observations [9].

En pratique, nous supposons que tant que la température est supérieure à l'échelle d'énergie  $E_{\text{GUT}}$ , l'Univers est en équilibre thermique. Vient ensuite le moment où la production de  $X$  et  $Y$  devient trop faible pour compenser leur décroissance, c'est à dire où le taux d'expansion  $H$  de l'Univers devient comparable à la durée de vie de ces particules (voir chapitre 4). Le théorème  $CPT$  implique alors que pendant cette période, autant de  $X$  que de  $Y$  doivent être produits puisque leur largeur de désintégration totale doit être exactement égale. Cela dit, les largeurs de désintégration partielle, c'est-à-dire les probabilités de désintégration dans chaque canal possible, peuvent être différentes. Ainsi, par exemple, les chaînes

$$(X \longrightarrow d\bar{t} ; X \longrightarrow q\bar{u}) ,$$

où  $\mathbf{f}(\mathbf{q})$  représente un élément arbitraire du doublet lepton (quark) de  $SU(2)_L$ , ne sont pas nécessairement égaux aux canaux

$$(X \longrightarrow d\mathbf{f} ; X \longrightarrow q\mathbf{u}) ,$$

bien que, en général, il s'agisse d'un effet assez faible (deuxième ordre en perturbations, sur une boucle). Dans ce cas, la production de quarks et d'antiquarks sera légèrement différente, laissant une faible densité de reli.

Il y a de fortes raisons de penser que ces mécanismes, bien que simples à mettre en œuvre, ne sont pas responsables de la baryogenèse primordiale. Tout comme pour l'échelle de Planck, la phase inflationniste qui s'ensuit tend inévitablement à diluer toute l'asymétrie. Cette phase inflationniste est suivie d'un réchauffage au cours duquel de nombreuses particules sont produites et entrent rapidement en équilibre thermique. Pour des raisons expliquées au chapitre 11 (surproduction de monopôles), la température atteinte doit absolument être inférieure à la température de transition de phase de grande unification,  $E_{\text{GIUT}}$ . En conséquence, ce mécanisme n'a pas pu être efficace après l'inflation. Il ne peut donc pas produire l'asymétrie baryonique observée aujourd'hui.

### 9.3.2 Anomalies électrofaibles

Au niveau classique et perturbatif, les nombres de baryons et de leptons sont conservés séparément par les interactions électromagnétiques et faibles. Cependant, au niveau quantique, la théorie possède ce qu'on appelle des anomalies, de sorte que les courants ne sont pas conservés. Ceci s'exprime par la relation

$$d\gamma^M = d\gamma^M = \frac{1}{L} \frac{N}{g^2} \text{Tr} \gamma^M \sim \text{TYB} \tag{9.31}$$

avec le nombre  $N_F = 3$  des familles. Cette relation remplace la conservation habituelle, dans le cas des courants baryoniques et leptoniques. On remarque que le courant  $B = L$  est conservé : ce courant apparaît également dans les unifications de type  $SU(5)$  ou  $SO(10)$ .

Dans l'équation (9.31), nous avons formé des champs matriciels et leur dual  $B^{111}$  sur la base des vecteurs de  $SU(2)_L$  [voir (2.151)] en utilisant les définitions [où  $B_{\mu\nu}$  est le tenseur de Faraday du groupe  $SU(2)_L$ , identifiable dans le Lagrangien (2.154)]

$$B^\mu = \text{et } B^\mu = \epsilon^{\mu\nu\lambda} B_{\nu\lambda}, \tag{9.32}$$

ce qui se généralise facilement au cas d'un groupe à générateurs arbitraires  $T^a$  en effectuant la substitution  $\epsilon^{123} \rightarrow T^a$ .

9.3.2.1 *Numéro de Chern-Simons*

Bien qu'apparemment compliquée, l'expression du membre de droite de (9.31) permet une simplification considérable dès que l'on remarque l'identité

$$\text{Tr} B^\mu B^\mu = \text{Tr} \left\{ \left( B_{\nu\alpha} + \frac{2}{3} B_\nu B_\alpha \right) B_\beta \right\}, \tag{9.33}$$

où  $B_M = |B_{\mu M}|$ .

En notant  $B = f d^3 x$  le nombre baryonique associé au courant  $J_g$  et en utilisant le fait que toutes les configurations d'intérêt physique disparaissent suffisamment vite à l'infini, on constate qu'entre les instants  $t_j$  et  $t^A$ , la variation du nombre baryonique  $AB$  est donné par

$$AB = N_F \Delta N_{cs} = N_F [N_{cs}(t_2) - N_{cs}(t_1)]. \tag{9.34}$$

Les nombres Chern Simons, définis par

$$N_{cs} = \frac{1}{24\pi^2} \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\lambda} \text{Tr} B_\mu (dB_\nu + B_\nu B_\lambda), \tag{9.35}$$

finissent par être des nombres entiers tant que la configuration du champ est une pure jauge, c'est-à-dire si l'on peut écrire  $B = U^{-1} dU$  où  $U$  est une transformation de jauge.

9.3.2.2 *Instanton et sphaléron*

Au niveau perturbatif, deux configurations de champ de jauge pure sont en principe indiscernables. Les deux peuvent être utilisés comme état de vide pour la théorie, à la différence près qu'ils n'ont pas le même nombre de Chern-Simons. Il peut exister une solution euclidienne, appelée *instanton*, qui interpole entre les deux configurations. Connaissant la structure d'un instanton, nous pouvons calculer la probabilité de passer d'un état de vide à un autre, ce qui donne la probabilité de produire spontanément un nombre de baryon. L'ampleur typique attendue de cet effet est de l'ordre de  $e^{-1/2} \sim 10^{-91}$  à basse énergie ( $T \ll M_W$ ) et est donc totalement négligeable dans toute situation non cosmologique.

La structure globale de l'espace de configuration a alors une infinité de minima, un pour chaque valeur de  $N_{cs} \in \mathbb{Z}$  correspondant aux configurations de vide (de jauge pure) liées aux instantons. La hauteur de la barrière de potentiel qui sépare ces états peut être évaluée en étudiant la configuration indépendante du temps qui correspond au maximum d'énergie. Une telle solution a été trouvée par Klinkhamer et Manton [12] et est appelée sphaléron. Cette

solution, nécessairement instable, possède une énergie de l'ordre de

$$\frac{p_{Mw}}{E_{\text{sphaléron}}} \approx 2'$$

et il a été constaté que, via le mode sphaléron, la largeur de transition par unité de volume pour une variation unitaire de Chern-Simons [transition de  $AB = 3$  dans le modèle standard, donc suivant (9.34)], est de l'ordre de

$$\frac{\Gamma_{\text{sphaléron}}}{V} \simeq T^4 \exp\left(-\frac{E_{\text{sphaléron}}}{T}\right),$$

lorsque l'Univers est à une température  $T$ . Lorsque la température atteint celle de la transition électrofaible, la masse du boson intermédiaire diminue, de sorte que ce dernier résultat ne peut a priori plus s'appliquer. En fait, il s'avère que cela conduit à un bon ordre de grandeur puisque la meilleure estimation que l'on trouve dans ce cas est  $r_{jV} \sim T^4 / g^4$ .

### 9.3.3 Baryogenèse électrofaible

#### 9.3.3.1 Conservation $B-L$

Il est important de réaliser que même si le modèle standard des interactions électrofaibles - possède en lui-même un mécanisme capable de produire dynamiquement un nombre de baryon, il le fait en conservant la combinaison  $B - L$ . Cela implique que le sphaléron peut également agir dans le sens inverse : si un phénomène arbitraire de conservation  $B - L$  produit un nombre de baryons avant la transition électrofaible, alors, à cause du sphaléron, cette transition éliminera automatiquement cette contribution primordiale. Il s'agit d'une restriction très contraignante pour les modèles de baryogenèse utilisant la transition de grande unification.

Dans la forme actuelle du modèle standard, sa contribution à la baryogenèse est largement insuffisante. Des extensions plausibles sont toutefois possibles et ne doivent pas être négligées. Par conséquent, ces effets doivent être pris en compte car ils conduisent à une éventuelle contribution des échelles électrofaibles à la baryogenèse.

#### 9.3.3.2 Violation *du* $CP$

Comme le montrent les équations (9.16) et (9.17), la symétrie  $CP$  n'est pas respectée par les interactions électrofaibles en raison de la phase non triviale  $\angle 5_{CKM}$  de la matrice CKM (voir Chapitre 2). Malheureusement, cette phase est très petite : sa valeur peut être estimée en calculant explicitement les probabilités de transition entre des états ayant des valeurs *de*  $CP$  différentes. En utilisant les valeurs expérimentales connues (Réf. [11] du chapitre 2) et le modèle standard, on trouve

$$\angle 5_{CKM} < 10^{-25}$$

sachant que cette valeur est un préfacteur à toute estimation de la production de  $B$  basée sur le sphaléron. Autrement dit, alors qu'une production de  $AB = N_F / N_{CS}$  est déjà faible, puisque  $A; V_{CS} = 1$  est très favorisée, ce nombre est considérablement réduit du facteur de phase  $\angle 5_{CKM}$ .

#### 9.3.3.3 Transition électrofaible

Le dernier coup porté au mécanisme de la baryogenèse électrofaible vient de la transition elle-même. Pour que la production de  $B$  soit simplement possible, la transition doit être hors équilibre. Pour compenser la faible violation *de*  $CP$ , la transition doit être aussi éloignée que possible de l'équilibre. Pour cela, il faut une transition du premier ordre, c'est à dire un terme

cubique dans le potentiel effectif du champ de Higgs à température finie. Mais il s'avère qu'en calculant ce terme cubique en fonction des masses du  $Z$ , du  $W$  et du Higgs, on retrouve un coefficient assez faible, de l'ordre de  $10^{-2}$  au mieux, lorsqu'on considère la limite supérieure du Masse de Higgs.

La transition étant faiblement du premier ordre, elle se fait par nucléation. Des bulles de vide véritable se dilatent dans l'espace, sinon elles seraient toujours dans le faux vide. Les champs de Higgs varient rapidement à la surface de ces bulles, créant les conditions nécessaires à la baryogenèse. Il est donc nécessaire, pour produire un nombre important de baryons, que le processus de production s'arrête rapidement sous vide véritable après le passage des bulles, de manière à figer le nombre produit. Si ces processus se déroulaient encore dans la phase de vide véritable, qui est en équilibre thermodynamique, alors des antibaryons seraient rapidement produits pour compenser les baryons initiaux et l'asymétrie initiale serait perdue.

Pour que la violation  $B - L$  soit faible dans le vide vrai après la transition, l'énergie du sphaléron doit être très grande par rapport à la température juste après la surface de la bulle, c'est-à-dire que les bosons intermédiaires doivent avoir des masses significatives, et l'espérance La valeur du champ de Higgs devrait croître très rapidement. Cela dépend des coefficients obtenus en potentiel effectif et de la masse de Higgs à température zéro. Compte tenu des contraintes imposées à cette dernière ( $M_H > 115$  GeV), nous constatons que la transition sphaléron, qui produit le nombre de baryons requis à travers la surface de la bulle, le réduit considérablement dans la phase de vide véritable qui suit. La théorie électrofaible n'est donc pas suffisante pour la baryogenèse. Ceci est encore plus vrai comme l'indiquent des calculs récents qui semblent indiquer que lorsque des corrections perturbatives d'ordre supérieur sont prises en compte, la transition n'est même pas faiblement du premier ordre, mais simplement un croisement en douceur, c'est-à-dire pas de transition en tant que telle ! Il s'agit là d'un véritable « *coup de grâce* » pour la baryogenèse électrofaible, ce qui implique que le modèle standard doit être étendu d'une manière ou d'une autre.

### 9.3.3.4 *Modifications*

Certains modèles [9] ont été proposés selon lesquels la baryogenèse peut être réalisée à la transition électrofaible. Ces modèles partagent tous la propriété commune de modifier la physique des basses énergies par des effets induisant des hautes énergies. La supersymétrie, par exemple, introduit de nouvelles particules, ce qui modifie les coefficients du potentiel effectif de Higgs et peut par conséquent rendre la transition plus forte au premier ordre. Ces nouvelles particules impliquent de nouvelles interactions, et par conséquent la possibilité de violer plus fortement la symétrie  $CP$ . Pour l'instant, l'espace des paramètres permettant une baryogenèse suffisante est assez contraint, et ne semble pas très naturel, de sorte que ces hypothèses ne sont pas retenues comme étant les plus favorables.

Une autre possibilité à étudier est celle d'un mécanisme non thermique tel que le préchauffage après la phase d'inflation (Chapitre 8). Si des effets de type sphaléron existent lors de la phase de préchauffage, alors la production pourrait être considérablement amplifiée. Autrement dit, et même si ce genre de scénario n'est pas favorisé par les recherches actuelles, il reste possible que la transition électrofaible ait contribué à la baryogenèse.

Notons enfin que la possibilité d'un mécanisme non thermique s'applique également aux modèles décrits ci-dessus.

### 9.3.4 Leptogenèse

#### 9.3.4.1 Retour au mécanisme à bascule

Comme expliqué ci-dessus, l'une des conséquences directes et inévitables des grandes théories unifiées est l'existence d'une masse de neutrinos. Cette masse est générée par le mécanisme « à bascule » qui permet d'obtenir des masses très différentes entre les composantes gauche et droite du neutrino. D'où peut provenir un terme de masse tel que celui de l'équation (9.27) ? Quant à tous les termes de masse, leur origine la plus probable réside dans un couplage de Yukawa avec la masse de Higgs. On peut ainsi écrire

$$[0]UNE,$$

où  $A$  est une matrice constante de couplage et la partie constante  $M$  de la matrice provient, dans ce cas, de la valeur attendue non nulle du champ de Higgs.

Puisque le neutrino stérile n'a pas de nombre quantique, la réinterprétation de (9.27) comme une interaction avec échange d'un boson de Higgs indique que ce neutrino stérile peut se désintégrer en un boson de Higgs avec un antilepton ou en un antiHiggs avec un lepton. Le nombre de leptons n'est donc plus conservé. De plus, avec les neutrinos massifs, de nouvelles phases apparaissent dans la matrice de masse et, de cette manière, la violation *de CP* peut être bien plus importante que dans le secteur des quarks. En conséquence, et à l'identique des modèles basés sur la grande unification, les probabilités de désintégration en neutrinos ou en antineutrinos peuvent être différentes, donnant lieu à la leptogenèse.

Le scénario sera donc le suivant [9]. Pour des raisons thermiques ou non, l'Univers contient, à un moment donné de son histoire, un grand nombre de neutrinos droitiers. La raison thermique peut être que la température de l'Univers devient simplement inférieure à la masse des neutrinos droitiers. Lorsqu'un mécanisme non thermique est à l'œuvre, il peut y avoir une production par résonance paramétrique d'un grand nombre de neutrinos droitiers. Dans les deux cas, les neutrinos droitiers étant instables, ils commencent à se désintégrer, produisant un nombre global de leptons en raison des différentes sections efficaces dans les modes neutrino ou antineutrino. Cela produit un  $B - L$  *global* puisqu'il n'y a pas de production de baryons associés à la leptogenèse. L'amplitude est calculée en fonction des rapports de branchement de la désintégration des neutrinos stériles. Ce  $B - L$  *initial*, en réalité dû à ce nombre de leptons initial, est ensuite converti en nombre de baryon par le processus lié au sphaléron. On trouve alors [11]

$$= \frac{4(V_F + 2)}{22N_F + 13} \frac{1}{V_{7ln}} =$$

où  $(B - L)_{ini}$  est le nombre de leptons initialement produits lors des désintégrations des neutrinos. Pour des valeurs « raisonnables » des paramètres de microscopie, en réalité indéterminées, cela conduit à une baryogenèse en accord avec la contrainte observationnelle (9.30).

Il est important de noter que ce mécanisme ne repose pas uniquement sur l'existence d'une masse de neutrinos, désormais quasiment établie. C'est aussi tout à fait naturel dans le contexte des grandes théories unifiées supersymétriques avec inflation hybride, modèles qui s'avèrent très privilégiés pour des raisons totalement indépendantes.

### 9.3.5 Affleck – Mécanisme de restauration

Un autre mécanisme qui fonctionne bien repose sur les oscillations cohérentes d'un champ scalaire, proposé par Affleck et Dine en 1985 [13], et nécessite que le champ ait une charge baryonique.

#### 9.3.5.1 Un *champ scalaire baryonique*

Le mécanisme d'Affleck-Dine pour la production du nombre de baryons repose sur la possibilité qu'un champ scalaire complexe  $\phi$ , tel que celui décrit par le Lagrangien (2.103), porte un nombre de baryons, c'est-à-dire que la symétrie  $U(1)$  associée à c'est précisément celui dont l'hypercharge est  $B$ . Dans ce cas, le courant (2.111) appartient au courant baryonique total. De plus, le Lagrangien (2.103) est également invariant sous la transformation  $\phi \rightarrow e^{i\alpha} \phi$ , ce qui peut être interprété comme une symétrie  $CP$  [cf. la transformation (2.170) et (2.175) pour le champ scalaire],

Ce type de champ est attendu dans les extensions supersymétriques des théories des particules. Dans ce cadre, discuté en détail au chapitre 10, à chaque fermion on associe un partenaire bosonique avec les mêmes nombres quantiques, et on exige qu'une nouvelle symétrie, appelée supersymétrie, soit maintenue entre ces fermions et bosons. De manière intéressante, en effet pour que la symétrie soit possible, on associe aussi un fermion à chaque boson. Puisque les nombres de baryons et de leptons des quarks et des leptons sont déterminés par leurs nombres quantiques, alors ceux des partenaires supersymétriques le seront également. Il doit donc y avoir des champs scalaires porteurs de charges leptoniques et baryoniques.

#### 9.3.5.2 *Oscillations cohérentes*

Les champs scalaires, comme le montre la section 8.6 du chapitre 8 sur l'exemple du préchauffage, peuvent osciller de manière cohérente. Dans une extension supersymétrique telle que celle discutée ci-dessus, certains champs scalaires portent des charges leptoniques et baryoniques, de sorte que s'ils étaient amenés à osciller de manière cohérente, ils pourraient produire de grands nombres de baryons et de leptons.

Durant une phase d'oscillations cohérentes, un champ scalaire massif libre se comporte, en moyenne, comme un fluide poussiéreux. En particulier, le domaine de test évolue au fur et à mesure

$$a^{-3/2} \langle \dot{\phi}^2 \rangle \propto v/t Z_{3/2}(mt) \quad (9.36)$$

dans un Univers où le facteur d'échelle évolue comme  $a \propto t^\alpha$ ; dans (9.36),  $Z_{3/2}(mt)$  représente une fonction de Bessel générique d'indice  $(3 - \alpha)/2$ .

A des temps très courts, on peut étendre la fonction de Bessel, conduisant à un mode constant  $\phi \approx v$  qui domine l'évolution du champ scalaire. Aux instants tardifs,  $mt \gg 1$ , le champ se comporte comme  $\phi \sim a^{-3/2} \sin(mt + \theta)$ , où  $\theta$  est une phase arbitraire. C'est la phase d'oscillation cohérente qui intéresse la production de particules : pour cela, il faut ajouter un autre ingrédient dans le modèle, à savoir introduire des interactions.

#### 9.3.5.3 *Production partielle*

Considérons maintenant des ternis auto-interactifs pour  $\phi$  qui ne conservent ni le nombre de baryon ni ne respectent  $CP$ . Considérons un potentiel de la forme

$$V(\phi) = A|\phi|^4 + \frac{1}{2}m^2|\phi|^2 + \text{h.c.}, \quad (9.37)$$

dans lequel les constantes de couplage,  $e$  et  $m$ , sont petites et complexes de manière à violer  $CP$ . Seul le premier terme de (9.37) conserve le nombre baryonique.

Nous supposons maintenant qu'à l'instant initial, le champ scalaire est réel, soit  $\phi \in \mathbb{R}$ . En négligeant toutes les contributions de la partie imaginaire par rapport à la partie réelle,  $\phi \sim \phi_0 \cos(\omega t)$ , l'équation du mouvement de la partie imaginaire est

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + 3H\frac{d\phi}{dt} + m^2\phi \sim 9m(e + 25)\text{Re}(\phi). \quad (9.38)$$

La solution de (9.38) pour  $mt \ll 1$  s'obtient en écrivant dans ce régime  $\text{Re}(\phi) = \phi_0 \cos(\omega t)$  qui fixe l'amplitude de la partie imaginaire. Lorsque  $mt > 1$  : en revanche, le terme source devient rapidement négligeable et on retrouve la même solution que pour la partie réelle,

$$\phi \sim \phi_0(e + 25)a^{-3/2} \sin(mt + \dots),$$

où  $\beta$  est encore une constante arbitraire que l'on calcule numériquement, tout comme pour les coefficients de proportionnalité.

Avec la solution pour les parties réelles et imaginaires du champ scalaire, il suffit de calculer la composante temporelle du courant pour obtenir la densité numérique des baryons produits par ce mécanisme. Nous trouvons

$$n_B \sim 9m(e + 25)a^{-3} \sin((\beta - \beta^*),$$

ce qui montre explicitement qu'un nombre de baryon peut être produit à condition que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

(1) Le Lagrangien doit contenir un terme qui viole la conservation du nombre de baryon, c'est à dire qu'il faut que  $\epsilon_{ijk}$  soit 0 ou 5.

(2) Les constantes de couplage doivent avoir des parties imaginaires non nulles.

Il est intéressant de noter à ce stade que l'implémentation rigoureuse de modèles de type Affleck-Dine dans des extensions supersymétriques du modèle standard ou dans des théories supersymétriques de grande unification est possible et même naturelle, et conduit à des valeurs de  $n_B$  compatibles avec (9.30).

Il n'existe pas de mécanisme généralement accepté pour la baryogenèse, et beaucoup de travail reste encore à faire sur ce sujet [L4]. Aussi bizarre que cela puisse paraître, nous trouvons cependant plutôt encourageant de constater qu'aucun modèle physique standard n'a jamais été capable de produire des baryons à un niveau suffisant : puisque l'asymétrie entre baryons et antibaryons est une référence ! En fait, une sorte de nouvelle physique est à l'œuvre là-bas, et pas nécessairement à des échelles d'énergie inaccessibles. Nous espérons donc que certains nouveaux modèles produisant cette asymétrie pourront être testés non seulement avec de meilleures observations à venir, mais aussi grâce à la production directe, dans des accélérateurs, c'est-à-dire des expériences, des nouvelles particules qu'ils prédiront inévitablement.

# Les références

- [1] S. TOMONAGA, « Sur une formulation relativiste invariante de la théorie quantique des champs d'ondes », *Prog. Théorique. Phys.* **1**, 27, 1946 ; J. SCHWINGER, « Électrodynamique quantique ». I. Une formulation covariante », *Phys. Rév.* **74**, 1439, 1948.
- [2] RD MCKEOWN et P. VOGEL, « Masses et oscillations des neutrinos, triomphes et défis », *Phys. Rep.* **394**, 315, 2004 ; les données de KamLAND de la figure 9.1 sont analysées par la collaboration «Measurement of Neutrino Oscillation with KamLAND: Evidence of Spectral Distortion», *Phys. Le révérend Lett.* **94**, 081801, 2005.
- [3] Le site officiel à [http : //www-sk. icrr .u-tokyo. ac. jp/sk/index-e](http://www-sk.icrr.u-tokyo.ac.jp/sk/index-e). HTML fournit plus de détails et de résultats techniques.
- [4] Leur site Web officiel à <http://kamlaLnd.lbl.gov/> fournit les derniers résultats.
- [5] H. GEORGI et SL GLASHOW, « Unité de toutes les forces de particules élémentaires », *Phys. Le révérend Lett.* **32**, 438, 1974.
- [6] JC PATI et A. SALAM, « Symétrie unifiée lepton-hadron et théorie de jauge des interactions de base », *Phys. Rév.D* **8**, 1240, 1973.
- [7] P. LANGACKER, « Théories grandes unifiées et désintégration du proton », *Phys. Rep.* **72**, 185, 1981.
- [8] *Le BaBar Physics Book*, rapport SLAC-R-504 (2001),  
<http://www.slac.stanford.edu/pubs/slacreports/slac-r-504.html> .
- [9] M. DÎNE et A. KUSENKO, 'L'origine de l'asymétrie matière-antimatière', *Rév. Mod. Phys.* **76**, 1, 2004. Un résumé des principales notions se trouve également dans l'article de synthèse de A. RIOTTO et M. TRODDEN, 'Recent Progress in Baryogenesis', *Ann. Rév. Nucl. Partie. Sci.* **49**, 35, 1999.
- [10] AD SAKHAROV, « Violation de l'invariance CP, de l'asymétrie C et de l'asymétrie baryonique de l'Univers », *ZhETF Pis ma Redaktsiiu* **5**, 32 1967.
- [11] JA HARVEY et MS TURNER, « Nombre de baryons et de leptons cosmologiques en présence d'une violation électrofaible du nombre de fermions », *Phys. Rév.D* **42**, 3344, 1990.
- [12] F. KLINKHAMER et N. MANTON, « Une solution en point de selle dans la théorie de Weinberg-Salam », *Phys. Rév.D* **30**, 2212, 1984.
- [13] I. AFFLECK et M. DÎNE, « Un nouveau mécanisme de baryogenèse », *Nucl. Phys.* **B249**, 361, 1985.
- [14] W. BuCHMÜLLER, 'Baryogenèse - 40 ans plus tard' Actes PASCOS - 07, arXiv:0710.5857 2007.



## Extensions du cadre théorique

---

Les différents cadres théoriques que nous avons élaborés jusqu'à présent doivent être étendus car ils peuvent être reconnus comme incomplets de deux manières. Premièrement, la gravité n'est jamais incluse dans les théories de la physique des particules, ce qui se justifie dans la mesure où elle n'a pas d'effets significatifs sur les interactions quantiques de ces particules, du moins tant que les énergies impliquées sont faibles par rapport à l'échelle de Planck.

C'est pourquoi nous commencerons par étudier les modifications qui naissent des couplages entre les champs classiques, par exemple les champs scalaires, et la gravité : ce sont les théories scalaires-tensorielles (Section 10.1). Nous considérons ensuite la physique des particules dans un espace-temps courbe arbitraire (Section 10.2).

Deuxièmement, le cadre de la physique des particules lui-même ne semble pas achevé. Par exemple, comme le montre clairement la figure 9.2, l'unification des trois constantes de couplage à hautes énergies, bien qu'apparemment plausible, n'est pas définitive à partir de ces mesures. La supersymétrie, qui sera discutée dans la section 10.3, permet une bien meilleure unification (voir Fig. 10.5). L'extension naturelle de cette supersymétrie apparaît lorsqu'on impose qu'elle soit une symétrie locale ; dans ce cas, nous remarquons que les transformations spatio-temporelles deviennent des quantités de jauge. En d'autres termes, la gravité apparaît spontanément dans ce cadre, que l'on appelle commodément supergravité (Section 10.3.6). Enfin, la supersymétrie est une prédiction de la théorie des supercordes, qui est une théorie prétendument fondamentale sur laquelle se concentre une partie substantielle des recherches en physique fondamentale (chapitre 13).

### 10.1 Théorie du tenseur scalaire de la gravité

Les théories du tenseur scalaire sont les extensions les plus naturelles de la théorie de la relativité générale. Dans ces théories, la gravité est médiée par un champ de spin 2 sans masse, le graviton,  $g^\mu_\nu$ , tout comme en relativité générale, et par un ou plusieurs champs scalaires de spin 0,  $\phi$ . Ces théories ont été initialement considérées par Jordan, Fierz, Brans et Dicke [1],

De nouveaux degrés de liberté scalaires apparaissent de manière générique dans les théories à dimensions supplémentaires (Chapitre 13), en particulier dans la théorie des cordes. Dans ce dernier cas, ce qu'on appelle le dilaton est présent dans le supermultiplet du graviton à 10 dimensions et d'autres champs scalaires, appelés *modules* (voir section 13.2.5.3), apparaissent comme une compactification de type Kaluza-Klein dans un champ à quatre dimensions. l'espace-temps est réalisé.

Du point de vue de la théorie des champs, les théories du tenseur scalaire décrivent simplement un champ scalaire universellement couplé à la matière de sorte qu'il respecte la plupart des symétries de la relativité générale : les lois de conservation, la constance des constantes non gravitationnelles (voir

Section 12.3 du chapitre 12) et invariance locale de Lorentz. De plus, l'universalité de la chute libre est également assurée tant que l'énergie de liaison gravitationnelle est négligeable. Il s'agit donc d'une extension bien définie et théoriquement bien motivée de la relativité générale, offrant une phénoménologie intéressante pour la cosmologie. Notez que des théories scalartensorielles plus générales, comme celles qui découlent du contexte des théories de Kaluza-Klein ou du dilaton de la théorie des cordes (voir chapitre 13), violent la constance des constantes non gravitationnelles parce que ces champs ne sont pas universellement couplés à la matière.

### 10.1.1 Formulation

Pour décrire les propriétés de ces modèles, considérons le cas d'une théorie à un seul champ scalaire (pour une description plus générale, voir Réf. [2]).

#### 10.1.1.1 Cadre Jordanie

Dans le cadre dit de *Jordan* (également souvent appelé cadre « chaîne »), on suppose simplement qu'il existe un champ scalaire couplé au scalaire de Ricci. L'action de la théorie prend alors la forme générale

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R - \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + V(\phi) \right] \quad (10.1)$$

où  $G^*$  est la constante gravitationnelle « nue » (qui, comme nous le verrons, diffère de celle mesurée,  $G_N$ ) à partir de laquelle nous définissons «  $\kappa^2 = 8\pi G^*$  » et  $S_m$  est l'action pour les champs de matière. Ces derniers sont couplés de manière minimale, c'est à dire sans couplage supplémentaire spécifique à la métrique  $g^\mu_\nu$ , de sorte qu'elle n'est qu'une fonctionnelle des champs de matière et ne fait pas intervenir le champ scalaire  $\phi$ . Notez qu'en raison du facteur global  $G^*$ ,  $\kappa^2$  est sans dimension. La théorie semble dépendre de trois fonctions arbitraires, dont deux,  $F$  et  $Z$ , sont sans dimension et  $U$  est le potentiel de champ scalaire. La fonction  $F$  doit être définie positivement pour que le graviton transporte de l'énergie positive. On peut toujours absorber l'une des deux fonctions  $F$  ou  $Z$  dans une redéfinition du champ scalaire pour que la théorie n'ait effectivement que deux fonctions arbitraires.

Deux paramétrisations sont souvent utilisées,

- le paramétrage de Brans-Dicke où nous définissons

$$F(\phi) = \phi, \quad Z(\phi) = \frac{1}{\phi} \quad (10.2)$$

- le paramétrage le plus simple, qui peut parfois être pathologique, pour lequel

$$F(\phi) \text{ arbitraire}, \quad Z(\phi) = 1. \quad (10.3)$$

Dans le cadre de Jordan, les champs de matière sont universellement couplés au tenseur métrique,  $g^\mu_\nu$ , de sorte que les lois et les règles de notre laboratoire, qui sont composés de matière ordinaire, ne sont pas affectés par la valeur locale du champ scalaire. Donc dans ce cadre, toute mesure expérimentale aura son interprétation habituelle. Ce sera par exemple le cas de la constante de Hubble, des redshifts, etc. De plus, tous les processus physiques, comme les processus nucléaires, prennent leur forme habituelle dans ce cadre.

In the most general case, varying the action (10.1) with respect to the metric gives the (modified) Einstein equations,

$$F(y)G'_{,\alpha} = 8\pi G^*T^{\alpha} + \mathcal{L}(\phi) \quad (\partial_{\alpha}\phi)^2 \quad (10-4)$$

where is the covariant derivative associated with  $g^{\alpha}$  and we use the notation  $F_{,\alpha} = dF/d\phi$ . The energy-momentum tensor of the matter is defined by (1.84), as usual.

Varying the action (10.1) with respect to  $\phi$  leads to the Klein-Gordon equation governing the evolution of the scalar field,

$$Z(\phi)\Box\phi = U_{,\alpha} - \nabla F_{,\alpha}R - \nabla Z_{,\alpha} (d_{\alpha}\phi)^2. \quad (10.5)$$

Finally, variations with respect to the matter fields reduce to the standard conservation equations, since there is no coupling between these fields and namely

$$= 0. \quad (10.6)$$

The Klein-Gordon equation (10.5) can be rewritten using the trace of (10.4) to determine the scalar curvature,  $R$ . We then obtain an evolution equation for the scalar field in the Brans-Dicke form,

$$2S\Box\phi = 8\pi G^*F_{,\alpha}T^{\alpha} - (d_{\alpha}\phi)^2 - 4F_{,\alpha}U^{\alpha} + 2U_{,\alpha}F, \quad (10-7)$$

with  $T =$  and  $2w = 2ZF + 3F^{\alpha}$ . This function reduces to  $2\Box(\phi) + 3$  in the Brans-Dicke representation.

### 10.1.1.2 Einstein frame

From a theoretical point of view, it is interesting to study these theories in the Einstein frame defined by diagonalizing the kinetic terms for the graviton and scalar field. This is achieved thanks to a ‘conformal’ transformation of the metric,

$$g^{\alpha} = \quad (10-8)$$

and a redéfinition of the scalar field according to

$$\left(\frac{d\phi}{d\varphi}\right)^2 = \frac{3}{4} \left[\frac{d \ln F(\varphi)}{d\varphi}\right]^2 + \frac{Z(\varphi)}{2F(\varphi)} \quad (10.9)$$

$$y(\varphi) = F^{1/2}(\varphi), \quad (10.10)$$

$$2V(\varphi) = VMF^{-2}(\varphi). \quad (10.11)$$

En utilisant ces nouvelles variables et fonctions, l'action (10.1) prend la forme

(10.10)

(10.11)

$$\frac{1}{16\pi G_*} \int d^4x \sqrt{-g_*} [R_* - 2g_*^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi_* \partial_\nu \varphi_* - 4V(\varphi_*)] + S_m[A^2(\varphi_*) g_{\mu\nu}^*; \text{matter}]. \quad (10.12)$$

where  $g_*$  is the determinant of the metric  $g^*_{\cdot j}$  and  $B$  its Ricci scalar. More generally, any quantity with a star (\*) will be assumed to be defined in this frame. As it is

written, the first term is exactly the gravitational action of general relativity plus a minimally coupled scalar field but now the matter fields are explicitly coupled to this scalar field through the coupling function  $T^2$  ( $\phi^*$ ).

The Einstein, Klein-Gordon and matter-conservation equations, obtained by varying the action (10.12) with respect to the various fields, then take the form

$$(10.13)$$

$$(10.14)$$

$$(10.15)$$

where the function  $a$ , which is the coupling strength of the scalar field to matter sources, is defined by

$$\frac{d \ln H}{d \ln \phi^*} = \quad (10.16)$$

whose derivative

$$\frac{da}{dg} \quad (10.17)$$

will also be needed later on.

The stress-energy tensor  $T^{\mu\nu}$  is now defined from the variation of the matter action with respect to  $g_{\mu\nu}$  as

$$T^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g_{\mu\nu}}$$

et on peut vérifier qu'il est lié au tenseur énergie-impulsion défini dans le repère de Jordan par  $T^{\mu\nu} = A^2 T^{\mu\nu}_J$ .

L'avantage du référentiel d'Einstein réside dans le fait que la transformation (10.8) diagonalise les termes cinétiques du graviton et du champ scalaire. Ainsi, en linéarisant autour d'un espace-temps de Minkowski, les degrés de liberté de spin 0 et 2, c'est-à-dire scalaire et tenseur, sont respectivement les perturbations de  $\phi^*$  et  $h_{\mu\nu}$  (dont le terme cinétique est celui standard d'Einstein-Hilbert). Les équations de corps (10.13)–(10.15) sont écrites telles que toutes les dérivées secondes des corps sont regroupées sur le membre de gauche, ce qui n'est pas le cas pour (10.4) et (10.5). Le problème de Cauchy est donc bien posé dans le cadre d'Einstein. Ainsi, la théorie n'est mathématiquement bien définie que si l'on peut écrire l'action dans le cadre d'Einstein. En particulier, le terme cinétique du champ scalaire doit avoir un signe négatif pour qu'il soit porteur d'une énergie positive. De plus, si les transformations (10.9)–(10.11) sont singulières pour certaines valeurs de  $\phi^*$ , la cohérence de la théorie doit être étudiée dans le cadre d'Einstein. Diverses situations peuvent se présenter : (1) certaines singularités apparentes peuvent n'être que des artefacts du paramétrage (10.1) et ne sont donc pas physiques, (2) les quantifications dans le cadre de Jordan peuvent sembler bien définies, alors qu'il existe une singularité dans le cadre d'Einstein (un cas typique est celui où  $F$  disparaît) et le modèle doit alors être considéré comme pathologique.

### 10.1.1.3 Constantes gravitationnelles

L'action (10.1) dans le référentiel d'Einstein est utilisée pour définir une constante

gravitationnelle effective comme

$$c_s'' \quad (10.18)$$

Cependant, cette quantité ne représente pas la valeur de la constante gravitationnelle qui serait mesurée dans une expérience de type Cavendish. Dans une telle expérience, l'amplitude de la force de Newton,  $F$ , entre deux masses  $m_i$  et  $m_j$  est mesurée. La constante gravitationnelle est alors définie par  $G_{\text{cav}} = Fr^2$ . Si le champ scalaire est

léger, il contribue à la force  $F$  sur de grandes distances, puisque la masse est couplée à la fois au graviton et au degré de liberté de spin 0. On peut alors montrer que

$$G_{\text{cav}} = G^* A^2 (1 + a^2) = \frac{G^* (2ZF + F^2)}{F (2ZF + 3F^2)}, \quad (10.19)$$

En effet, la constante de Newton est aujourd'hui simplement  $G_{\text{cav}}$ , soit  $G_N = G_{\text{cav}} (< p_0)$ . Dans cette expression, le premier terme ( $G^* A^2$ ) correspond à l'échange d'un graviton entre les deux corps tandis que le deuxième terme ( $G^* A^2 a^2$ ) correspond à l'échange d'un scalaire entre eux. Dans la représentation de Brans-Dicke on a,  $G_{\text{cav}} = G^* p^{-1} (2w + 4)/(2w + 3)$ .

Diverses remarques s'imposent :

- L'expression (10.19) implique que la constante gravitationnelle mesurée en laboratoire, ou dans le système solaire, est une grandeur dynamique. Elle peut donc varier dans l'espace et dans le temps. Les contraintes actuelles [3] impliquent que

$$\left| \frac{\dot{G}_N}{G_N} \right|_0 < 6 \times 10^{-12} \text{ year}^{-1}. \quad (10.20)$$

- Dans le cadre de Jordan, la constante gravitationnelle est variable, tandis que les masses des particules sont fixes. Dans le cadre d'Einstein, la situation est inversée. Néanmoins, comme souligné ci-dessus, on ne peut pas distinguer les deux référentiels dans la mesure où seule la quantité adimensionnelle  $\alpha = G_N m^2 / \hbar c$  est accessible expérimentalement.
- La relativité générale est désormais représentée par un point dans l'espace des théories scalaires-tensorielles, à savoir  $(a, ?) = (0, 0)$ .
- Si le dilaton a une masse  $m$  dans le référentiel d'Einstein, alors la force scalaire a une plage de l'ordre de  $A = m^{-1}$ . Pour des distances inférieures à  $m^{-1}$ , la contribution scalaire est significative et la constante gravitationnelle est donnée par (10.19) alors que pour des distances plus grandes, la contribution du champ scalaire est négligeable et la théorie se réduit à la relativité générale. Au niveau newtonien, le potentiel gravitationnel prend la forme

$$V(r) = -GN (1 + a_{12} e^{-r/\Lambda}) \quad (10.21)$$

décrivant une déviation de Yukawa par rapport au potentiel newtonien standard. L'amplitude de la déviation est donnée par  $a_{12} = f_i f_a$ , où  $f_a$  est défini par

$$f_i \equiv \frac{\partial \ln m_i(\varphi_*)}{\partial \varphi_*}, \quad (10.22)$$

et est universel; les fonctions  $m_i(y, \cdot)$  ne dépendent pas des compositions chimiques des objets. Les paramètres  $(\alpha, A)$  sont contraints expérimentalement dans le système solaire (voir Fig. 1.11).

### 10.1.2 Contraintes locales

Les prédictions de la relativité générale dans la limite des champs faibles sont confirmées par des expériences sur le système solaire avec une grande précision. Les théories du tenseur scalaire doivent satisfaire à ces contraintes et donc être proches de la relativité générale aujourd'hui. La figure 1.9 résume les contraintes sur les paramètres post-newtoniens  $q^{PPN}$  et  $\gamma$  définis par (1.140).

Pour les théories du tenseur scalaire, ces deux paramètres sont donnés explicitement [2,4,5] par

$$\frac{F^2}{Z F + \frac{\gamma}{2} F I} \quad (10.23)$$

$$\frac{1}{4 Z F + 3 F^2} \frac{d q^{PPN}}{d t} \quad (10.24)$$

respectivement, dans l'Einstein et la Jordanie frames. The observational constraints of La figure 1.9 peut être translatée dans le plan  $(\gamma, \gamma_0)$  pour obtenir les contraintes résumées dans la figure 10.1. Dans le système solaire, toute théorie du tenseur scalaire est complètement définie par ces deux nombres uniquement [2,4]. Les contraintes du système solaire impliquent que

$$Q_0 < 4 \times 10^{-5}, \quad (10.25)$$

tandis que l'observation de pulsars binaires fournit [6] que

$$(3_0 > -4,5. \quad (10.26)$$

La contrainte (10.25) implique qu'aujourd'hui  $G_{eff}$  et  $G_N$ , ou de manière équivalente  $G_{ca v}$ , ne diffèrent pas de plus de  $10^{-3}$  %. Notez cependant qu'à l'échelle cosmologique, cette différence peut être bien plus importante. L'équation (10.20) implique également que la dérivée temporelle du champ scalaire aujourd'hui (par rapport à  $t^*$ ) doit satisfaire

$$\left| \frac{d \ln G}{dt} \right| < 3 \times 10^{-12} \text{ ans}^{-1} \quad (10.27)$$

Malheureusement, la limite expérimentale (10.20) sur la variation temporelle de la constante gravitationnelle n'implique aucune contrainte sur  $2A/A = -F/F$ . En effet,  $G_{CSLV}$  peut être quasiment constant même si  $A$  varie beaucoup. Un exemple est celui de la théorie de Barker [7] dans laquelle  $A = \cos \langle p_t \rangle$  tel que  $G_N = G_{ca v} = G$ , est strictement constant indépendamment des variations temporelles de  $A[\langle p^*(t) \rangle]$ .

### 10.1.3 Aspects cosmologiques

Malgré les fortes contraintes locales mentionnées ci-dessus, les écarts par rapport à la relativité générale sont beaucoup moins contraints aux échelles cosmologiques. Nous développons maintenant la cosmologie de la théorie du tenseur scalaire [5,8,9].

#### 10.1.3.1 Équations de Friedmann

Nous considérons un espace-temps de Friedmann-Lemaître de métrique (3.1). Nous



distinguons entre la forme de cette métrique dans les cadres de Jordan et d'Einstein et dénotée respectivement par  $a$  et  $a^*$ ,  $t$  et  $t^*$ ,  $r$  et  $r^*$ , les facteurs d'échelle, les temps propres et les temps conformes.

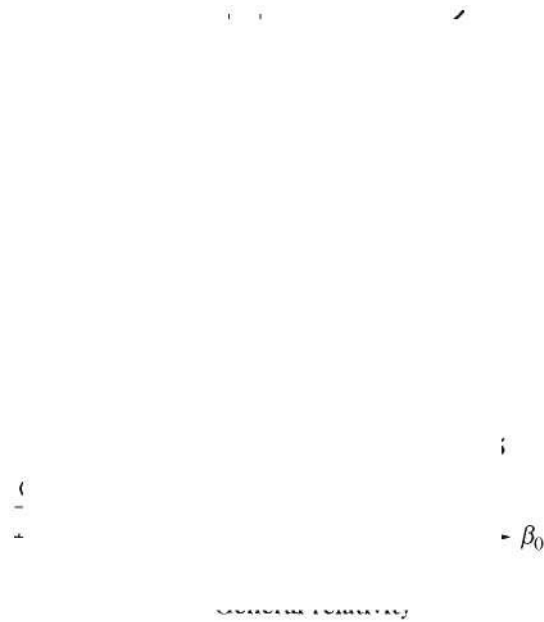


Fig. 10.1 Constraints on the parameters ( $\alpha_0 > 3\alpha_0$ ) of a scalar-tensor theory with coupling ex- panded as  $\ln T = \alpha_0(\zeta^{?}* - \zeta^?o) + \beta_0 \ln(\zeta^{?}* - \zeta^?o)^2 + O[(\zeta^{?}* - \zeta^?o)^3]$  obtained from the constraints in the Solar System (see Fig. 1.9, same labels) and the two binary pulsars, PSR B1913+16 and PSR J1141-6545. The shaded région is the allowed région; the vertical axis ( $\beta_0 = 0$ ) corresponds to the Brans-Dicke theory. From Ref. [6].

fois dans chacune de ces deux images. La transformation (10.8) implique que les métriques sont liées par  $ds^{14\ 15} = \lambda^2(\gamma^{?}* )d\mathcal{S}^2$  pour que

$$dt = A(ip^*)dt, \tag{10.28}$$

Notez que les coordonnées spatiales comobiles restent inchangées  $|d\mathbf{x}| = |d\mathbf{x}^*|$ . Nous constatons que les redshifts dans les deux images sont liés par

Dans le cadre de Jordan, (10.4) et (10.6) prennent alors la forme

$$\tag{10.29}$$

and that the physical lengths associated with the same comoving length are related by

$$l_{phys} = \frac{\lambda(\gamma^{?}* )}{\lambda(\gamma^{?}* )} l_{phys} \tag{10.30}$$

The energy-momentum tensors are then expressed in the form (3.24) where  $u^{A\epsilon} = dr^{Ai}/|ds|$  and  $T = da^{?M}/|ds|$ . The relation between  $T^*$  and  $T$  implies that

$$\begin{aligned} P_r &= P_r, \quad P_r = A^4 P_r, \\ P_r &= P_r, \quad P_r = A^4 P_r, \\ P_r &= P_r, \quad P_r = A^4 P_r, \end{aligned} \tag{10.31}$$

$$3F \left( H^2 + \frac{K}{a^2} \right) = \kappa_* \rho + \frac{Z}{2} \dot{\varphi}^2 - 3H\dot{F} + U, \quad (10.32)$$

$$-2F \left( \dot{H} - \frac{K}{a^2} \right) = \kappa_* (\rho + P) + Z\dot{\varphi}^2 + \ddot{F} - H\dot{F}, \quad (10.33)$$

$$Z(\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi}) = 3F_{,\varphi} \left( \dot{H} + 2H^2 + \frac{K}{a^2} \right) - \frac{1}{2} Z_{,\varphi} \dot{\varphi}^2 - U_{,\varphi}, \quad (10.34)$$

$$\dot{\rho} + 3H(1+w)\rho = 0.$$

(10h35)

La constante de Hubble est définie par  $H = \dot{a}/a$  et toutes les dérivées temporelles sont par rapport à  $t$ . L'équation (10.35) est, comme prévu, identique à celle obtenue dans le cas standard (3.27).

Les équations correspondantes dans le référentiel d'Einstein sont très similaires à celles de la relativité générale, (10.36)

$$\frac{\ddot{a}_*}{a_*} = -K_* \rho_t + \kappa p + 2V(\varphi), \quad (10.37)$$

$$\ddot{\varphi}_* + 3H_* \dot{\varphi}_* = -\gamma(\varphi, \varphi_*), \quad (10.38)$$

$$\dot{\rho}_* + 3H_*(1+w)\rho_* = -\gamma(\varphi, \varphi_*) - jV, \quad (10.39)$$

—

$$= a(\varphi_*) (\rho_* - 3P_*) / p_*,$$

où les dérivées temporelles sont maintenant prises par rapport à  $t_*$ . Dans ce cadre, l'évolution de la densité est plus compliquée et est donnée par  $p_*$ , où  $A = 1 - 3w$ ,  $A^{1/3} \wedge^{1+w} \wedge$  pour un fluide à équation d'état constante  $w$ . Les analogues de (10.32)-(10.39) en temps conforme sont faciles à obtenir [8].

Notez que si le potentiel de champ disparaît,  $V = 0$ , alors (10.37) implique que  $\ddot{a} < 0$ , de sorte que dans le cadre d'Einstein, l'expansion de l'Univers ralentit. Cependant, grâce à

$$H = A^{-1} \left[ H_* + \alpha(\varphi_*) \frac{d\varphi_*}{dt_*} \right]$$

(10.28), l'expansion observée, c'est-à-dire celle dans le cadre de Jordan, peut être accélérée, c'est-à-dire que  $\ddot{a}$  peut être positif. Les constantes  $H$  et  $H_*$  sont liées à partir desquelles on peut directement déduire le taux d'expansion (observé) de l'Univers (c'est-à-dire dans le référentiel de Jordan) une fois les équations de Friedmann résolues dans le référentiel d'Einstein.

### 10.1.3.2 Mécanisme attracteur vers la relativité générale

De nombreux modèles tenseurs scalaires sont naturellement attirés vers la relativité générale au cours de l'évolution cosmologique [10]. Pour comprendre ce mécanisme, réécrivons l'équation de Klein-Gordon (10.38) dans le cadre d'Einstein, en utilisant  $p = \ln a$ , c'est-à-dire le nombre de plis  $e$  dans le cadre d'Einstein, comme variable temporelle. Définition

$$u(p^*) = 2^{\wedge_{A v^*} P^*} \quad (10.40)$$

et en supposant une matière contenue avec une équation d'état constante  $w$ , l'équation de Klein-Gordon prend la forme

$$\frac{2[1 + v(\varphi_*)]}{3 - \varphi_*'^2} \varphi_*'' + [1 - w + 2v(\varphi_*)] \varphi_*' = -\alpha(\varphi_*)(1 - 3w) - v(\varphi_*) \frac{d \ln V}{d \varphi_*}, \quad (10.41)$$

où un premier représente une dérivée par rapport à  $p$ .

Une autre façon d'écrire cette équation est de séparer les parties potentielles et cinétiques du champ scalaire, et de définir  $p v' = -P v = V/\wedge - r G^*$ ,  $P_T = P + P v$  et  $P_T = P + P v$ . L'équation (10.38) prend alors la forme

$$\frac{2}{3 - \varphi_*'^2} \varphi_*'' + \left(1 - \frac{P_T}{\rho_T}\right) \varphi_*' = -\alpha \frac{\rho - 3P}{\rho_T} - \frac{P v \sim 3P v}{P_T}$$

avec  $av = V f A V$ .

Pour illustrer le mécanisme d'attraction à l'œuvre, considérons un modèle pour lequel la fonction de couplage est de la forme  $A = \exp[b(\langle p, \rangle)]$  avec  $6(\langle p^* \rangle) = |\langle p \rangle|^2$  et  $\beta$  constante, de sorte que  $a(\langle p^* \rangle) = \beta \langle p^* \rangle$ . L'équation (10.40) prend la forme de l'équation du mouvement d'une particule relativiste avec une masse dépendante de la vitesse,  $m(\langle p^* \rangle) = 2/(3 - \langle p' \rangle^2)$ , soumis à une force d'amortissement  $-(1 - w)\langle p \rangle$ , et évoluant dans un potentiel  $(1 - 3w)b(\langle p^* \rangle)$ ,

$$Q^{\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \langle p^* \rangle} + (f - \dots) = -\beta(1 - 3w) \dots, \quad (10.42)$$

La positivité locale de l'énergie impose  $m(\langle p^* \rangle) > 0$  de sorte que  $\langle p \rangle^2 < 3$ . À l'ère des radiations,  $w = 1/3$  et le champ scalaire découplés de la matière. Ainsi, il évolue librement et se fige à une valeur constante, indépendamment de sa vitesse initiale.

L'équation (10.41) peut être résolue analytiquement à l'ère des radiations lorsque le potentiel est négligeable pour obtenir où  $\langle p_i \rangle = \text{weight} \langle p^* \rangle (p_i)$  et  $c q \sqrt{3} = \langle p' \rangle / \sqrt{1 - \langle p' \rangle^2 / 3}$ . Ainsi, tant que  $\langle p' \rangle < \sqrt{3}$  la variation de  $\langle p^* \rangle$  pendant l'ère des radiations est  $A \langle p^* \rangle \sim \langle p' \rangle$  et le champ est au repos après quelques e-folds. À l'ère de la matière, l'évolution de  $\langle p, \rangle$  est celle d'un oscillateur amorti dont la vitesse initiale est nulle. Ainsi  $\langle p, \rangle$  évolue vers le minimum de la fonction de couplage où  $a = 0$ , si  $\beta > 0$ . La théorie du tenseur scalaire évolue alors de telle manière qu'elle se retrouve aujourd'hui infiniment proche de la relativité générale.

$$\varphi_* = \varphi_i - \sqrt{3} \left[ \frac{\alpha_i e^{-(p-p_i)} + \sqrt{1 + \alpha_i^2} e^{-2(p-p_i)}}{\alpha_i + \sqrt{1 + \alpha_i^2}} \right]$$

### 10.1.3.3 Contraintes cosmologiques

D'un point de vue cosmologique, il existe actuellement peu de contraintes sur les théories scalaires-tensorielles. L'observation du fond diffus cosmologique [9] peut mettre en évidence certains effets, mais ils sont souvent dégénérés avec d'autres paramètres cosmologiques. L'étude des effets de lentilles gravitationnelles faibles, combinée au fond diffus cosmologique, est un outil prometteur [8].

\* Après avoir utilisé ce  $\hat{U}X/Q^{\wedge}X' - dx' J d^{\wedge}$ , puis échangé  $X^{\alpha}$  d  $X^{* \alpha}$  et nos notations.

5. *Matière noire* *Fu2zy* (FDM) : ce modèle [68] suppose que la matière noire prend la forme d'une particule scalaire très légère avec une longueur d'onde Compton de l'ordre

du noyau de la galaxie. À petite échelle, le comportement ondulatoire de la matière noire empêche l'effondrement gravitationnel, de sorte que le noyau du halo soit lissé. La longueur de Jeans, sous laquelle les perturbations de densité sont stables (voir chapitre 5), est donnée par

$$\sim {}^{55}(10^{-22}\text{eV}) \frac{-j_{\text{e}/z}}{(2.8 \times 10^{27} \text{WQMPC}^{-3})^{\text{KPC}} \wedge 5^{*7} 179)} \setminus -V^{1*}$$

Un champ de masse  $m$ ,  $\sim 10^{-22}$  eV peut fournir un profil de densité lisse à des échelles de l'ordre du kpc. Cela induit également une coupure soudaine autour du normalisé selon (8.94). La condition asymptotique (8.95) définit complètement les états quantiques.

Les seules contraintes définies sont obtenues à partir de la nucléosynthèse primordiale (voir chapitre 4). L'analyse de l'abondance de l'hélium 4 indique que le nombre de degrés de liberté relativistes ne peut varier de plus de 20 % par rapport à sa valeur nominale  $g_r = 10,75$ .

Pour un Univers avec des sections spatiales euclidiennes, l'équation de Friedmann (10.32) implique

$$W \sim \Lambda_{gr}^{1/2} T^4, \quad (10.43)$$

avec  $6g_r/g_r = F_0/F_{fZnuc} - 1$ , en négligeant la contribution du champ scalaire à la densité d'énergie. La contrainte hélium-4 impose que  $5g_r/g_r$  soit inférieur à 20%, et on obtient ainsi la contrainte grossière

$$\left| \frac{F_0}{-F} \right| \left| \frac{\Lambda_{nuc}}{\Lambda} \right| < 1,2. \quad (10.44)$$

Cette estimation est très générale. Dès que l'on spécifie le modèle, on peut lui imposer des contraintes plus fortes grâce à une analyse détaillée (voir, par exemple, Réf. [11]).

En bref, la cosmologie peut contraindre ces modèles dans trois régions :  $z \sim 10^8$  avec la nucléosynthèse,  $z \sim 10^3$  avec le fond diffus cosmologique et  $z \sim 1$  avec les effets de lentille.

#### 10.1.4 Aspects phénoménologiques

Le mécanisme attracteur ouvre des possibilités intéressantes pour la cosmologie phénoménologique. Cependant, comme chaque modèle implique deux fonctions arbitraires, cela peut facilement s'adapter à un grand nombre de possibilités. La faisabilité de reconstruire ces fonctions à partir d'observations cosmologiques a été détaillée dans la Réf. [5].

Nous ne discuterons ici que de quelques exemples illustratifs concernant l'évolution des structures à grande échelle et la relation avec la récente accélération de l'Univers.

##### 10.1.4.1 Influence sur l'évolution des perturbations

Les théories du tenseur scalaire peuvent être étudiées dans le sens développé au chapitre 5. Pour plus de précision, considérons les modifications que nous obtiendrons en travaillant dans le cadre de Jordan. Dans ce cas, les équations fluides d'évolution ne sont pas modifiées et seules les équations d'Einstein (5.117)-(5.120) prennent une nouvelle forme.

Si  $\delta\phi$  est la perturbation du champ scalaire en jauge newtonienne, en fixant  $\hat{O}F = F_{;i\nu}\delta t^{\nu}$ , les équations du champ d'Einstein prennent la forme

$$\frac{T}{4} - 4 > = K_{;j} \cdot a^2 F_{;7} r + \dots, F \quad (10.45)$$

$$2F(4' + W4) + F' < \& = -K^* a^2 p(l + w) V + Zp'\delta p + \hat{O}F' - Ft\delta F, \quad (10.46)$$

$$F'^2 - 6F + 3 \frac{F^2}{\hat{O}F} F + (U_{;ip} o^2 + 3T \sim t Z p) \delta p + Zp' \delta p'.$$

L'équation perturbée de Klein-Gordon prend une forme plus compacte si on se limite à  $Z = 1$  (voir Réf. [5] pour la forme générale avec  $Z \neq 1$ ),

$$y + 2H < V - [A + 3H'F - U_{;w} a^2] 6p = (\$' + 3\Lambda) 5\Lambda - 2a^2 < \partial U_{;t}, - [A(\$ - 24) +$$

$$3(4''' + 3W + W4') F_{,,} \quad (10.48)$$

Une application simple s'obtient en se limitant au régime newtonien à l'ère dominée par la matière. Dans ce cas, les équations fluides d'évolution (voir chapitre 5) prennent la forme  $\dot{\rho} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{V} + 3\rho \nabla \cdot \mathbf{V}'$  et  $\dot{V}' + H V' = -4\rho$ , tandis que l'équation de Poisson (10.47) devient

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho, \quad \nabla^2 \psi = -4\pi G \rho \quad (10.49)$$

et l'équation perturbée de Klein-Gordon (10.48)

$$(\Box - G_w a^2) \psi = F_V A (\Box - 24'). \quad (10.50)$$

Ainsi, en régime linéaire, si le champ est léger, c'est à dire s'il reste petit devant la longueur d'onde des modes considérés, alors (10.45) et (10.50) impliquent que

$$\frac{PP}{\Box} < 10^{-51} >$$

et l'équation de Poisson (10.49) peut être réécrite comme

$$\Box \Phi \sim 4\pi G_{\text{cav}} \rho a^2 < 5m. \quad (10.52)$$

Finalement, l'équation d'évolution pour les perturbations de matière prend la forme

$$\dot{\rho}' + \rho' \nabla \cdot \mathbf{V}' - 4\pi G_{\text{cav}} \rho a^2 \Box \Phi = 0. \quad (10.53)$$

Ceci illustre l'influence des modifications de la théorie de la gravité. Une discussion détaillée des différents modèles peut être trouvée dans les réf. [8,9]. Puisque  $G_{\text{cav}}$  peut dépendre du temps et se détendre vers  $G_N$ , le taux de croissance de la perturbation de densité sera modifié.

#### 10.1.4.2 Couplage quadratique

Un modèle simple [10] est fourni par une fonction de couplage quadratique, à savoir avec  $\Phi = a_m + \frac{1}{2}(\phi - \phi_m)^2$ , où est la valeur du champ au minimum du couplage. Sans perte de généralité, une redéfinition du champ conduit à

$$K(\phi) = \quad (10.54)$$

de sorte que  $\phi_0 = \phi_m$  et  $\phi = \phi_m$ .



The field evolution can be obtained analytically if the field is massless. Indeed, during the matter-dominated era,  $y^{1/2} < C/3$ , and the Klein-Gordon equation simplifies to

$$(\varphi'_*)' + \frac{1}{2} \varphi_* = 0. \quad (10.55)$$

Depending on the value of  $\beta$ , we obtain two different régimes. If  $\beta < 3/8$ , for weak coupling, we have

$$\varphi_*(z_*) = A_+(1+z_*)^{3(1+r)/4} + A_-(1+z_*)^{3(1-r)/4} \quad (10.56)$$

with  $r = \sqrt{1 - 8\beta/3}$ . If  $\beta > 3/8$ , the field undergoes damped oscillations,

$$\varphi_*(z_*) = (1+z_*)^{3/4} \left\{ A \cos \left[ \frac{3}{4} r \ln(1+z_*) \right] + B \sin \left[ \frac{3}{4} r \ln(1+z_*) \right] \right\}, \quad (10.57)$$

so that  $\varphi_*$  can oscillate. During the radiation era, the solution for is

$$\varphi_* = \pm A/3 \operatorname{arctanh} \sqrt{1 - X(1+z)^{-2}} + B. \quad (10.58)$$

These analytical behaviours correctly reproduce the numerical solution depicted in Fig. 10.2.

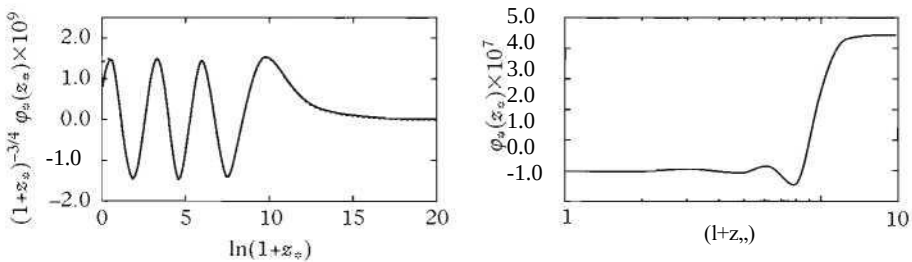


**Fig. 10.2** Evolution of a massless scalar field in the Einstein frame in the case of a quadratic coupling theory  $\beta = 10^2/87r$ . From Ref. [8].

In a Universe filled with a matter-radiation mixture, (10.41) takes the form

$$y(y+1) \frac{d^2 \varphi_*}{dy^2} + \frac{1}{2}(5y+4) \frac{d\varphi_*}{dy} + \frac{3}{2} \beta \varphi_* = 0,$$

with  $y = a_{\text{eq}}/a$ , as long as the potential is negligible. This equation has a solution in terms of hypergeometric functions  $\varphi_*(y) = {}_2F_1(v, v^*, 2; y)$  with  $v = \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4\beta}$  which makes it possible to relate the value of the scalar field to its initial value in the radiation era.

Primordial nucleosynthesis has been studied in this model [11,12] and found to impose strong constraints on the set of parameters  $(\beta, \beta_0)$ , which are summarized in Fig. 10.3. Despite the strong constraints on  $\beta$  imposed by the Solar System, some

des modèles jouissant de fortes valeurs de  $\beta_0$  étaient admissibles. Dans ce cas précis, la nucléosynthèse impose les contraintes

$$\langle \beta_0 \rangle \lesssim 10^{6.5}$$

en supposant que l'Univers a des sections spatiales euclidiennes. Cela montre la complémentarité des contraintes cosmologiques et locales.

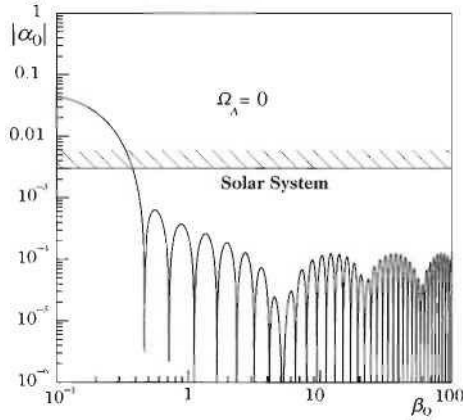


**Fig. 10.3** Maximal values of  $\alpha_0$  as a function of  $\beta_0 = 0$  for a scalar-tensor theory with quadratic coupling (10.54) assuming a vanishing cosmological constant. The dotted line represents the Solar-System constraints. From Ref. [12],

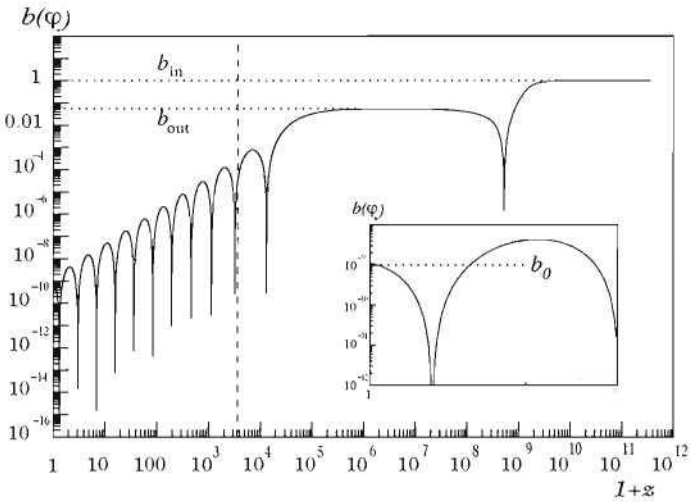
#### 10.1.4.3 Introduction d'une constante cosmologique

Dans le modèle précédent, le dilaton était supposé sans masse puisqu'il n'avait aucun potentiel. Il ne peut donc pas jouer le rôle d'un champ de type quintessence et expliquer la récente accélération de l'Univers.

Il est intéressant de l'étendre à des modèles contenant une constante cosmologique [12]. En relativité générale, une telle constante revient à ajouter un potentiel constant au champ scalaire tel que celui-ci ne change pas de masse. La situation est plus complexe dans la théorie des scalartenseurs et il n'existe pas de moyen unique de généraliser le modèle  $\Lambda$ CDM ou quintessence (voir la section 12.2 du chapitre 12).

La première solution consiste à ajouter une constante au potentiel  $U$  dans le référentiel de Jordan. Dans ce cas, cette constante correspond à une densité d'énergie constante et est donc associée à un fluide d'équation d'état  $w = -1$ , ce qui semble une bonne généralisation de la constante cosmologique. Cependant, (10.11) implique que le véritable degré de liberté de spin-0,  $\langle p^* \rangle$ , évolue dans un potentiel  $V = J\Lambda^4$ . Il acquiert donc une masse.

Assuming a constant potential in the Einstein frame, remains massless, but this constant corresponds to an energy density  $p = 2AF^2/\langle p^* \rangle$ , which is thus not constant.



$$V(\varphi_*) = M^4 \varphi_*^{-m}.$$

$$\alpha(\varphi_*)$$

$$\varphi_*$$

$$f_l m h^2 = 0.15, X_{2\hat{A}} = 0, P = 10$$

$$\frac{1+z}{2}$$

**Fig. 10.4** Evolution of  $6\langle\phi\rangle$  as a function of redshift for  $j_3 = 10$  assuming that  $b \rightarrow b_{in} = 1$  when  $z \rightarrow \infty$ . The vertical dashed line corresponds to the matter-radiation equality. During the radiation era the scalar field freezes to a constant value  $b_{out}$ . It can, however, oscillate during mass thresholds, i.e. electron-positron annihilation. In the matter era the field oscillates, while being damped as  $(1+z)^{3/4}$ . From Ref. [12],

#### 10.1.4.4 Runaway dilaton model

In the context of quintessence (see Section 12.2), an extended class of quintessence models have been introduced. [13]. In this case, the scalar field of the scalar-tensor theory also plays the rôle of a quintessence field. Models of this type, inspired by string theory, have been proposed [14,15]; they are called *runaway dilaton* models, the dilaton being the name given to the scalar field in string theory.

Interestingly, the attractor mechanism thanks to which the scalar-tensor theory can evolve cosmologically towards general relativity, discussed earlier, can be generalized [16] when the field evolves in a potential of the form

$$(10.59)$$

For this, it is sufficient that the coupling to matter be of the form

$$= -Be^{-\alpha\phi}. \quad (10.60)$$

This mechanism will be effective as soon as the coupling and the potential are proportional,  $A \propto V$ , since we then have  $a \propto \phi$ .

The scalar field is then naturally driven towards  $\phi \rightarrow \infty$  during the cosmological evolution. During the radiation-dominated era, the coupling is not efficient since the field starts slowly rolling only in the matter era. Assuming that it is still in the slow-roll régime today, the Klein-Gordon equation then takes the form

pour lequel une solution approchée est

$$= e^{(3\gamma_0 + B[3\ln(l + \gamma)]}. \quad (10.62)$$

Aujourd'hui, « $\alpha = -Be^{-\gamma_0}$  et  $[3Q = -/3\alpha\alpha$  et le roulement du champ peuvent expliquer l'accélération actuelle de l'Univers.

### 10.1.5 $f(R)$ théorie de la gravité et du tenseur scalaire

Dans l'analyse précédente, tout comme en relativité générale, la gravité est décrite par l'action d'Einstein-Hilbert. Néanmoins, on peut concevoir des théories métriques de la gravité pour lesquelles le lagrangien d'Einstein-Hilbert est une autre fonction arbitraire du scalaire de courbure,

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{16\pi G} R + \mathcal{L}_m \right]; \text{ matter}]. \quad (10.63)$$

Une théorie mène aux équations d'Einstein (modifiées)

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - \nabla_\mu \partial_\nu f'(R) + g_{\mu\nu} \square f'(R) = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (10.64)$$

où un nombre premier indique une dérivée de la fonction par rapport à son argument, c'est à dire  $f'(R) = df/dR$ . De manière intéressante, on peut montrer que toutes ces classes de théories se réduisent à une théorie du tenseur scalaire [17,18]. Pour voir cela, introduisons un champ auxiliaire  $\phi$  et considérons l'action

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{16\pi G} R + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - V(\phi) \right] + S_m, \quad (10.65)$$

La variation de cette action par rapport à ce champ scalaire implique en effet, si  $\phi = 0$  (un cas équivalent à la relativité générale avec une constante cosmologique), que

$$R - \gamma = d. \quad (10.66)$$

Cette contrainte nous permet de conclure que l'équation d'Einstein dérivée de (10.65), à savoir

$$(A^\mu{}_\mu) = 0 \quad (10.67)$$

se réduit à (10.64). Notons que, même si l'action (10.65) ne possède pas de terme cinétique pour le champ scalaire, la théorie est bien définie puisque le véritable degré de liberté de spin-0 apparaît clairement dans le repère d'Einstein, et avec une énergie positive.

Le changement de variable (10.9) implique que l'on peut choisir

$$= \text{dans } \mathcal{H}(\mathcal{E}), \quad (10.68)$$

de sorte que la théorie dans le cadre d'Einstein est définie par

$$2 < x \exp[-4\zeta^*/\sqrt{3}], V = |\{\zeta^*(\zeta^* J e^{2v} * \wedge / 3 - [ < / ? ( < / ? * ) ] \} e^{-4} \wedge^* / A \quad (10.69)$$

Cet exemple souligne l'importance de rechercher les véritables degrés de liberté de la théorie. Une redéfinition de champ peut être un outil utile pour montrer que deux théories sont effectivement équivalentes.

## 10.2 Théorie quantique des champs dans un espace-temps courbe

Le modèle standard des trois interactions non gravitationnelles a été développé dans l'espace-temps de Minkowski. Durant la majeure partie de l'histoire de l'Univers, l'espace-temps peut être décrit de manière classique. La première extension nécessaire pour décrire les phases primordiales est alors d'envisager l'extension de la théorie des champs présentée au chapitre 2 à un espace-temps courbe [19]. Nous avons utilisé certains résultats de cette théorie au chapitre 8.

### 10.2.1 Physique quantique, gravité classique

Tout l'objectif de la théorie quantique des champs dans l'espace-temps courbe revient à traiter la gravité avec la relativité générale, c'est-à-dire de manière classique, alors que les champs sont régis par les lois de la mécanique quantique.

#### 10.2.1.1 Échelles d'énergie

Dans la plupart des situations, il n'est pas nécessaire de prendre en compte les effets de la gravité quantique, quelle que soit la théorie qui la décrit, principalement parce que ces effets sont censés apparaître à des échelles de l'ordre de la masse de Planck.

Cela peut être vu heuristiquement de la manière suivante. Comparons le potentiel gravitationnel newtonien entre deux masses  $m_1$  et  $m_2$ ,  $V_{\text{grav}} = G m_1 m_2 / r$  au potentiel coulombien  $V_{\text{ec}} = a q_1 q_2 / r$  entre deux charges  $q_1$  et  $q_2$ , où  $a$  est sans dimension. Le couplage entre deux particules massives s'écrit comme en électromagnétisme :  $V_{\text{grav}} = G_N E_{\text{cm}} m_1 m_2 / r$ , avec  $\kappa_i = m_i / E_{\text{cm}}$  ( $i = 1, 2$ ) deux « charges » gravitationnelles sans dimension, telles que la constante de couplage gravitationnel effective varie en fait avec le carré de l'énergie d'interaction. Cette variation est très similaire à la variation de  $a$  avec l'énergie, seule cette dernière est logarithmique. Les effets de la gravité quantique surviennent finalement lorsque la constante de couplage est d'ordre unité, et donc  $G_N E_{\text{cm}} \kappa_i \sim 1$ , c'est à dire lorsque l'échelle énergétique de l'interaction est de l'ordre de la masse de Planck,  $E_{\text{cm}} M_P$ .

Dans la plupart des situations, on s'intéresse à des échelles d'énergie de l'ordre au mieux de  $E_{\text{CMT}}$ , soit trois ordres de grandeur en dessous de  $M_P$ . Il est donc parfaitement justifié, pour la plupart des applications, de traiter l'espace-temps de manière classique, alors que les particules sont soumises à des effets quantiques.

### 10.2.1.2 Renormalisation énergétique

Considérons (2.89) donnant la valeur de l'énergie totale d'un champ scalaire en fonction des opérateurs de création et d'annihilation. Dans la théorie ordinaire des champs, nous avons soutenu que l'énergie du point zéro, apparaissant dans (10.70) sous la forme d'un facteur  $\Lambda^3 \langle 0|$ , n'avait aucune signification physique, et que nous pouvions donc « renormaliser » l'énergie à volonté. . Une manière de procéder est de remarquer qu'il y a toujours une ambiguïté dans la définition des opérateurs produits, et qu'un choix valable est de prendre le produit normal pour lequel tous les opérateurs de création sont mis à gauche et les opérateurs d'annihilation à droite. . Avec la notation  $H$  pour définir l'opérateur d'ordre normal, (10.70) devient

$$\hat{H}(t) = \frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{k} \omega_{\mathbf{k}} \left( \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \right) = \int d^3 \mathbf{k} \omega_{\mathbf{k}} \left[ \hat{N}_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \delta^{(3)}(\mathbf{0}) \right] \quad (10.70)$$

$$: H(t) : = j d^3 k u_i \hat{a}_k \hat{a}_k = j d^3 k u_j \hat{a}_k \hat{a}_k, \quad (10.71)$$

et le terme embarrassant est automatiquement supprimé.

Dès lors qu'on couple le champ scalaire à la gravité, une telle renormalisation n'est plus tout à fait innocente : la gravité se couplant à toute forme d'énergie, il n'est plus possible de modifier la valeur de l'énergie totale, même d'une constante. Le problème de la constante cosmologique découle en partie de cette difficulté.

### 10.2.1.3 Équations d'Einstein semi-classiques

Puisque les effets quantiques du champ gravitationnel ne sont pas importants pendant la majorité de l'histoire de l'Univers, nous pouvons décrire un état physique comme une composante classique, la géométrie, et une composante quantique, c'est-à-dire un état normalisé  $|t\rangle$ . La partie géométrie des équations d'Einstein est donc un opérateur trivial sur cet état, et on a  $\langle t|G_{\mu\nu}|t\rangle = G_{\mu\nu}$ , et, si l'Univers est dans l'état quantique  $1^\wedge$ , au niveau de la physique des particules, nous avons

$$G^\wedge = \kappa \langle 4\rangle T^\wedge, \quad (10.72)$$

où l'on peut voir que la valeur attendue de l'opérateur énergie-impulsion joue le rôle de la source.

La renormalisation élémentaire de l'opérateur  $T_{\text{MIZ}}$  réalisée antérieurement grâce à l'ordonnement normal des opérateurs de création et d'annihilation, qui est possible dans l'espace-temps de Minkowski, doit se faire de manière plus subtile [20] pour un espace plus général. Cela peut conduire à ce que l'on appelle des effets de réaction en retour en cosmologie et modifier la dynamique du facteur d'échelle [21]. Ces effets, qui dépassent le cadre de cet ouvrage, seront probablement étudiés sérieusement à l'avenir. De plus, cela conduit à prédire l'existence d'une constante cosmologique discutée en détail au chapitre 12. La contribution - (10.70) est bien de l'ordre de  $E \hat{\gamma}^*$  sans effectuer la renormalisation (10.71),  $E_c$  étant un seuil de coupure. énergie supposée être de l'ordre de  $M_p$ .

### 10.2.1.4 Champ scalaire dimensionnel $D$

Comme au chapitre 2, la théorie typique qui nous intéresse ici est celle d'un champ scalaire, et l'action que nous considérerons est la généralisation de l'action (1.80) sans constante cosmologique

$$S = \int d^D x \sqrt{-g} \left( -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right) \quad (10.73)$$

dans un espace-temps de dimension  $D$ . Ce choix d'un nombre arbitraire de dimensions permettra d'utiliser des résultats issus de la théorie des cordes, à plus de 4 dimensions (ou encore à seulement deux dimensions comme dans le cas de l'exemple de la section 10.2.3). Le dernier terme de (10.73) permet un couplage non minimal entre la gravité et le champ scalaire (voir aussi la section 10.1.1).

L'équation de Klein-Gordon pour le champ scalaire est modifiée pour

$$\square \phi + \xi R \phi = 0 \quad (10.74)$$

Le couplage dit minimal revient à choisir  $\xi = 0$ . Ce choix est souvent fait pour simplifier les choses, mais de toute façon si la théorie (10.73) était vérifiée expérimentalement, le paramètre  $\xi$  serait un paramètre physiquement mesurable.

### 10.2.1.5 Invariance conforme

En effectuant une transformation métrique du formulaire

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \Omega^2(x) g_{\mu\nu}, \quad \text{et} \quad \phi \rightarrow \Omega^{-(D-2)/2} \phi, \quad (10.75)$$

appelée *transformation conforme*, la courbure scalaire se transforme comme

$$R \rightarrow \Omega^{-D} \left( R - \frac{2(D-1)}{\Omega} \nabla^2 \Omega \right) \quad (10.76)$$

tel que l'action soit invariante, à une dérivée totale près, si  $V(\phi) = 0$  (champ scalaire sans masse sans interaction), et tant que le coefficient arbitraire  $\xi$  est

$$\xi = \xi_{\text{conformal}} = \frac{D-2}{4(D-1)}$$

La théorie est alors conformement invariante. Ce type de transformation est intéressant en cosmologie car la métrique de Friedmann-Lemaître à sections spatiales fiat (une bonne approximation à haute énergie/redshift) se trouve être conformement fiat, autrement dit on peut l'écrire sous la forme  $g_{\mu\nu} = a^2(\eta) \eta_{\mu\nu}$ , ce qui explique la nomenclature de  $\eta$  comme temps conforme.

Si  $D = 2$ , nous voyons que la théorie est conformement invariante tant que  $\xi = 0$  : ainsi, couplage minimal et conforme sont équivalents en deux dimensions. En quatre dimensions, le couplage conforme correspond à  $\xi = 1/6$ .

## 10.2.2 Création de particules

Si les champs quantiques peuvent modifier la dynamique de l'espace-temps, ils peuvent à leur tour agir comme une source classique et produire des particules. Lorsque les perturbations cosmologiques elles-mêmes sont considérées comme des champs quantiques, l'évolution



temporelle du champ scalaire peut être utilisée pour créer des excitations et être considérée comme la source de la génération de fluctuations primordiales. Ceci peut également être utilisé pour fixer les conditions initiales de ces perturbations puisqu'on peut demander, par exemple, que l'Univers soit dans son état de vide à l'instant initial, correspondant en principe à un état complètement défini.

### 10.2.2.1 *Nombre de particules*

Considérons la décomposition des modes de (2.86) avec les modes (2.85). Ces dernières sont essentiellement définies comme des fonctions propres du vecteur  $\hat{\partial}/\hat{t}$ , qui est un vecteur Killing, dans le cas Minkowski. Les valeurs propres sont — «  $W_{\text{fe}}$ , définissant les états de fréquence positive  $W_{\text{fe}} > 0$ . Le vide, défini par (2.90), est invariant sous transformations du groupe de Poincaré.

La situation se complique dès lors que l'on considère des transformations qui ne sont pas dans le groupe de Poincaré, tout en restant dans le contexte de la relativité restreinte. Par exemple, on peut se placer dans un référentiel accéléré par rapport à celui dans lequel se définissent les modes précédents. On voit alors que l'état de vide précédent n'est pas invariant : l'opérateur de nombre de particules  $A^\dagger$  défini par la nouvelle base de mode dans le repère accéléré et appliqué sur l'état de vide  $|0\rangle$  du premier repère, n'est plus de valeur propre nulle,  $A^\dagger |0\rangle \neq 0$ , ce qui est interprété comme disant que le nombre de les particules dépendent du cadre dans lequel elles sont mesurées. La notion de particules n'a donc aucune signification intrinsèque.

Le nombre de particules n'est en réalité bien défini que dans un référentiel inertiel, et cela pourrait même être une définition alternative d'un tel référentiel. Notons par ailleurs qu'un détecteur en chute libre est un cas particulier, et selon le principe d'équivalence, il ne mesure pas le même nombre de particules qu'un autre détecteur non inertiel, en accélération.

Le problème est lié au fait que la base des modes propres sur lesquels les champs sont développés, est composée de quantifications globales, c'est à dire définies sur l'ensemble de l'espace-temps (ou du moins sur des sous-espaces macroscopiques). En conséquence, une décomposition donnée dépend de toute l'histoire passée de l'observateur. C'est d'ailleurs un argument possible en faveur de la théorie semi-classique 1 (10.72) puisque seuls les termes locaux interviennent dans cette équation. Si  $\langle 0 | T_{\mu\nu} | 0 \rangle = 0$  pour un observateur donné, il reste nul dans toutes les trames possibles puisqu'il doit se transformer en tenseur.

### 10.2.2.2 *Modes propres dans un espace-temps courbe*

Dans le cas où la métrique n'est plus Minkowski, la situation est encore pire que dans un référentiel accéléré. Toute la section précédente devient douteuse, il n'y a notamment aucune raison pour que le vecteur  $dt$  reste un vecteur Killing. Autrement dit, la base des modes propres est, dans le cas courbe, une base de fonctions  $U_i(x)$ . L'indice  $i$  représente collectivement un ensemble d'indices nécessaires pour identifier les modes. Elle peut être continue, discrète ou un mélange des deux cas. Ces modes satisfont (10.74) avec  $V = \pm m^2 \partial^2$  afin de rester linéaires sur le terrain. Le produit scalaire en espace plat est généralisé à

$$\langle f, g \rangle = \int_M f g^* \wedge dD, \quad (10,77)$$

où la dérivée à droite et à gauche est définie par (2.69), où  $S$  est une hypersurface de type spatial avec un vecteur normal (donc de type temps) dirigé vers le futur, et  $dV$  l'élément de volume de  $S$ . Ces modes forment un autre mode normal. base si nous en avons besoin, en définissant  $\delta$  (i —  $j$ ) pour indiquer soit un Kronecker ou un Dirac  $\delta$  selon que l'indice est entier ou réel,

$$= \langle 1 | (i - j) = -\langle w^*, u^* \rangle, \text{ et } \langle w_i, u^* \rangle = 0, \quad (10.78)$$

qu'il est toujours possible d'imposer. Il s'agit bien de la généralisation de (2.87) pour un espace courbe. Les fonctions (2.85) satisfont

$$(u_k, u_p) = -i y d^3 \mathfrak{a} w_{fc} \hat{o}_t w^* = J^{(3)}(fc - p) = -\{u_k^*, u_p^*\}, \text{ et } (w_{fc}, w^*) = 0.$$

Dans un espace-temps qui n'est pas Minkowski, on ne sait pas comment traiter l'espace d'état de manière générale. Nous procédons ainsi de manière analogue à la théorie des champs en interaction, en considérant qu'il existe des formes spatiales (dans le cas de configurations statiques comme les trous noirs pour lesquels nous calculons le rayonnement de Hawking [22]) ou temporelles (en cosmologie) des régions, dans lesquelles l'espace-temps est asymptotiquement Minkowski avec une bonne approximation. Dans ce cas, le vide est bien défini dans ces régions, et il suffit de calculer le chevauchement des états de vide pour connaître la quantité de particules créées en passant de l'une à l'autre. Nous verrons une application de ce mécanisme dans la section 10.2.3.

### 10.2.2.3 Modes cosmologiques

Il existe un autre cas pour lequel l'état de vide peut être défini de manière cohérente : c'est la solution de Friedmann-Lemaître, et en particulier pour le cas de de Sitter. Considérons la métrique (3.3) avec  $K = 0$  (pour simplifier, le cas général peut être traité de manière similaire).

L'équation de mode (10.74) pour  $D = 4$  et  $V \rightarrow \infty$  devient

$$u_k'' + \left\{ k^2 + a^2 \left[ m^2 - \left( \xi - \frac{1}{6} \right) R \right] \right\} u_k = 0, \quad (10.79)$$

où nous avons considéré l'expansion dans les vecteurs propres du Laplacien [voir (B.56)], où le champ est désormais quantique

$$\langle \Lambda(\mathfrak{a}, ??) = -y \left( \frac{1}{2} \wedge \frac{3}{2} \wedge \hat{\mathfrak{a}}_{fc} Q_{fc}(\mathfrak{a}) M_{fc}(77) + \partial [Q_k^*(x) u_k^*(r)] \wedge, \quad (10.80)$$

définissant les opérateurs de création et d'annihilation, et la courbure scalaire est  $R = -6a''/a$ . On peut remarquer que (10.79) est valide indépendamment de la dépendance temporelle du facteur d'échelle.

Le champ impulsion conjuguée est l'endroit où un nombre premier indique une dérivée par rapport au temps conforme  $rp$  Pour satisfaire les relations canoniques de commutation à temps égal (2.84), à savoir ici  $0(\alpha, \eta), \eta(\eta, \eta) = \eta < 5 \wedge 3 \setminus \alpha - \eta$  et exigeant également (2.83) entre  $\hat{a}k$  et  $\hat{a}_k$ , puis en utilisant (B.69) nous trouvons que nous devrions imposer

$$(10.81)$$

c'est à dire que les modes  $Uk$  ne sont pas normalisés arbitrairement.

Il est intéressant de remarquer que pour les modes satisfaisant l'équation linéaire du second ordre (10.79), le (10.81) exprime simplement la valeur du Wronskian des solutions de cette équation, valeur qui est conservée dans le temps par les propriétés de ce Wronskian. Autrement dit, on voit qu'une normalisation particulière doit être imposée aux modes, et que cette normalisation se conserve dans le temps.

#### 10.2.2.4 Choix des constantes d'intégration

L'équation (10.79), ou son équivalent dans d'autres situations intéressantes, est une équation différentielle linéaire du second ordre. Sa solution générale possède donc deux constantes d'intégration a priori arbitraires, liées par la contrainte de Wronskian (10.81).

Une deuxième relation peut être trouvée s'il existe certaines régions asymptotiques (spatiales ou temporelles) pour lesquelles les modes de fréquence positifs sont bien définis. Par exemple, si l'espace-temps est, à bonne approximation, de type Minkowski ; nous verrons plus loin une illustration exacte de ce type. Dans ce cas, le facteur d'échelle est constant et la courbure s'annule, de sorte que (10.79) se réduit au cas habituel  $u'' + \omega^2 u = 0$ , dont les solutions sont  $\exp(\pm i\omega\eta)$ . La solution de signe + (respectivement , ) correspond à la fréquence négative (resp. positive). On impose donc que l'opérateur d'annihilation  $\hat{a}k$  soit associé à la fréquence positive et cela nous amène à ne garder que la solution de signe —. Compte tenu maintenant de la normalisation Wronskienne, on trouve que nous devrions prendre

$$u_k = \frac{e^{-i\omega\eta}}{\sqrt{2\omega}} \quad (10.82)$$

which is the usual Minkowski space-time relation and is useful in cosmology to fix the conditions initiales (voir chapitre 8).

#### 10.2.2.5 Choix Bunch-Davies pour de Sitter

Considérons maintenant le cas particulier d'un espace-temps de de Sitter, dont le facteur

$$a(\eta) = \frac{1}{-H\eta}, \quad -\infty < \eta < 0 \quad (10.83)$$

d'échelle est donné par

Pour la solution (10.83), la courbure scalaire s'exprime simplement par  $R = -12H^2$ , de sorte que la solution de (10.79) est

où  $A_i(k)$  et  $\Lambda^{(f)}$  sont des fonctions arbitraires du nombre d'onde  $k$ ,  $(k|j|)$  le  
Fonctions de Hankel <sup>1</sup>d'indice  $\nu = | - m^2/H^2 - 12\xi$ .

Avec cette normalisation, la relation pour le Wronskian (10.81) devient simplement

$$\Lambda(A_i(k))^2 - \Lambda(A_2(kr)) = I,$$

et il faudrait maintenant imposer les critères de fréquence positive pour fixer le choix de manière univoque. Pour ce faire, on s'intéresse au développement asymptotique des fonctions de Hankel, et c'est très bien ! qu'avec le choix de phase (10.84), on a

$$UkW \sim \pm (A_1 e^{-i\pi/2} + A_2 e^{i\pi/2}),$$

ce qui indique qu'il faut prendre  $A_2 = 0$  pour ne garder que la fréquence positive, et du fait de la normalisation, cela impose  $A_1 = 1$  jusqu'à une phase près.

La solution pertinente dans l'espace de Sitter est donc

$$u_k(\eta) = \frac{\sqrt{-\pi\eta}}{2} e^{i\frac{\pi}{2}(\nu+\frac{1}{2})} H_{\nu}^{(1)}(-k\eta), \quad (10.85)$$

conduisant à ce que l'on appelle l'état *de vide de Bunch-Davies* [23].

#### 10.2.2.6 Coefficients de Bogoliubov

Considérant le cas général (10.78) d'une décomposition de champ de la forme

$$= \sum_j 52 [\langle \langle FbC'z \rangle \rangle + \langle \langle kw \rangle \rangle] \quad (10.86)$$

où la somme est sur tous les degrés de liberté de la décomposition : une somme discrète sur les indices discrets, une intégrale sur les indices continus. Un état de vide  $|0\rangle$  est associé à  $_{Uj}$  cette représentation, annihilé par tous les opérateurs  $\hat{a}_j |0\rangle = 0$ .

En utilisant cet état de vide comme base, on peut alors construire tout l'espace de Fock correspondant aux états qui contiennent des particules.

Contrairement au cas fiat, il n'existe, en général, pas de vecteur Killing de type temporel avec des modes propres *u de fréquence positive*. La décomposition (10.86) n'est pas spéciale comme son homologue espace-temps plat, et on peut notamment choisir une autre base de modes

$$= \sum_j 52 [\hat{I}_{FM}^{(\Lambda)} + (\mathfrak{x})_j]. \quad (10.87)$$

En l'absence de raison contraire, cette seconde description est aussi valable que (10.86). En particulier, ces nouveaux modes définissent un nouvel état de vide  $|0\rangle$ , annihilé par les opérateurs  $b_j$ , et un espace de Fock différent du premier.

<sup>1</sup>Notons ici que le temps conforme étant négatif, nous avons choisi les fonctions de Hankel à argument positif, d'où le signe  $-kr$ , de manière à avoir ! tout problème de coupure le long du réel négatif axe pour les fonctions de Hankel.

$$u_k(\eta) = \frac{\sqrt{-\pi\eta}}{2} \left[ A_1(k) e^{i\frac{\pi}{2}(\nu - \frac{1}{2})} H_\nu^{(1)}(-k\eta) + A_2(k) e^{-i\frac{\pi}{2}(\nu + \frac{1}{2})} H_\nu^{(2)}(-k\eta) \right], \quad (10.84)$$

where  $A_i(k)$  and  $\nu$  are arbitrary functions of the wavenumber  $k$ , the  
Fonctions de Hankel <sup>1</sup> d'indice  $\nu = \frac{1}{2} - m/H^2 - 12\xi$ .

Avec cette normalisation, la relation pour le Wronskian (10.81) devient simplement

et il faudrait maintenant imposer les critères de fréquence positive pour fixer le choix de manière univoque. Pour ce faire, nous nous intéressons au développement asymptotique des fonctions de Hankel, et nous trouvons qu'avec le choix de phase (10.84), nous avons

$\sqrt{2k}$

ce qui indique qu'il faut prendre  $\nu = 0$  pour ne garder que la fréquence positive, et du fait de la normalisation, cela impose  $A_1 = 1$  jusqu'à une phase près.

La solution pertinente dans l'espace de Sitter est donc

$$u_k(\eta) = \frac{\sqrt{-\pi\eta}}{2} e^{i\frac{\pi}{2}(\nu + \frac{1}{2})} H_\nu^{(1)}(-k\eta) \quad (10.85)$$

conduisant à ce que l'on appelle l'état *de vide de Bunch-Davies* [23].

#### 10.2.2.6 Coefficients de Bogoliubov

Considérons le cas général (10.78) d'une décomposition de champ de la forme

$$\hat{\phi} = \sum \left[ \hat{a}_i u_i(x) + \hat{a}_i^\dagger u_i^*(x) \right] \quad (10.86)$$

où la somme est sur tous les degrés de liberté de la décomposition : une somme discrète sur les indices discrets, une intégrale sur les indices continus. A cette représentation est associé un état de vide  $|0\rangle$ , annihilé par tous les opérateurs  $\hat{a}_i$ ,  $\hat{a}_i |0\rangle = 0$ . En se basant sur cet état de vide, on peut alors construire tout l'espace de Fock correspondant aux états qui contiennent des particules.

Contrairement au cas plat, il n'existe, en général, pas de vecteur Killing temporel avec des modes propres de fréquence positive  $U_i$ . La décomposition (10.86) n'est pas spéciale comme son homologue espace-temps plat, et on peut notamment choisir une autre base de modes

$$(10.87)$$

En l'absence de raison contraire, cette seconde description est aussi valable que (10.86). En particulier, ces nouveaux modes définissent un nouvel état de vide  $|0\rangle_\nu$ , annihilé par les opérateurs  $b_j$ , et un espace de Fock différent du premier.

<sup>\*</sup>We should note here that since the conformal time is negative, we have chosen the Hankel functions with argument positive, i.e.  $-ky$ , afin d'éviter tout problème de coupure le long de l'axe réel négatif pour les fonctions de Hankel.

Les deux ensembles de modes  $m$  et  $V_j$  décrivent le même système, et tous deux doivent être complétés. De ce fait, il est possible d'exprimer chacun de ces modes en fonction de ceux de

l'autre base. Nous avons les relations Bogoliubov [24]

$$V_j(x) = \int_{je} + 0jiU^*(x\sim)], \quad u_j(x') = \int_j \wedge^2 \text{HiM}\mathfrak{a}e) - IdjiV_jix))], \quad (10.88)$$

dans laquelle les coefficients de Bogoliubov  $c_{q,j}$  et  $\beta_{ij}$  sont donnés par

$$\alpha_{ij} = (ry/uy) \text{ et } \beta_{ij} = -\{vi, u^{*'}\}, \quad (10.89)$$

avec le produit scalaire de (10.77), et en utilisant la propriété que  $(g, f) = (f, g)^*$ .

En écrivant explicitement l'égalité entre les décompositions (10.86) et (10.87), et en les identifiant terme par terme, on trouve

$$b_j = \int_{je} {}^QJA \sim \quad \text{et } {}^F = \int_j 52 \quad > \quad (10.90)$$

qui relie les opérateurs de création et d'annihilation d'une base à une autre. De plus, les coefficients de Bogoliubov ont également les propriétés suivantes

$$52 \left( \int_{je} {}^a ik {}^a jk \sim PikP^*jk \right) = bi_3 \text{ et } 52 \left( Qife \wedge fc = 52^{\wedge \wedge \wedge \wedge} \right) \quad (10.91)$$

ces relations sont obtenues en effectuant deux fois les transformations initiales (10.88). Les deux espaces de Fock définis par les opérateurs  $\hat{a}$  et  $b$  ne conduisent pas à la même description en termes de particules. En effet, l'état de vide  $|0\rangle_a$  n'est pas annihilé par  $b$ , puisque

$$52\% : \quad \int {}^a 52 / \wedge {}^a 2|0\rangle_a 7 \wedge 0,$$

je et de même pour  $\hat{a}|0\rangle_b$ . En conséquence, l'état

de vide pour l'expansion  $\hat{a}$  n'est plus le vide pour l'expansion  $b$  dès que les coefficients de Bogoliubov  $\beta_{jt} \neq 0$ . En effet, en notant  $\hat{a} = b_j b_j$  (sans additionner sur l'indice répété) le nombre de particules associées à l'expansion  $b$  opérateur, alors sa valeur à l'état de vide de  $\hat{a}$  est

$$\alpha(O|AH^6)|0\rangle_n = \int_k 52l/W- \quad (10.92)$$

Ainsi, le vide des modes  $u$  contient des particules de modes  $v$ . Nous allons maintenant étudier un exemple précis illustrant ce mécanisme de création de particules par un champ gravitationnel.

#### 10.2.2.7 Choix de l'état initial

On retrouve souvent dans la littérature que le choix (10.82) pour Minkowski ou (10.85) pour de Sitter (ou leur équivalent, s'il existe, dans l'espace qui nous intéresse) revient à dire que l'état initial du Système est le vide. En soi, ce commentaire n'a aucun contenu puisque l'expansion du champ en opérateurs de création et d'annihilation des quanta d'excitation du champ n'indique rien sur l'état dans lequel se trouvera le Système. En pratique, pour avoir du sens [25], il faut aussi préciser l'état du Système, et on suppose qu'il est  $|0\rangle_u$ , c'est à dire l'état annihilé par les modes  $u$ . En prenant le développement (10.86), nous trouvons que la valeur attendue  $\langle 0^2 \rangle$  dans le vide des modes  $u$  est

$$\langle \wedge^2 \rangle = \int (O|0M|O)_U = \wedge^2 N^2. \quad (10.93)$$

je

En conséquence, différents choix de constantes d'intégration pour les  $m$  modes conduisent à des résultats différents pour la valeur attendue du vide (10.93), qui peuvent également être interprétés comme des choix différents de vide pour la théorie. Une fois ce choix fait, on peut encore décider d'imposer comme condition initiale que le système soit dans l'état de vide correspondant. Ce qui est souvent écrit revient alors en réalité à décider a priori que le Système est dans le vide, puis à fixer ce vide par le choix des constantes d'intégration de mode.

### 10.2.3 Un exemple complet

Nous discutons ici d'un exemple initialement étudié dans la Réf. [26] pour lequel nous reproduisons la procédure de la Réf. [20],

#### 10.2.3.1 Métrique bidimensionnelle

Nous considérons le cas d'un champ scalaire minimalement couplé de masse  $m$  dans un espace-temps bidimensionnel. La métrique de type Friedmann-Lemaître est

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)dx^2 = a^2(t) (-d\tau^2 + dx^2).$$

On choisit pour le facteur d'échelle une solution (le champ scalaire est quantifié dans un champ gravitationnel extérieur, et on suppose que le facteur d'échelle est une solution des équations classiques d'Einstein), donnée par

$$a(t) = a_0 \exp \left[ \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \frac{t}{t_0} \right], \quad (10.94)$$

où  $t_0$  reflète la durée typique pendant laquelle le facteur d'échelle évolue. Pour  $t \rightarrow \pm\infty$ , nous avons les deux limites  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} a(t) = A \pm B$ . Asymptotiquement, les métriques des régions  $t \rightarrow \pm\infty$  tendent vers des métriques de Minkowski bidimensionnelles.

Pour  $\epsilon = 0$ , (10.74) devient

$$[A :^2 + a^2(T)]m^2 U_k = 0, \quad (10.95)$$

où nous avons utilisé l'expansion

$$\langle 6(2,77) = y \wedge k Q k \wedge U k i r i \rangle ; \quad (10.96)$$

avec  $Q f e(x) = e^{ikx}$ , l'équivalent unidimensionnel.1 de (10.80).

#### 10.2.3.2 Modes entrants et sortants

Pour le facteur d'échelle (10.94), il s'avère que la solution générale de (10.95) est connue [26] ; comme toute solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre, elle dépend de deux constantes d'intégration, qui sont choisies de manière à avoir comme limites des modes de fréquence positive pour  $r/ \rightarrow -\infty$  ou  $r/ \rightarrow +\infty$ . Une fois ce choix fait, la normalisation (10.81) donne une autre relation entre les constantes, de sorte que la solution est complètement déterminée.

En procédant de cette manière pour  $r/ \rightarrow -\infty$ , on trouve

$$u_k^{\text{in}}(\eta) = \frac{e^{-i\omega_+ \eta - i\omega_- \eta_0 \ln[2\text{ch}(\eta/\eta_0)]}}{\sqrt{2\omega_{\text{in}}}} {}_2F_1(1 + i\omega_- \eta_0, i\omega_- \eta_0, 1 - i\omega_{\text{in}} \eta_0; z_+), \quad (10.97)$$

où  ${}_2F_1$  est une fonction hypergéométrique (voir Réfs. [2,3] de l'Annexe B), et pour  $r/ \rightarrow +\infty$ , on obtient

$$u_k^{\text{out}}(\eta) = \frac{e^{-i\omega_+ \eta - i\omega_- \eta_0 \ln[2\text{ch}(\eta/\eta_0)]}}{\sqrt{2\omega_{\text{in}}}} {}_2F_1(1 + i\omega_- \eta_0, i\omega_- \eta_0, 1 + i\omega_{\text{out}} \eta_0; z_-). \quad (10.98)$$

The constants that appear in these relations are

$$\omega_{\text{in}}^2 = k^2 + m^2(A - B), \quad \omega_{\text{out}}^2 = k^2 + m^2(A + B), \quad \text{and} \quad \omega_{\pm} = \frac{1}{2}(\omega_{\text{out}} \pm \omega_{\text{in}}),$$

et la variable est définie par

$$z_{\pm} = \frac{1}{2} \left[ 1 \pm \tanh \left( \frac{\eta}{\eta_0} \right) \right].$$

As required, both modes have the limit

$$\lim_{\eta \rightarrow -\infty} u_k^{\text{in}}(\eta) = \frac{e^{-i\omega_{\text{in}} \eta}}{\sqrt{2\omega_{\text{in}}}}, \quad \lim_{\eta \rightarrow +\infty} u_k^{\text{out}}(\eta) = \frac{e^{-i\omega_{\text{out}} \eta}}{\sqrt{2\omega_{\text{out}}}},$$

satisfaisant la contrainte de Wronskian (10.81).

Des propriétés des fonctions hypergéométriques, on peut déduire les relations entre les modes entrants, 'in', et les modes sortants, 'out', sous la forme

$$\begin{aligned} \langle H \rangle &= \int dp [a_{\text{fc}} u^{\text{out}}(p) + 3 \text{fc} \langle p^{\text{out}} \rangle] \\ &= \int dp [a_k \delta(\text{fc} - p) u^{\text{out}}(p) + 5 \text{fc} \langle 5(\text{fc} + p) u^{\text{out}}(p) \rangle], \end{aligned} \quad (10.99)$$

avec

$\frac{1}{\omega_{\text{out}}} (1 - \frac{T}{\omega_{\text{out}} \omega_0}) r, \frac{1}{\omega_{\text{out}}} I^{\text{out}} T (1 - \frac{F}{\omega_{\text{out}} \omega_0}) V$   
 $\text{Win } F(\sim \hat{1}W + p_0) F(1 - i\omega + p_0) \text{ 'fc } V^{\text{in}} F(\hat{1}W_{\text{Po}}) F(1 + \hat{1}W + p_0) \text{ ' donnant les coefficients}$   
 de Bogoliubov pour ce système sous la forme

$$a_{\text{fc}} = a \hat{\delta}(k - p) \text{ et } 0_{kp} = \frac{1}{3} k \hat{\delta}(k + p).$$

### 10.2.3.3 Production de partiels

En prenant le module des coefficients de Bogoliubov, et en utilisant les propriétés des fonctions  $F$ , on obtient

$$|\hat{O}|_{\text{fc}}|^2 = \frac{\text{Sh}^2(\wedge \wedge 0)}{\text{sh}(7TW_{\text{in}}/770) \text{sh}(7TW_{\text{sortie}}/770)} \text{ et } |\wedge|^2 = \frac{\text{Sh}^2(TT \wedge T_{\text{jo}})}{\text{sh}(7TW_{\text{entrée}}/770) \text{sh}(7TW_{\text{sortie}}/770)},$$

à partir duquel on peut utiliser les propriétés (10.91) pour vérifier que



$$|k|^2 - |3fc|^2 = 1 -$$

Supposons maintenant que le champ  $\phi$  soit dans l'état de vide à  $r_j \rightarrow \infty$ , soit  $|0\rangle_n$ . Dans la représentation Heisenberg, pour laquelle les états n'évoluent pas, cet état décrit encore le Système à tout moment. A l'origine, puisque cet état de vide est défini par rapport aux modes  $u^E$ , il n'y a pas de particules, et cela est vrai pour tout observateur inertiel puisque dans cette limite l'espace-temps est Minkowski. Dans la région correspondant aux modes sortants, la situation est similaire. L'espace-temps est à nouveau Minkowski, mais avec une normalisation de distance différente, et la notion de particules est ainsi assurée d'avoir une signification claire. Depuis l'état  $|0\rangle_n$  n'est pas le vide des modes  $u^U$ , tout observateur inertiel verra un nombre de particules égal à  $1/3J^2$ . L'expansion de l'Univers, dans ce cas simple, a produit des particules de champ scalaire résultant du couplage avec la gravité. C'est par ce mécanisme que se produisent les perturbations d'un champ scalaire, donnant lieu, dans l'Univers primordial post-inflationniste, aux fluctuations classiques nécessaires à la formation des structures à grande échelle (voir chapitre 8).

### 10.3 Supersymétrie et supergravité

Avant de formuler la physique des particules dans un espace-temps courbe selon les lignes décrites précédemment, la physique des particules doit d'abord être décrite dans un espace-temps de Minkowski, ce qui est toujours possible localement à partir des principes de la relativité générale. La description des particules revient à étudier au microscope les différentes symétries qui existent entre les états physiques, et pour voir ces effets il est presque toujours possible de négliger la gravité, sauf dans les cas pour lesquels la théorie des champs dans un espace courbe n'est pas valable : cela se produit lorsque l'énergie caractéristique des Systèmes que nous considérons est de l'ordre de  $M_p$ . Outre les symétries de jauge, qui peuvent être arbitrairement étendues aux grandes théories unifiées comme nous l'avons vu au chapitre 9, il existe une symétrie supplémentaire, connue sous le nom de supersymétrie, qui, tout en étant complémentaire des autres, n'est pas elle-même basée sur un groupe de Lie. Selon cette symétrie, les fermions et les bosons ne sont que des états différents du même objet mathématique appelé supermultiplet.

#### 10.3.1 Généralités techniques

Le principe de supersymétrie, souvent noté SUSY, suppose l'existence d'un opérateur fermionique  $Q$  qui échange les états de fermion et de boson :

$$Q| \text{ boson} \rangle = | \text{ fermion} \rangle \text{ et } Q| \text{ fermion} \rangle = | \text{ boson} \rangle,$$

et postule que ces opérateurs sont les générateurs d'une symétrie. Ce faisant, une nouvelle particule devrait être introduite, qui peut être motivée à la fois par des considérations expérimentales et théoriques.

##### 10.3.1.1 Motivations

Il existe de nombreuses preuves indépendantes qui indiquent l'existence d'une supersymétrie . De plus, ces raisons indiquent que l'échelle d'énergie caractéristique devrait être de l'ordre du TeV. Premièrement, la grande unification : comme indiqué précédemment, les constantes de couplage des interactions électromagnétiques, faibles et fortes semblent se rejoindre à haute énergie, mais pas exactement, comme le montre la figure 9.2. Cette unification peut être grandement améliorée en supposant une supersymétrie, comme on peut l'observer sur la figure

10.5, à condition que ses effets ne soient perceptibles qu'à des énergies supérieures à une échelle typique de l'ordre du TeV.

60

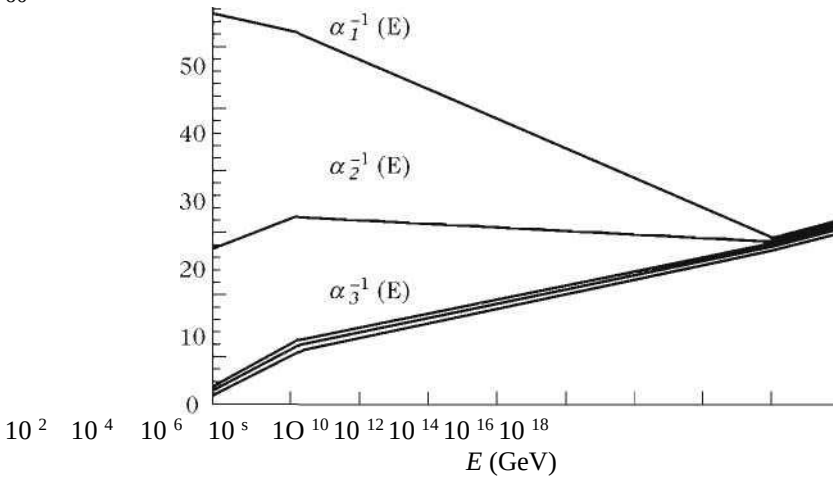


**Fig. 10.5** Unification des constantes de couplage avec supersymétrie. Si la supersymétrie est présente, le nombre de particules contribuant aux interactions est plus grand, modifiant la pente de la variation des constantes de couplage avec l'énergie au-delà de l'échelle de rupture de supersymétrie. Cela nous fournit un moyen de modifier les pentes afin que les constantes se coupent exactement à la même énergie. De plus, cela nous permet de prédire l'échelle d'énergie à laquelle la supersymétrie est brisée, en l'occurrence autour de 1 TeV.

De plus, la supersymétrie apporte une solution physique à un problème apparemment technique : le problème de la hiérarchie, à savoir pourquoi les masses des particules scalaires, comme le boson de Higgs du modèle standard, ne sont pas de l'ordre de la grande unification. En considérant les corrections radiatives  $\delta m$  de la masse  $m$  d'une particule scalaire, on remarque qu'elles dépendent de l'échelle d'énergie au-delà de laquelle la théorie n'est plus valable, par exemple  $E_{GUT}$ . On trouve alors que  $\delta m^2 = mQ + 4m^2 \sim mQ - E_{GUT}$ , de sorte que pour avoir, par exemple,  $m \sim 100$  GeV, il faudrait  $(\ln j^2 - B^2_{UT})/E'_{GUT} \sim 10^{-34}$ , ce qui représente un réglage assez fin de paramètres qui, à l'origine, n'avaient rien à voir les uns avec les autres.

Outre les particules habituelles, la supersymétrie implique l'existence de partenaires supersymétriques de spins différents ; ceux-ci sont connus sous le nom de superpartenaires, *de spartners ou de particules* en abrégé. Tant que la supersymétrie n'est pas rompue, l'effet de ces superparticules sur les corrections radiatives est de compenser l'effet des particules initiales, de manière à annuler exactement ces corrections. Cela résout le problème de la hiérarchie. De plus, si la supersymétrie est brisée, même si la compensation n'est plus exacte, elle reste très bonne, et le problème est bien moins grave : de toute façon, si le problème de hiérarchie est résolu dans un ordre donné, alors cette solution reste valable, à tous les ordres en cas de perturbations. Pour que cela soit valable, la supersymétrie devrait pouvoir agir à des échelles d'énergie peu différentes de celle du modèle standard, c'est-à-dire de l'ordre de la centaine de GeV.

Enfin, le dernier argument vient de la cosmologie : pour des modèles réalistes, il doit exister une particule absolument stable appelée particule supersymétrique la plus légère (LSP). Pour que cette particule contribue de manière significative à la matière noire, sa masse devrait être

de l'ordre de la centaine de GeV, soit là encore la bonne échelle d'énergie.

En conclusion, la plupart des théories réalistes supposent l'existence d'une supersymétrie, qui doit être brisée pour les échelles d'énergie inférieures au TeV.

### 10.3.1.2 *Théorèmes de Coleman-Mandula et Haag-Lopuszanski-Sohnius*

Le premier problème qui se pose lorsqu'on veut construire une théorie supersymétrique découle du théorème de Coleman-Mandula de 1967 [27]. Selon elle, toute théorie relativiste des champs à quatre dimensions, invariante sous les transformations d'un groupe de Lie semi-simple et contenant le groupe de Poincaré comme sous-groupe, est une théorie triviale : la matrice de diffusion est suffisamment contrainte pour respecter la conditions du théorème qu'il ne peut être égal qu'à l'identité. En d'autres termes, il n'y a pas d'interactions, et donc la théorie, étant triviale, n'a aucun intérêt physique.

Ce théorème peut également être considéré comme déterminant la plus grande symétrie qu'une théorie non triviale puisse avoir. C'est le produit du groupe Poincaré avec un groupe de symétrie interne. Dans cette formulation, nous voyons que le théorème implique qu'il n'est pas possible que des supermultiples irréductibles du groupe de symétrie contiennent des particules de spins différents. En effet, pour qu'un tel multiplet contienne à la fois des bosons et des fermions, il doit exister un générateur du groupe d'invariance capable de se transformer les uns en les autres. Puisque le spin est lié à l'invariance rotationnelle et que les éléments du groupe de Poincaré le laissent invariant, l'invariance requise pour la théorie devrait être une extension semi-simple du groupe de Poincaré.

Ce résultat repose en fait sur l'hypothèse que les nouveaux générateurs introduits, c'est à dire ceux de la supersymétrie, forment une algèbre de Lie. En 1971, GolFang et Likhtman [28] remarquèrent qu'en réalité des états de spins différents pouvaient être reliés via un groupe de symétrie dont les générateurs forment une algèbre de Lie graduée, c'est à dire qu'ils satisfaisaient à la fois des relations de ticommutation et de commutation. Enfin, en 1975, Haag, Lopuszanski et Sohnius [29] démontrèrent que ces opérateurs ne pouvaient avoir un spin supérieur à  $\frac{1}{2}$  pour que la théorie ne soit pas triviale. Les opérateurs de supersymétrie doivent donc être des spineurs.

### 10.3.1.3 *Weyl, Dirac et Majorana. spineurs*

Dans la représentation chirale (2.65) utilisée jusqu'à présent, un spinor de Dirac se décompose sous la forme de deux spineurs de Weyl comme

(10.100)

où les indices non pointés  $a = 1, 2$  donnent les composantes d'un spineur gaucher et les indices pointés  $\dot{a} = 1, 2$  indiquent les composantes droites. Ces différences dans les indices distinguent les deux types de spineurs qui se transforment différemment sous les transformations de Lorentz. De plus, il s'avère [30] que les spineurs de Weyl  $\chi^a$  et  $\psi_{\dot{a}}$  se transforment respectivement en  $\chi^a$  et  $\psi_{\dot{a}}$ , de sorte qu'il

est possible de transformer un bi-spineur gauche en un bi-spineur droitier et vice versa grâce à la matrice de Pauli  $\sigma^2$ . Définir  $\psi_{\dot{a}} = (\sigma^2)^{\dot{a}a} \chi_a$

we can use the matrices  $e_{QP} = (\sigma^2)^{\dot{a}a}$  to pass from a right spinor to a left, spinor

$(\sigma^2)^{\dot{a}a} = (\sigma^2)^{a\dot{a}}$  et vice versa :  $\chi_a = (\sigma^2)^{a\dot{a}} \psi_{\dot{a}}$

$\chi_a$  et

De la même manière, on peut définir

opérateurs complémentaires pour augmenter et diminuer les indices de  $\chi_a$  et  $\psi_{\dot{a}}$ , donnant  $\chi^a = \epsilon^{ab} \chi_b$  et  $\psi^{\dot{a}} = \epsilon^{\dot{a}\dot{b}} \psi_{\dot{b}}$ ,

et  $\chi^a = \epsilon^{ab} \chi_b$  et  $\psi^{\dot{a}} = \epsilon^{\dot{a}\dot{b}} \psi_{\dot{b}}$ . Finalement, avec ces notations le *ip conjugué* de

un spineur de Dirac est  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$

L'opérateur de conjugaison de charges  $C$  pour les fermions est [31]  $C = -i\gamma^0 \gamma^2$  donc ça. le nombre de fermions conjugués de charge de  $\psi$  est

$$\bar{\psi} = C\psi^T, C = -i\gamma^0 \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (10.101)$$

qui est utilisé pour définir a. Fermion Majorana  $\psi_M$  en imposant  $\psi_M = C\bar{\psi}_M^T$ . On peut vérifier explicitement que si  $\psi_M$  satisfait l'équation de Dirac pour une particule chargée de charge  $q$ , alors  $\bar{\psi}_M$  satisfait la même équation tant qu'on remplace  $q$  par  $-q$ . Un spinor Majorana peut

be simply constructed from a Weyl spinor in the form

# 64

Avec ces notations, le Lagrangien de Dirac d'un champ de masse  $m$  (2,63) devient

où les indices des matrices et  $T^a$  sont ajustés pour que le Lagrangien soit un scalaire. Pour aller plus loin dans les calculs, il faut tenir compte du fait que les fermions, une fois quantifiés, satisfont aux relations d'anticommutation [voir (2.114) et (2.115)]. Pour la théorie classique, cela se traduit par le fait que nous exigeons que tous les composants du spineur fassent un anti-commutation plutôt que de faire la navette. Nous les appelons *variables Grassmann*.

Le premier terme du lagrangien de Dirac peut aussi s'écrire sous la forme

<sup>3</sup>Une théorie classique d'un champ fermionique n'est pas à proprement parler bien définie, puisqu'un fermion est quantifié par nature. Nous utilisons cette désignation pour décrire la théorie sur laquelle repose la correspondance. Ce principe est appliqué pour obtenir la théorie quantique (voir chapitre 2). Cette formulation est utile notamment dans la formulation fonctionnelle, c'est à dire dans l'approche intégrale de chemin, en théorie des champs.

Puisque le terme dérivé total n'a aucune influence au niveau des équations dynamiques, on trouve qu'en prenant en compte la relation  $crcAcr = (a P$  et le fait que  $d^{\wedge}X/sX\dot{u} = -X\dot{a}d^{\wedge}x/3$ , on obtient

$$\wedge Dirac = -i + x^{\wedge}x) + m (xC + ?x), \quad (10.102)$$

où le « produit scalaire » pour les fermions représente l'anticommutativité :  $X^e'so = (^{\circ}Xa = CX$  et  $Ix = Z_Q X^a = X\dot{a}F = x\dot{e}$  L'équation (10.102) montre que l'action qui décrit les spineurs de Dirac peut toujours s'écrire en développant ces derniers sous la forme d'une collection de spineurs de Dirac Les spineurs de Weyl.

#### 10.3.1.4 Algèbre graduée

La possibilité la plus simple pour les générateurs de supersymétrie permettant la transformation des états de fermions en états de bosons est celle pour laquelle on choisit les opérateurs  $Q^A$  comme bi-spineurs de Weyl, avec  $A = 1, \dots, N$ , où  $N$  est le nombre de supersymétries. On suppose également une symétrie interne entre les différents générateurs  $Q^A$ , qui sont ainsi placés dans une représentation fixée par cette invariance. Avec ce choix, on peut alors montrer [31] que l'algèbre de supersymétrie s'écrit sous la forme

$$[P^{\wedge}, Q^A] = Q, \quad (10.103)$$

indiquant que les transformations de supersymétrie ne sont pas affectées par les traductions, qui ont le générateur  $= id^{\wedge}$ , et

$$[J^{\wedge} Q^A_Q] = \quad \text{et} \quad = -z(d^{\wedge})^{\dot{a}}_i j^{\wedge}, \quad (10.104)$$

où  $| (o^{\wedge}d^{\wedge}{}^1{}^{\wedge} - rA^{\wedge}j$  et  $cr^{M,7} = | (<7^M <7^{\wedge}{}^1{}^{\wedge} - d^{\wedge}cd^{\wedge}{}^1{}^{\wedge})$  et les opérateurs sont les générateurs de rotations et de transformations de Lorentz dont les propriétés sont discutées au chapitre 1 [voir (1.16)]. De plus, nous avons

$$\{Q^A, Q^B\} = 2^{\wedge}(\wedge)_{Q/j} F_{/z}, \quad (10.105)$$

et enfin

$$\{Q^A, Q^B\} = e_{a0} Z^{AB}, \quad (10.106)$$

où les « charges centrales »  $Z^{AB}$  satisfont

$$Z'15 = -ZBA = ' \wedge 2(q^{AB})_{une} X^{une},$$

les  $A^0$  étant les générateurs des symétries internes des générateurs de supersymétrie respectant l'algèbre (2.119). Ces charges centrales commutent avec tous les générateurs de supersymétrie : elles appartiennent à un invariant de sous-algèbre abélienne sous le groupe de symétrie interne.

L'algèbre formée par (2.119) avec les relations de commutation (1.15), (1.16) du groupe de Poincaré, et complétée par (10.103) à (10.106) inclut à la fois les relations de commutation et d'anticommutation. Donc ces relations ne sont pas un mensonge

algèbre, ce qui explique pourquoi le théorème de Coleman-Mandula ne s'applique pas. Ce type d'algèbre est appelé *algèbre graduée*.

Dans de nombreux cas pratiques, notamment en cosmologie, on considère le cas  $N = 1$ , qui n'a alors pas de charges centrales. Si  $N > 1$ , nous avons affaire à ce qu'on appelle la supersymétrie étendue. Désormais, nous nous limitons au cas  $N = 1$  SUSY.

### 10.3.1.5 Positivité de l'énergie

Une conséquence importante de la supersymétrie concerne l'énergie de l'état du Système. En utilisant (10.105) et en prenant la trace sur les indices de spin, alors, puisque la trace des matrices de Pauli disparaît, on trouve

$$Q_i Q_i + Q_i Q_i + Q_2 Q_2 + Q_2 Q_2 = \frac{3}{2} [Q_{\alpha\beta} (\zeta_\alpha) + (\zeta_\alpha) \zeta_\alpha] = 4F_0 - 0 = 1$$

Or, si l'on considère un état physique arbitraire  $T$ , son hamiltonien  $H = PQ$  satisfait nécessairement

$$(4' | 7 | 4') - j \sum_{\alpha} [ \| \zeta Q_{\alpha} y m \|^2 + \| Q_{Qm} \|^2 ] > 0, \quad (10.107)$$

qui est une somme de termes définis positifs. Cela implique que l'énergie de l'état  $T$  est manifestement positive. Par conséquent, nous constatons que tout état d'une théorie supersymétrique a une énergie positive, et nous voyons que le minimum de l'énergie, c'est-à-dire le vide  $0$  est obtenu pour  $Q_{\alpha} | 0 \rangle = 0 = Q^* | 0 \rangle$ . Le vide supersymétrique satisfait donc  $K | 0 \rangle = 0$ . Cette propriété est utile dans de nombreux systèmes quantiques, même non relativistes [32], ainsi qu'en cosmologie.

### 10.3.1.6 Multiplets de supersymétrie

Comme pour toute symétrie, les représentations irréductibles de la supersymétrie sont construites à partir des valeurs propres des opérateurs de Casimir, c'est-à-dire les opérateurs qui commutent avec tous les générateurs du groupe d'invariance. C'est par exemple le cas de l'opérateur  $F^2 =$  dans le groupe de Poincaré, dont la valeur propre, ici la masse au carré, est la même pour toutes les particules d'une même représentation.

En supersymétrie, (10.103) montre que  $P^2$  commute aussi avec les générateurs  $Q_{\alpha}$ , c'est donc toujours un opérateur de Casimir, et on peut donc encore classer les représentations selon ses valeurs propres, c'est-à-dire la masse : les particules et leurs superpartenaires doivent ont la même masse.

Un autre opérateur intéressant est le vecteur spin de Pauli-Lubanski  $W^{\mu}$  défini par

$$W_{\mu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p^{\nu} J^{\alpha\beta},$$

dont le carré est un opérateur de Casimir pour le groupe de Poincaré :  $W^2 = m^2 J^2$ , avec  $m^2 = -P^{\mu} P_{\mu}$  et  $J$  le moment cinétique, de valeurs propres  $J^2 = j(j+1)$  : le

<sup>5</sup>Le carré de est calculé en utilisant la relation [voir Réf. (1.32) du chapitre 1] ainsi qu'en utilisant les relations explicites [9] du chapitre 2  $J_{ij} =$  et  $J_0 i =$  où  $J$  est le générateur de rotation (moment angulaire) et  $K$  celui des transformations de Lorentz.

les représentations irréductibles en physique non supersymétrique sont classées selon les spins partiels. Dès que les générateurs fermioniques sont pris en compte, le calcul direct montre que  $[W^2, Q_Q]$  est nul, ce qui implique qu'une supersymétrie un multiplet, c'est-à-dire un supermultiplet, peut contenir des particules massives de spins différents.

En fait, chaque supermultiplet doit contenir autant de degrés de liberté bosoniques que fermioniques. Cela se voit de la manière suivante : les opérateurs  $Q_a$  et  $Q_{\dot{a}}$  changent un état bosonique en un état fermionique et vice versa. Ainsi, l'anticommutateur  $\{Q_a, Q_{\dot{a}}\}$  est un opérateur bosonique, qui est proportionnel à l'impulsion de la relation algébrique (10.105). Notant  $N_P$  l'opérateur nombre fermionique, qui donne 1 sur un état de fermion et 0 sur un état de boson, on a donc  $(-1)^{N_P} Q_c = -Q_a (-1)^{N_P}$ . Sur un multiplet de dimension finie, on trouve que  $\text{Tr} [(-1)^{N_P}] = 0$ , ce qui implique d'après (10.105) que  $\text{Tr} [(-1)^{N_P}] = 0$ . Puisque  $(-1)^{N_P} = -1$  sur un état de fermion et  $(-1)^{N_P} = +1$  sur un état de boson, cela implique qu'il y a il doit y avoir autant de fermions que de bosons dans un supermultiplet.

### 10.3.1.7 Transformations infinitésimales

Nous pouvons réaliser l'algèbre de supersymétrie en utilisant une transformation infinitésimale, ayant un « paramètre fermionique  $\delta\psi$  », qui doit être une variable de Grassmann. La limite d'un grand nombre de telles transformations infinitésimales, comme dans le cas de (2.117), conduit à une transformation finie. Une telle transformation est générée par

$$T_\psi = 1 - i\epsilon \psi \cdot \frac{\partial}{\partial \psi}, \quad (10.108)$$

et nous trouvons [31] que la transformation d'un champ fermionique ou bosonique arbitraire  $A$  est donnée par le commutateur

$$\delta A(z) = [i\epsilon Q, A(z)]. \quad (10.109)$$

Pour que l'algèbre (10.103)-(10.106) soit satisfaite, les transformations infinitésimales doivent alors satisfaire des relations de clôture de la forme  $[Q_a, Q_b] = \delta_{ab} Q_c$ , et surtout

$$[Q_a, Q_b] = \delta_{ab} Q_c, \quad (10.110)$$

indiquant comment deux transformations successives doivent agir pour respecter la supersymétrie.

### 10.3.2 Wess — modèle Zumino

Le modèle supersymétrique le plus simple que l'on puisse concevoir est basé sur un fermion de Weyl gauche, contenant deux degrés de liberté, qui peut ainsi être équilibré dans le secteur bosonique par un champ scalaire complexe. Il s'agit du modèle de Wess-Zumino [33].

#### 10.3.2.1 Termes cinétiques

Nous considérons les termes cinétiques suivants

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi} \not{\partial} \psi + \dots \quad (10.111)$$

c'est-à-dire un système de bosons et de fermions sans masse. La supersymétrie peut être simplement représentée pour ce système en écrivant  $Q_a \psi = \epsilon_{ab} \chi_b$  et  $Q_{\dot{a}} \psi = 0$ , ainsi que  $Q_a \chi = 0$  et  $Q_{\dot{a}} \chi = 0$ .

Le Lagrangien (10.111) doit respecter la supersymétrie, c'est à dire qu'on veut qu'il soit

invariant sous des transformations qui échangent les rôles de  $\psi$  et  $\bar{\psi}$ . Supposons d'ailleurs que nous nous intéressons à une transformation infinitésimale. En supposant la transformation la plus simple possible, le champ scalaire se transforme selon  $\delta\phi = \epsilon$  avec  $A$  et  $\bar{A}$  constante. Puisque  $\psi$  a une dimension de masse, c'est à dire

$[0] = M$  et  $[\bar{\psi}] = M^{3/2}$ , on a  $[\epsilon] = M^{1/2}$ . Quant au fermion, il doit donner un terme impliquant le champ scalaire, et puisque  $\psi = M^{1/2}$ , en l'absence de constante dimensionnelle dans la théorie (10.111), ce terme devrait nécessairement être proportionnel à  $\delta\psi \propto \psi$ . Puis, compte tenu de l'indice fermionique de  $\bar{\psi}$ , on trouve l'unique transformation possible :  $\delta\psi = B\bar{\psi} \epsilon$  ( $B$  constante numérique).

Nous exigeons maintenant que ces transformations représentent effectivement l'algèbre de supersymétrie. Pour cela, notons que pour assurer (10.110), qui peut s'écrire  $\delta\psi = 2i\epsilon \gamma_5 \psi$ , il faudrait imposer  $\bar{A} = 0$  (pas de terme dans  $\delta\psi \propto \bar{\psi}$ ) et  $AB = 2i$ . Respecter l'algèbre de supersymétrie sur le spineur nécessite  $\delta\psi = 2i(\gamma_5 \psi \epsilon - \bar{\psi} \epsilon \gamma_5 \psi)$ , qui est vérifié pour les mêmes contraintes tant que le spineur satisfait également son équation de mouvement  $\gamma^\mu \partial_\mu \psi = 0$ .

En faisant varier le Lagrangien (10.111), on trouve un terme qui peut s'exprimer comme une dérivée totale, comme on peut s'y attendre si l'invariance est respectée, pour peu qu'on ait aussi  $A = iB^*$ , de sorte qu'il faut finalement avoir  $\delta\psi = \gamma_5 \psi \epsilon$  et  $\delta\bar{\psi} = -\bar{\psi} \epsilon \gamma_5$ .

Ces transformations n'indiquent pas réellement l'existence d'une symétrie arbitraire puisque, pour l'obtenir, on impose que le spineur soit sur la coque de masse (satisfaisant  $p^2 + m^2 = 0$ ), ce qui peut être vu comme une symétrie supplémentaire. On peut remarquer que cette condition ne s'applique pas pour le champ scalaire.

### 10.3.2.2 Champ auxiliaire

Le lagrangien (10.111) ne peut être invariant indépendamment de l'équation du mouvement du spineur : tant que cette équation n'est pas satisfaite, le bi-spineur a deux fonctions complexes, soit quatre degrés de liberté, à comparer aux deux du complexe champ scalaire  $\phi$ . Pour rétablir la parité entre degrés de liberté bosonique et fermionique, il faudrait donc ajouter un champ scalaire complexe, appelé champ auxiliaire et traditionnellement noté  $F$ . Cela dit, ce champ n'est pas un véritable champ physiquement observable puisque la supersymétrie peut ne peut être atteinte que si  $\psi$  satisfait son équation de mouvement.

Le modèle supersymétrique est donc le suivant :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + F^* F, \quad (10.112)$$

et l'invariance est celle par rapport aux transformations

$$\delta\phi = \epsilon, \quad \delta F = \gamma_5 \psi \epsilon, \quad \delta\bar{\psi} = -\bar{\psi} \epsilon \gamma_5$$

(10.113)



On peut vérifier que ces transformations induisent une variation  $\delta \mathcal{L}_{\text{WZ}}$  qui est une dérivée totale sans utiliser les équations du mouvement. Cela se traduit également par le fait que le terme  $F$  supplémentaire ferme l'algèbre.

D'après (10.112), nous voyons immédiatement que le champ  $F$  n'est essentiellement pas physique. En fait, son équation dynamique implique simplement  $F = 0$  sur sa coque de masse, ce n'est donc qu'une contrainte. De plus, (10.112) et (10.113) montrent que  $[F] = M^{-2}$ , contrairement à un champ scalaire normal.

### 10.3.2.3 Superchamps

Il est possible de construire un objet qui inclut toutes les composantes d'un multiplet de supersymétrie, c'est ce qu'on appelle un superchamp. Dans le cas d'une théorie chirale (10.112), on écrit simplement  $\langle E \rangle = (\phi, \mathcal{L}, F)$ , de sorte que le superchamp chirale  $\langle E \rangle$  inclut à la fois les champs physiques  $\phi$  et  $\mathcal{L}$  ainsi que le champ auxiliaire  $F$ . Les lois de transformation d'un superchamp chirale sont données par (10.113).

Pour ajouter deux superchamps, il suffit d'ajouter leurs composantes, de sorte que, puisque les transformations (10.113) sont linéaires (car infinitésimales), les composantes combinées se transforment comme les sommes des composantes transformées.

La multiplication est plus subtile. On procède de la manière suivante : en considérant les deux superchamps chiraux  $\langle E \rangle_1 = (\phi_1, \mathcal{L}_1, F_1)$  et  $\langle E \rangle_2 = (\phi_2, \mathcal{L}_2, F_2)$ . On définit la partie scalaire du produit  $\langle E \rangle_1 \langle E \rangle_2 = (\phi, \mathcal{L}, F)$ . Applying the transformation law to this scalar part,

$\langle E \rangle_1 \langle E \rangle_2$  on voit qu'il faut avoir comme

composantes de spineur  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$

dont la loi de transformation permet d'obtenir la loi de composition des termes  $F$ , à savoir<sup>6</sup>  $F = \langle E \rangle_1 \langle E \rangle_2$  qui

généralise les  $F = F_1 \phi_2 + F_2 \phi_1 - \xi_1 \xi_2$ . In other words, we obtain

considérations

$$\Phi_i \Phi_j = (\phi_i \phi_j, \xi_i \phi_j + \xi_j \phi_i, \phi_i F_j + \phi_j F_i - \xi_i \xi_j), \quad (10.114)$$

précédentes au cas

d'un nombre arbitraire de superchamps.

Il existe un formalisme, basé sur la notion de *superespace*, composé des quatre coordonnées spatio-temporelles usuelles c'est-à-dire ce trajet, auquel on ajoute quatre coordonnées fermioniques anti-échange<sup>6</sup>. Dans ce formalisme, les lois de transformation telles que (10.114) découlent naturellement des séries de Taylor de toute fonction des coordonnées [31].

### 10.3.2.4 Interactions, superpotentiel et terme $F$

La loi de transformation du terme  $F$  dans (10.113) suggère l'utilisation de tels termes pour introduire automatiquement des Lagrangiens invariants sous une transformation supersymétrique : en effet, dès que l'on considère des *supersymétries globales*, c'est-à-dire pour lesquelles le paramètre infinitésimal  $\mathcal{L}$  est une constante dans l'espace et le temps, alors  $\delta \mathcal{L} = d_t$ , et donc c'est une dérivée totale. On est donc certain d'avoir l'invariance requise dès qu'on prend une théorie avec Lagrangien

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi_i \partial_\nu \phi_i + \mathcal{L}_F + W(\phi) \quad (10.115)$$

<sup>6</sup>POUR obtenir cette relation, il faut revenir à la définition du produit scalaire de deux spineurs et utiliser la relation  $\xi_i \xi_j = -\xi_j \xi_i$  en rappelant que les deux composantes des spineurs anticommulent.

où  $W$ , appelé superpotentiel, est fonction des superchamps,<sup>7</sup> et est a priori arbitraire mais est en pratique contraint de sorte que la théorie est renormalisable. Notons que dans (10.115), on inclut dans le lagrangien uniquement le terme  $F$  correspondant au superpotentiel (et son conjugué complexe tel que le lagrangien résultant soit réel) : c'est le sens de la notation  $F$ . Ce superpotentiel permet de construire un potentiel scalaire et tous les termes d'interaction entre les différents champs contenus dans la théorie. Pour un multiplet unique, le cas le plus couramment considéré est

$$W(\Phi) = -\frac{m}{2} \Phi^2 + \frac{g}{3} \Phi^3, \quad (10.116)$$

pour lequel le terme  $F$  est donné par

$$F = -m\Phi - g\Phi^2,$$

et après quelques calculs on trouve

$$(10.117)$$

avec  $F = F + \text{c.c.}$  un nouveau champ auxiliaire qui se doit d'être non dynamique puisque son équation de mouvement est toujours  $F = 0$  (elle est en fait obtenue en mettant  $F = \delta C / \delta F^*$ ).

Ce modèle de supermultiplet chiral contient donc un fermion gauche et un champ scalaire en interaction, tous deux de même masse  $m$ . En fait, il s'avère même qu'en raison de la forme précise des termes d'interaction, qui est entièrement due au fait que la théorie est supersymétrique, les masses de ces deux particules sont exactement égales à tous les ordres de perturbations. Ceci est un exemple de propriété de *non-renormalisation*, qui apparaît généralement dans les théories supersymétriques.

### 10.3.2.5 Potentiel scalaire

Partant du superpotentiel  $W$ , et de la construction de son terme  $F$ , le potentiel de champ scalaire que l'on retrouve par exemple dans (10.117) s'obtient très simplement grâce à la relation suivante : relation dans laquelle nous avons utilisé la forme générale avec un nombre arbitraire de corps, mais cela donne immédiatement tous les termes n'impliquant pas les parties scalaires de l'action (10.117), lorsqu'on se limite au cas d'un seul multiplet.

$$V = E \frac{dW}{d\Phi} \quad (10.118)$$

Le potentiel scalaire de (10.118) provient directement des  $F$  termes du Lagrangien initial. Notons que les grandeurs  $F_i$  sont des solutions des équations de contraintes pour ces grandeurs auxiliaires

$$dW$$

de sorte que  $V = \sum_i |F_i|^2$

### 10.3.3 Champ de jauge

Les interactions entre particules, outre celles spécifiques à un champ scalaire, se propagent par

<sup>7</sup> Notez qu'en fonction des composantes scalaires, le superpotentiel dépend des champs mais ne peuvent pas dépendre de leur conjugué.

des champs de jauge. Si la théorie qui décrit correctement la Nature est supersymétrique, alors ces champs de jauge doivent également appartenir à des supermultiplets, que nous appelons ainsi multiplets de jauge ou vectoriels. Nous avons vu que le théorème de Haag-Lopuszariski-Sohnius impose que le générateur de supersymétrie soit fermionique, et de spin  $\frac{1}{2}$ . Pour construire un supermultiplet contenant un champ de vecteurs, il est donc plus simple de considérer des superpartenaires fermioniques de spin

### 10.3.3.1 Invariance de jauge

Dès qu'une théorie contient des champs de jauge qui sont dans la représentation adjointe d'un groupe d'invariance, pour être rendue supersymétrique elle doit contenir un ensemble de bi-spineurs  $X_a$  [à ne pas confondre avec les éléments de la représentation satisfaisant (2.119) du chapitre 2, que nous dénoterons ici par  $T^a$ ] - nous aurons donc  $[T^0, T^6] = i\tau^{ab} T^c$ , et la représentation satisfaites (2.121), soit les éléments des matrices  $T^{a\text{ sont}} = i\tau^{ab} T^c$ .

Grâce à cette représentation, la dérivée covariante de ces fermions est

$$(D_M A)^a = (A_M - igT^b{}_c J^b{}_c X^a = d^a{}_X + g\tau^{ab}{}_c C^b{}_c \wedge X^c,$$

et l'invariance de jauge nécessite donc que le lagrangien soit invariant sous les transformations

$$\delta \text{Gau } G^a_{\dots} = C_{a;l} \dots \wedge da_a + F^{bc}{}_a a_b C_{cl},$$

$$[X_a \rightarrow X'_a = X_a + \tau^{6c}{}_Q \hat{A}_c.$$

En procédant de manière analogue au cas chirale, nous concluons que la transformation supersymétrique du champ de jauge doit être

$$\delta C^a = t_C \wedge X_a - X_a \hat{A}^a, \quad (10.120)$$

où nous avons choisi la représentation telle que  $Q_a C^a = 0$ .

### 10.3.3.2 Terme D

De même qu'il fallait associer un bi-spineur à un champ scalaire complexe à deux composantes, pour un champ de jauge  $C$ , qui comporte 4 composantes ( $z=0, \bullet, \blacksquare, 3$ ), deux bi-spineurs sont, en général, requis. Comme pour le multiplet chirale, les composantes bi-spinorelles sont complexes, de sorte qu'il y a autant de degrés de liberté supplémentaires des spineurs : maintenant, nous avons besoin de plusieurs champs auxiliaires que nous dénotons par  $D_a$ .

Nous constatons alors que les lois de transformation nécessaires pour rendre la théorie supersymétrique sont

$$+ K^D a + \langle 5_f \rangle_a = \zeta \hat{A}^D \wedge X_a + \quad (10.121)$$

avec  $F_{atv} = d^a{}_C \wedge - d^a{}_C \wedge C_{bf} + gT^{bc}{}_a C_{bf} \cdot C_c$ .

Le modèle qui implémente cette symétrie peut maintenant s'écrire :

$$\text{Hector} = \int \left[ -Fa^j \cdot vF^{\wedge 1} - Xa \hat{A}^D \wedge Xa + -D_a D_a \right]. \quad (10.122)$$

### 10.3.3.3 D terme du potentiel

Une théorie complète contient des multiplets chiraux et vectoriels. Cela signifie que les termes cinétiques dans (10.115) doivent prendre en compte l'invariance de jauge, qui est obtenue en remplaçant la dérivée partielle par des dérivées covariantes  $\mathcal{D}_M$ , à la fois pour les champs scalaires et leurs partenaires. Ceci induit deux conséquences dans la loi de transformation (10.113) du terme  $F$  : la première est que la dérivée partielle doit être remplacée par une dérivée

covariante, mais de plus, l'interaction entre  $cp$  et  $C_{afi}$  introduit un terme supplémentaire. Nous trouvons

$$\hat{O}_C F = iV2D^a + 2igT^a cKX_a, \quad (10.123)$$

ainsi que de nouveaux termes d'interaction, à savoir

$$\mathcal{L}_{int} = V2gt [\wedge^T{}^a p) X_a - X_a \zeta [T^a \wedge] + g D_a. \quad (10.124)$$

Comme on le voit dans (10.124), nous trouvons une nouvelle composante pour le potentiel d'auto-couplage du champ scalaire, qui s'écrit finalement sous la forme

$$V(\phi_i) = \sum_i |F_i|^2 + \frac{1}{2} \sum_a |D_a|^2 = \sum_i \left| \frac{\partial W}{\partial \phi_i} \right|^2 + \frac{g^2}{2} \sum_a (\phi^* T^a \phi)^2, \quad (10.125)$$

où, dans la dernière égalité, le terme  $D$  a été remplacé par sa valeur en fonction du champ scalaire utilisant son équation de mouvement, soit  $D^a = -g \langle j T^a \rangle$ . Le potentiel effectif est donc la somme de deux termes, apparaissant pour les deux secteurs chirale et vectoriel de la théorie supersymétrique. Nous les appelons respectivement termes  $F$  et  $D$  du potentiel.

### 10.3.4 Rupture de supersymétrie

Dans le cadre de la supersymétrie, les particules du modèle standard décrit au chapitre 1 sont supposées appartenir à des supermultiples chiraux pour les quarks et leptons, et à des supermultiples vectoriels pour les champs de jauge. Cela signifie que si la supersymétrie est réalisée dans la Nature, nous devons nécessairement avoir des champs scalaires de même masse que les quarks ou leptons, appelés *squarks* et *sommeils*. De même, nous devrions voir des superpartenaires fermioniques des champs de jauge, les *gauginos*. Toutes ces particules ne sont évidemment pas

HPD

'Cf.CA

observée, ce qui ne veut pas dire que la supersymétrie n'est pas réalisée, mais simplement que si elle l'est, elle doit être brisée.

Il est intéressant de noter que le potentiel scalaire issu de la théorie supersymétrique est une fonction définie positive. Comme le montre (10.107), le vide est supersymétrique tant que l'hamiltonien a une valeur nulle dans cet état pour respecter la supersymétrie, le potentiel lui-même devrait disparaître, et donc les deux termes,  $F$  et  $D$ , devraient être positifs séparément. Cela conduit à deux manières de briser la supersymétrie.

#### 10.3.4.1 Conditions de rupture douces de SUSY

La manière la plus simple de briser la supersymétrie revient à introduire explicitement des termes qui ne la satisfont pas. Ces termes, tant qu'ils apparaissent à des échelles de basse énergie, permettent de conserver les propriétés utiles de la théorie, notamment la résolution du problème de hiérarchie sans recourir à un réglage fin des paramètres à chaque ordre en perturbation, et sont appelé les termes de rupture douce SUSY. Ce sont les suivants :

$$\mathcal{L}_{doux} = \quad \quad \quad + \text{hc}, \quad (10.126)$$

c'est-à-dire des masses spécifiques pour les gauginos et les scalaires, ainsi que des couplages bilinéaires et trinéaires pour les champs scalaires. Bien qu'apparemment arbitraires, ces termes peuvent naturellement apparaître dans des théories plus étendues telles que la supergravité et les supercordes [34].

#### 10.3.4.2 Rompre par un terme $F$

La première façon de mettre en œuvre efficacement la brisure de supersymétrie revient à réaliser une brisure spontanée, de type modèle de Higgs. Pour un multiplet chirale, la seule solution est d'avoir  $\langle 0|F|0 \rangle = 0$ .

Le potentiel peut avoir plusieurs minima, et pour que la supersymétrie soit effectivement brisée, il faut qu'aucun d'entre eux ne soit supersymétrique. Pour que le vide soit supersymétrique, il faut  $V = 0$ , et cela définit le minimum absolu de l'énergie, qui est définie positive. Cela restreint considérablement les superpotentiels possibles permettant une rupture de supersymétrie : par exemple, s'il y a des termes non linéaires dans les champs, alors (10.119) sont homogènes, et admettent toujours la solution  $\{F_z = 0, V_i\}$ . On est alors assuré que cette configuration est bien le minimum absolu de la théorie.

Le superpotentiel (10.116) peut être généralisé à plusieurs champs avec des termes linéaires. Cela donne

$$W = \sum_{j \in \mathcal{I}} W_j + \sum_{i,j,k} c_{ijk} \phi_i \phi_j \phi_k \quad (10.127)$$

conduisant à un potentiel renormalisable.

Un modèle basé sur le superpotentiel (10.127) a été proposé par O'Raifeartaigh [35], comportant trois superchamps chiraux  $\Phi_1, \Phi_2$  et  $\Phi_3$  dont la dynamique est régie par

$$W(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) = c_1 \Phi_1^2 + c_2 \Phi_1 \Phi_2 + c_3 \Phi_1 \Phi_2 \Phi_3 \quad (10.128)$$

dont les  $F$  termes sont respectivement  $F^* = -\frac{1}{2} \partial^2 W / \partial \Phi^2$  et  $F_1 = -\frac{1}{2} \partial^2 W / \partial \Phi_1^2$ ,  $F_2 = -\frac{1}{2} \partial^2 W / \partial \Phi_2^2$  et  $F_3 = -\frac{1}{2} \partial^2 W / \partial \Phi_3^2$ . Il est clair qu'annuler simultanément  $F$  et  $F_3$  est impossible puisque le premier nécessite  $\Phi_2 = T$  et le second  $\Phi_1 = 0$ . Par conséquent, le terme global  $F$  ne s'annule pas, de sorte que la supersymétrie est spontanément brisée.

Le potentiel que nous obtenons de (10.128) est

$$V = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial \Phi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial \Phi_1} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial \Phi_2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial \Phi_3} \right)^2 \quad (10.129)$$

dont le minimum absolu, si  $c_1 > m$ , est à  $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ . Ce minimum est atteint indépendamment de la valeur de  $c_3$  : le potentiel est dit avoir une direction plate pour  $c_3 \neq 0$ . On constate alors que le potentiel prend la valeur constante  $V = \frac{1}{2} c_1^2$ .

La rupture de supersymétrie apparaît encore plus clairement lors de l'étude du spectre de masse des particules de ces modèles, ce qui découle de l'expression complète du Lagrangien dans laquelle on écrit que les champs scalaires prennent leur valeur attendue. On constate que  $\chi_i$ , le fermion associé à  $\Phi_i$ , lui-même dans la direction fiat, est sans masse : c'est un boson de Goldstone, similaire au boson du même nom dans les modèles de brisure de symétrie. En choisissant  $\langle \Phi \rangle = 0$  par souci de simplicité (mais c'est un choix physique, puisque les masses des fermions dépendent effectivement de ce choix), alors on trouve que les spineurs  $\chi_1$  et  $\chi_3$  sont tous deux de masse  $m$ .

Quant aux masses des particules scalaires, il suffit de remplacer les champs  $\phi$  par leurs valeurs attendues (ici zéro pour tous les champs) et de regarder le potentiel de perturbations qui en résulte autour de ces valeurs attendues. On trouve que  $\chi_2$  est sans masse, et que  $\chi_3$ , comme son partenaire  $\chi_1$ , est de masse  $m$  : la théorie reste supersymétrique du point de vue de ces champs. D'un autre côté, étendre  $\phi$  dans des parties réelles et imaginaires comme

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (r + i\theta) \quad \text{avec } r, \theta \in \mathbb{R} \quad \text{et } \phi = 0 \quad \text{si } r = 0$$

on trouve un terme quadratique

$$V_{(2)} = \frac{1}{2} (m^2 - 2\alpha^2 \eta^2) \phi_{\mathbb{R}}^2 + \frac{1}{2} (m^2 + 2\alpha^2 \eta^2) \phi_{\mathbb{S}}^2 - \frac{1}{2} (m_{\mathbb{R}}^2 \phi_{\mathbb{R}}^2 + m_{\mathbb{S}}^2 \phi_{\mathbb{S}}^2),$$

de sorte que les masses des parties réelles et imaginaires du scalaire  $\zeta$ S sont différentes, et différentes de celle du fermion  $\psi$  associé : la supersymétrie est effectivement brisée. On arrive à la même conclusion quelle que soit la valeur choisie pour  $\langle \zeta \rangle$ . De plus, on peut remarquer un phénomène plus général, à savoir qu'il y a une rupture apparente pour le multiplet  $\mathbb{S}_2$  qui, dans le superpotentiel, s'avère couplé à  $\mathbb{S}_1$ , c'est à dire celui contenant le boson de Goldstone.

#### 10.3.4.3 Briser par un $\mathbf{D}$ terni

Il existe une autre manière [36] de briser la supersymétrie, qui revient à observer que la variation du terme  $D$ , donnée par (10.121), se réduit à a. dérivative totale tant que le groupe d'invariance est  $U(1)$  : dans ce cas, les termes supplémentaires dans les dérivatives covariantes changent de signe pour  $A$  et  $A^\dagger$  puisque l'un est la charge conjuguée de l'autre, et on obtient alors  $\delta \cdot D = (f \wedge (d \wedge X + X \hat{a} \wedge \zeta))$ . Remarquons que pour une symétrie non-abélienne, les signes générateurs sont interchangés puisque  $A^\dagger$  et  $A$  sont dans la même représentation de groupe, et la variation supersymétrique de  $D^a$  donne un non -terme dérivé, proportionnel aux constantes de structure du groupe.

Dans le cas d'une invariance  $U(1)$ , il est maintenant clair que l'on peut ajouter un terme proportionnel à  $D$  dans le Lagrangien, appelé terme de Fayet-Iliopoulos

$$= \kappa D, \quad (10.130)$$

de sorte que la partie ' $D$ ' du Lagrangien total est

$$= \kappa D^2 + \kappa D + g \wedge (\sum_{je} |Q_j|^2) B, \quad (10.131)$$

où les  $q_i$  sont les charges des champs scalaires  $\phi_i$ , sous le  $U(1)$  en question. On obtient ainsi, en variant par rapport à  $D$ ,

$$D = - \left[ \kappa + g \sum_i (q_i |\phi_i|^2) \right]$$

giving a  $D$  term to the potential

$$V_D = -\mathcal{L}_D = \frac{1}{2} D^2 = \frac{1}{2} \left[ \kappa + g \sum_i (q_i |\phi_i|^2) \right]^2, \quad (10.132)$$

de sorte que si la symétrie n'est pas rompue, c'est à dire si  $f = 0$ ,  $V \neq 0$ , on trouve alors  $D = -\kappa$ , et le potentiel total (10.125) est  $V = \pm \kappa^2 > 0$ , indiquant que la supersymétrie est bien rompue.

L'avantage de cette méthode est qu'elle offre la possibilité de casser SUSY avec un seul multiplet chiral, contrairement au terme  $F$ . La rupture de supersymétrie se vérifie facilement en étudiant ce cas précis, avec un seul multiplet chiral de charge  $q$  : si  $gq\eta > 0$ , il faut avoir  $\langle \phi \rangle \neq 0$  pour minimiser le potentiel, et on trouve un terme de masse pour  $\psi$  avec  $m_\psi = gq\eta$  alors que, en même temps, on remarque que le fermion reste sans masse.

L'inconvénient est qu'il nécessite une symétrie sous les transformations d'un groupe  $U(1)$  et, pour des raisons phénoménologiques, il s'avère qu'on ne peut pas utiliser celle du modèle standard  $U(1)_Y$ .

### 10.3.5 Le modèle standard supersymétrique minimal (MSSM)

Puisqu'aucune paire de particules du modèle standard ne peut être utilisée pour former un

supermultiplet, si l'on veut créer une version supersymétrique de ce modèle, il est nécessaire de dupliquer toutes les particules connues. Cela conduit à un modèle, déjà introduit par Fayet en 1976 [37], appelé modèle standard supersymétrique minimal (MSSM), contenant un grand nombre de particules. Ce modèle est décrit en détail dans les réf. [38,39], et nous esquissons ici ses principales caractéristiques.

#### *10.3.5.1 Multiplets chiraux*

Chaque quark et lepton apparaît sous la forme d'un fermion gauche ou droit, le formalisme décrit jusqu'à présent est particulièrement bien adapté puisqu'il suffit d'écrire le fermion droit

spineurs sous forme de spineurs gauches [voir (10.102)]. On place ensuite tous ces fermions dans des multiplets chiraux. Les partenaires leptons sont appelés *sieptons*, les quarks *squarks*, et les Higgs *Higgsinos* : la nomenclature générale consiste à construire le nom des bosons associés aux fermions du modèle standard en ajoutant un 's' (pour 'scalaire') avant le nom de la particule, alors qu'au partenaire d'un boson est attribué le nom auquel on ajoute le suffixe 'ino'. Ces noms, ainsi que les notations habituelles, sont résumés dans le tableau 10.1.

Tableau 10.1 Supermultiplets chiraux dans le modèle standard supersymétrique minimal.

| Noms des particules             | spin 0                              | spin 1/2                           |           |
|---------------------------------|-------------------------------------|------------------------------------|-----------|
| Squarks, quarks (x3 familles)   | $\bar{Q}$<br>$\bar{t}$<br>$\bar{d}$ | $(UL \ d_L)$<br>$U^* R$<br>$d^* R$ | je suis 4 |
| sieptons, leptons (x3 familles) | $L$<br>$e$                          | $\bar{\nu}_R$                      | 4         |
| Higgs, higgsinos                | $H_{u,d}$<br>$H_D$                  | $(H^+)$<br>$(\bar{S}^+)$           |           |

La phénoménologie des particules que nous connaissons, et notamment le fait. qu'une masse soit donnée aux quarks de type 'u', impose qu'aucun dormeur ne puisse jouer le rôle du boson de Higgs. Il faut donc inclure au modèle un multiplet  $H_u$  contenant le  $H_{Higgs}$ . Dans ce même multiplet, on retrouve un champ scalaire chargé électriquement. Le fermion  $H_u$  associé doit donc être un fermion de Dirac puisqu'un fermion de Majorana ne conserve pas la charge électrique. Il convient alors d'introduire un deuxième bi-spineur  $H_d$ , différent du premier et formant avec lui un quadrispineur de Dirac. Ce deuxième Higgsino nécessite alors l'existence d'un deuxième Higgs : le MSSM possède un champ de Higgs supplémentaire.

Le superpotentiel que nous considérons est alors

$$W_{SM} = (y_e H^c e + y_d H^c d + y_u H^c u + \dots), \tag{10.133}$$

pour chaque génération, c'est à dire qu'il doit y avoir trois superpotentiels de ce genre pour reproduire toutes les particules que nous connaissons. Les couplages de Yukawa  $y_e, y_u$  et  $y_d$  peuvent également être vus comme des matrices dans l'espace des générations. La constante  $y$  est nécessaire pour garantir que tous les bosons de Higgs sont massifs.

Dans ce cadre, le mécanisme de Higgs du chapitre 2 est implémenté grâce aux deux champs de Higgs. Nous trouvons

$$W \qquad \qquad \qquad \text{et } (H^c)^j = Q^j J, \tag{10.134}$$

et on récupère la valeur attendue du vide  $\langle H^c \rangle$  de (2.162) en écrivant  $\langle H^c \rangle^2 = v^2$  On définit ensuite un paramètre (3) donnant le rapport des valeurs attendues

$$\tan \beta \equiv \frac{v_u}{v_d},$$

$$\tag{10.135}$$



Les contraintes obtenues sur les candidats supersymétriques à la matière noire sont souvent exprimées en termes de ce paramètre.

Cette partie du MSSM est complétée par des termes de rupture douce, notamment les masses  $m_u$  et  $n_i$  ; pour les multiplets de Higgs.

### 10.3.5.2 *Charginos et neutralinos*

Les deux fermions chargés associés au champ de Higgs, les deux higgsinos, appartiennent à la catégorie plus générale des « charginos ». Les autres particules de cette classe sont associées aux bosons de jauge chargés  $W^{z\pm}$ , ils sont notés  $H^{z\pm}$  et sont appelés « gauginos chargés ».

Les deux autres bosons de jauge du modèle standard du chapitre 2 sont neutres, et leurs superpartenaires sont appelés « neutralinos ». Cette catégorie est complétée par les deux higgsinos neutres, qui sont aussi des fermions. Il est courant dans le contexte du modèle MSSM de dénoter par les champs de jauge de  $SU(2)_L$  [ $B^\wedge$  dans (2.154)], et par  $B_p$  celui de  $U(1)_Y$  dans (2.154)]. Pour cette raison, les partenaires sont appelés respectivement « winos » et « binos ». Enfin, à partir des états définis par (2.158) et (2.159), on peut aussi définir le photon  $\gamma$  et le zino  $Z$ , partenaires respectivement du photon et du  $Z^0$ , avec par exemple :

$$\gamma = W^3 \sin \theta_w + B \cos \theta_w,$$

mais cette nomenclature est peu utilisée : dans les régions à énergies intéressantes du point de vue de la supersymétrie, ces dernières peuvent être brisées ou non, alors que l'invariance de jauge, par contre, n'est pas brisée de sorte qu'il s'agit en réalité des états propres de jauge. , c'est à dire  $W$  et  $B$ , qui sont utiles

**Tableau 10.2** Supermultiples vectoriels dans le modèle standard supersymétrique minimal.

Les noms des particules tournent | tournent 1

|                 |       |             |
|-----------------|-------|-------------|
| gluino, gluon   | 9     | 9           |
| winos, bosons W | $W^0$ | $W^\pm W^0$ |
| bino, boson B   | $B^0$ | $B^0$       |
| photon, photon  |       | oui         |

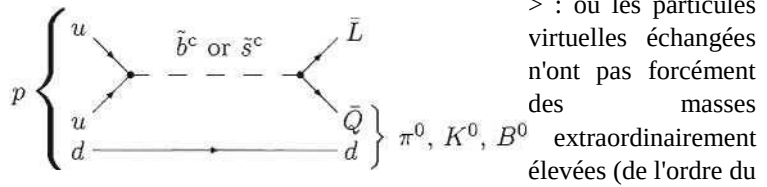
### 10.3.5.3 *Désintégration du proton et parité R*

Le superpotentiel (10.133) n'est pas le seul que nous pouvons intégrer dans le MSSM qui satisfait toutes les symétries. En particulier, nous pouvons imaginer des termes qui violent explicitement la conservation des nombres de leptons et de baryons, qui apparaissent par accident dans le modèle standard. Un tel terme est donné par

$$W_{\text{,}} = X^\wedge LiLjel + XfijkLiQjdl + X^\wedge u^\wedge d^\wedge + p^{-2} L_z H_u, \quad (10.136)$$

et conduit à de nouvelles interactions très contraintes par les expérimentations.

En combinant ces interactions, nous constatons que le canal de désintégration suivant pour le proton est possible :



TeV donc la cassure SUSY permet l'unification de la Fig. 10.5). En prenant en compte ce type de diagramme, la durée de vie des protons est considérablement plus courte que les limites actuelles, de plusieurs ordres de grandeur, et ces interactions devraient donc être supprimées.

Une bonne justification [37] pour interdire les termes (10.136) du superpotentiel MSSM est de postuler l'existence d'une symétrie discrète indiquant si une particule est une particule initialement dans le modèle standard ou si elle est un partenaire. En écrivant

$$R = (-1)^{3B+L+2s}, \quad (10.137)$$

où  $B$  est le nombre baryonique (pour chaque quark, zéro pour les leptons et photons),  $L$  le nombre leptonique ( $-1$  pour l'électron, zéro pour les quarks et photon) et  $s$  le spin ( $1/2$  pour les fermions, zéro pour les scalaires, et  $1$  pour les champs de jauge), alors on trouve que toutes les particules du modèle standard ont  $R = +1$ , ce qui implique que puisque le spin est modifié par cela les partenaires ont tous  $R = -1$ . En conséquence, c'est un  $Z_2$  symétrie que nous devrions imposer.

#### 10.3.5.4 Le partenaire supersymétrique le plus léger (LSP)

La parité  $R$  a plusieurs conséquences, notamment en cosmologie, où nous avons vu, au chapitre 11, qu'une telle invariance discrète et ininterrompue entre les particules implique l'existence de cordes cosmiques dans l'Univers.

Une autre conséquence est l'existence d'une particule stable de grande masse, qui est la particule supersymétrique la plus légère : puisque nous imposons qu'aucune transition ne puisse violer la parité  $R$ , toutes les particules supersymétriques peuvent à la fin se désintégrer en la plus légère, mais celle-ci est stable. Cette particule, appelée 'LSP', est une candidate très sérieuse pour la matière noire, voir §. 7.2.5.2 du chapitre 7. Dans sa version minimale, le modèle de supersymétrie le plus général possède 124 paramètres libres, de sorte que l'on ne connaît pas les valeurs de masse de toutes les superparticules, et par conséquent, l'identité du LSP n'est pas une déterminé a priori.

#### 10.3.6 Supergravité

Jusqu'à présent, nous n'avons considéré que les théories invariantes sous transformations globales de supersymétrie, c'est-à-dire celles pour lesquelles le paramètre  $\epsilon$  de la transformation ne dépend pas de la position. De plus, nous avons également explicitement exigé que ces théories soient renormalisables, ce qui contraint considérablement la forme du superpotentiel, mais supprime également certains termes qui seraient autrement possibles, comme le potentiel de Kähler discuté ci-dessous.

### 10.3.6.1 *Le gravitino*

Lorsqu'il est nécessaire de mesurer la supersymétrie, c'est-à-dire que la transformation se fait désormais via un spineur  $C(z)$  dépendant de l'espace-temps, de nombreux résultats précédents sont modifiés. Nous avons vu qu'à partir de (10.105), deux transformations SUSY étaient essentiellement équivalentes à une traduction. Si l'on exige l'invariance sous des transformations supersymétriques locales, on inclut alors nécessairement des traductions différentes en chaque point de l'espace-temps : ce sont des transformations générales, des isomorphismes de l'espace-temps lui-même. En conséquence, l'invariance que nous décrivons est celle de la relativité générale, qui s'inscrit donc naturellement dans le cadre de la physique des particules. C'est pourquoi la supersymétrie locale est appelée *supergravité*, souvent désignée par SUGRA [40].

Une autre façon de voir ce point est que, dans la limite où la masse de Planck tend vers l'infini, la supergravité devient SUSY globale. Jusqu'à présent, nous n'avons étudié que des modèles renormalisables, mais comme la supergravité n'est déjà pas renormalisable, il est possible de considérer des modèles supersymétriques qui ne sont pas non plus renormalisables, où l'on comprend que toutes ces théories sont vues comme des approximations à basse énergie, notamment pour théorie des supercordes.

Dès lors que l'on admet les transformations supersymétriques jaugées, dont les termes proportionnels apparaîtront nécessairement dans les transformations des termes cinétiques, doit alors être éliminé. Cela ne peut se faire qu'en introduisant un champ, équivalent aux bosons de jauge, avec non seulement un indice de spinor pour compenser celui de  $G$  mais aussi un indice vectoriel pour  $il..$  : on attend un objet  $T^\Lambda$ , dont la loi de transformation est  $\delta T^\Lambda = \frac{1}{2} \epsilon^\Lambda G$  : Dans ce cas, il s'agit d'une particule de spin que l'on appelle le *gravitino*, dont le terme cinétique est décrit par l'action de Rarita-Schwinger (voir Section 7.2.5.2 du Chapitre 7)

$$\mathcal{L}_{SRS} = - \quad (10,138)$$

Il s'avère que ce gravitino doit être placé dans un supermultiplet contenant une particule de spin 2, le graviton.

Malgré ce que l'on pourrait naïvement penser, les corrections de supergravité ne sont pas toujours négligeables, même lorsqu'on considère la physique des basses énergies. Par exemple, dans les théories où la supersymétrie est brisée avec un terme  $F$ , l'échelle à laquelle cela se produit peut être de l'ordre de  $\sim 10^{-11}$  GeV, de sorte que certaines particules obtiennent des masses bien inférieures à cette échelle, les particules du modèle standard et leurs superpartenaires, mais aussi d'autres particules, issues du secteur de supergravité, obtiennent des masses de l'ordre de  $M_{Pl}$ , de sorte que les corrections SUGRA sont à prendre en compte. De même, dans d'autres situations et notamment en cosmologie, certains champs scalaires prennent des valeurs attendues de l'ordre de la masse de Planck ; là encore, on ne peut négliger les corrections de la supergravité.

### 10.3.6.2 *Potentiel Kähler*

Contrairement au cas de la supersymétrie globale, il n'est pas nécessaire d'exiger que le lagrangien SUGRA soit renormalisable puisque la théorie contient la gravité et n'est donc pas renormalisable (en quatre dimensions). Notez au passage qu'en conséquence, nous pouvons également écarter cette contrainte pour les théories SUSY globales. On obtient alors tous les termes possibles pour une supersymétrie globale compatible avec la supergravité. Ces termes

représentent ce que nous appelons des corrections de supergravité.

Le lagrangien le plus général dans ce cadre pour un multiplet chiral  $\Phi$  contient alors

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^i \partial^\mu \phi^i - V(\phi^i) \quad (10.139)$$

et le *potentiel de Kähler*  $K$  est une fonction arbitraire des champs scalaires  $\phi^i$  et de leur conjugué  $\phi^{i\dagger}$ . Cette fonction, qui équivaut à une métrique sur l'espace des champs scalaires, doit être sans dimension. Notons par ailleurs qu'on peut ajouter une matrice de couplage de jauge,  $f_a b$  (47), dont les éléments dépendent des superchamps chiraux  $\Phi$  qui sert de métrique, au même titre que le couplage de Kähler, pour les termes cinétiques des champs de jauge (les indices  $a, b$  sont des indices du groupe jauge). De manière générale, et en particulier dans ce qui suit, on pose  $f_{ab} = \partial_{ab}$ . En fait, si cette fonction est non triviale, alors les constantes de couplage doivent varier avec le temps en cosmologie [3],

Une fois que nous avons le potentiel de Kähler, nous trouvons le potentiel scalaire à travers la relation [31,39]

$$V = \frac{e^K}{\kappa^2} \left[ K^i (K^{-1})^{\bar{j}}_{\bar{i}} K_{\bar{j}} - 3 \right], \quad (10.140)$$

où  $A^i$  dans l'inverse de  $K^{\bar{j}}_{\bar{i}}$ , soit  $(K^{-1})^{\bar{j}}_{\bar{i}} = \delta^{\bar{j}}_{\bar{i}}$ . Le coefficient  $\kappa = 8\pi G/M^2 = 8\pi G_N$  est justifié pour rendre  $K$  sans dimension, sachant qu'en supergravité, la seule échelle d'énergie à notre disposition est la masse de Planck.

### 10.3.6.3 $N = 1$ supergravité minimale

Pour conclure ces extensions du modèle standard, voici le cas particulier de la supergravité minimale dite TV = 1 qui illustre le calcul du potentiel scalaire dans un cas précis. Dans ce cas, nous avons

$$(10.141)$$

où  $W$  est le superpotentiel. Avec ce potentiel de Kähler, on trouve

$$\frac{1}{\kappa^2} \partial_\mu \phi^i \partial^\mu \phi^i = 1 \quad dW^*$$

et

de sorte que l'application de (10.140) conduit à

$$\frac{dW}{dt} = 0 \quad (10.142)$$

et on retrouve la relation habituelle  $V = \langle 9H^2 \rangle^2$  dans la limite  $M_P \rightarrow \infty$ , soit  $\kappa \rightarrow 0$ .

#### 10-3.6.4 Potentiel sans échelle

Les modèles de supergravité ont, en général, un secteur caché, défini comme l'ensemble des champs de la théorie qui ne se couplent à la matière ordinaire (quarks, leptons, etc.) que par interaction gravitationnelle. Le gravitino appartient notamment à ce secteur. Comme vu précédemment, la masse caractéristique de la rupture de supersymétrie ne devrait pas être trop différente de 1 TeV pour être conforme aux théories de grande unification. Dans les modèles de supergravité, cela n'est pas très naturel puisque le seul paramètre à dimension de masse présent dans ces théories est la masse de Planck.

Une possibilité intéressante est de recourir à un potentiel fiat, indépendant des domaines (ce qui en plus est intéressant en termes de cosmologie puisqu'il pourrait permettre une solution naturelle de slow-roll). C'est par exemple le cas des potentiels de Kähler dits de *supergravité sans échelle*, dont l'exemple le plus simple est

$$K_{ns} = -31n(\ddot{y} + \text{constante}), \quad (10,143)$$

donnant un potentiel de disparition identique (10.140).

De cette manière, on peut raisonnablement penser que les masses des particules associées à ces champs seront produites par des corrections radiatives induites par le couplage avec des particules de valeurs d'espérance non nulles, de l'ordre de la masse de Planck. Ces corrections sont, en général, logarithmiques dans ces VEV, de sorte que la masse résultante peut être naturellement réduite de façon exponentielle. D'autres exemples sont discutés dans la réf. [31].

Les extensions théoriques abordées dans ce chapitre sont constamment utilisées en cosmologie, pour plusieurs raisons. Premièrement, la construction de notre modèle cosmologique doit s'appuyer sur les théories physiques les plus réalistes et doit donc inclure tous leurs développements. Par exemple, puisque la supersymétrie est considérée comme nécessaire pour construire une théorie cohérente, on s'attend à ce que des modèles supersymétriques grand unifiés soient utilisés pour décrire les premiers moments de l'Univers. De plus, et c'est probablement l'aspect qui nous intéresse le plus ici, toutes ces extensions conduisent à des conséquences cosmologiques qui peuvent être testées par observation. Il peut s'agir par exemple de l'existence de défauts topologiques tels que ceux décrits au chapitre 11, ou de la possibilité de mettre en œuvre une phase d'inflation sans avoir besoin d'ajouter des champs scalaires *ad hoc supplémentaires* (voir chapitre 12). Il s'ensuit que les observations cosmologiques peuvent nous aider à contraindre ces extensions et éventuellement à en exclure certaines. Enfin, ces extensions théoriques sont au cœur de la théorie des cordes, brièvement évoquée au chapitre 13 et dont les seules conséquences éventuelles observables se situent, en l'état actuel des connaissances, dans le domaine de la cosmologie.



# Les références

- [1] P. JORDAN, « Formation des étoiles et développement de l'Univers », *Nature* **164**, 637, 1949 ; M. FIERZ, *Helv. Phys.* **29**, 128, 1956 ; P. JORDAN, 'Zum gegenwärtigen Stand der Diracschen kosmologischen Hypothesen', *Z. Phys.* **157**, 112, 1959 ; C. BRANS et R. DICKE, « Le principe de Mach et une théorie relativiste de la gravitation », *Phys. Rév.* **124**, 925, 1961.
- [2] T. DAMOUR et G. ESPOSITO-FARESE, « Théories tensorielles-multiscalaires de la gravitation », *Classe. Quant. Grav.* **9**, 2093, 1992.
- [3] J.-P. UZAN, « La constante fondamentale et leur variation : statut observationnel et théorique », *Rev. Mod. Phys.* **75**, 403, 2002.
- [4] C. WILL, *Théorie et expériences en physique gravitationnelle*, Cambridge University Press, 1993.
- [5] G. ESPOSITO-FARESE et D. POLARSKI, <sup>1</sup> Gravité tenseur scalaire dans un univers en accélération », *Phys. Rév. D* **63**, 063504, 2001.
- [6] G. ESPOSITO-FARESE, 'Tests de pulsar binaire de gravité en champ fort et d'amortissement du rayonnement gravitationnel', Actes de la 10e réunion Marcel Grossmann, World Scientific (2005) 647 [arXiv : gr-qc/0402007].
- [7] BM BARRER, « Théorie générale du tenseur scalaire de la gravité avec G constant », *Astrophys. J.* **219**, 5, 1978.
- [8] C. SCHIMD, J.-P. UZAN et A. RIAZUELO, « Lentille faible dans les théories scalaires-tensorielles de la gravité », *Phys. Rév. D* **71**, 083512, 2005.
- [9] A. RIAZUELO et J.-P. UZAN, 'Observations cosmologiques dans la quintessence scalaire-tensorielle', *Phys. Rév. D* **66**, 023525, 2002.
- [10] T. DAMOUR et K. NORDTVEDT, « La relativité générale comme attracteur cosmologique des théories tensori-scalaires », *Phys. Le révérend Lett.* **70**, 2217, 1993.
- [11] T. DAMOUR et B. PiCHON, 'Nucléosynthèse Big-Bang et gravité tensori-scalaire', *Phys. Rév.D* **59**, 123502, 1999.
- [12] A. Coc, et al., « Contraintes de nucléosynthèse Big-Bang sur les théories tensori-scalaires de la gravité », *Phys. Rév. D* **73**, 083525, 2006.
- [13] J.-P. UZAN, « Solutions de mise à l'échelle cosmologique de champs scalaires non couplés de manière minimale », *Phys. Rév.D* **59**, 123510, 1999.
- [14] M. GASPERINI, F. PIAZZA et G. VENEZIANO, « Quintessence comme dilatateur en fuite », *Phys. Le Rév. D* **65**, 023508 ,
- [15] T. DAMOUR, F. PIAZZA et G. VENEZIANO, « Violations du principe d'équivalence dans un scénario d'emballlement par dilaton », *Phys. Le Rév. D* **66**, 081601 ,
- [16] N. BARTOLO et M. PIETRONI, « Gravité et quintessence scalaire-tensor », *Phys. Le Rév. D* **61**, 023518 ,
- [17] D. WANDS, « Théories de la gravité étendue et action d'Einstein-Hilbert », *Classe. Quant. Grav.* **5**, 269, 1994.



- [18] G. MANGANO et M. SOKOLOWSKI, 'Équivalence physique entre les théories gravitationnelles non linéaires et un champ scalaire auto-gravitant général', *Phys. Rév. D* **50**, 5039, 1994.
- [19] T. JACOBSON, 'Introduction aux champs quantiques dans l'espace-temps courbe et à l'effet Hawking', [gr-qc/0308048].
- [20] ND BIRRELL et PC DAVIES, *Champs quantiques dans un espace courbe*, Cambridge University Press, 1984.
- [21] PR ANDERSON *et al.*, « États d'attracteur et mise à l'échelle infrarouge dans l'espace de Sitter », *Phys. Rév. D* **62**, 124019, 2000 ; F. FINELLI *et al.*, « Régularisation adiabatique du tenseur d'énergie de contrainte du graviton dans l'espace-temps de de Sitter », *Phys. Rév. D* **71**, 023522, 2005 ; LR ABRAMO, R. BRANDENBERGER et VF MUKHANOV, 'Tenseur de momentum d'énergie pour les perturbations cosmologiques', *Phys. Rév.D* **56**, 3248, 1997.
- [22] SW HAWKING, « Explosions de trous noirs ? », *Nature* **248**, 30, 1974.
- [23] TC BUNCH et PCW DAVIES, « Théorie quantique des champs dans l'espace de Sitter – Renormalisation par division de points », *Proc. R. Soc. Londres* **A360**, 117, 1978.
- [24] NN BOGOLIUBOV, « Une nouvelle méthode dans la théorie de la supraconductivité III », *Sov. Phys. JETP* **7**, 51, 1958.
- [25] A. VILENKIN et LH FORD, « Effets gravitationnels sur les transitions de phase cosmologique », *Phys. Rév.D* **26**, 1231, 1982.
- [26] C. BERNARD et A. DUNCAN, « Régularisation et renormalisation de la théorie quantique des champs dans un espace-temps courbe », *Ann. Phys. (NY)* **107**, 201, 1977.
- [27] S. COLEMAN et J. MANDULA, « Toutes les symétries possibles de la matrice S », *Phys. Rév.* **159**, 1251, 1967.
- [28] YA GOLDFANG et EP LIKHTMAN, 'Extension de l'algèbre des générateurs de groupes de Poincaré et violation de l'invariance p', *Sov. Phys. JETP Lett.* **13**, 323, 1971.
- [29] RG HAGG, JT LOPUSZANSKI et MF SOHNIUS, 'Tous les générateurs possibles de supersymétries de la matrice S', *Nucl. Phys. B* **-88**, 257, 1975.
- [30] MA PESKIN et DV SCHROEDER, *Une introduction à la théorie quantique des champs*, Addison-Wesley, 1995.
- [31] D. BAILIN et A. LOVE, *Théorie des champs de jauge supersymétrique et théorie des cordes*, Institute of Physics Publishing, 1996.
- [32] F. COOPER, A. KHARE et U. SUKHATME, « Supersymétrie et mécanique quantique », *Phys. Rep.* **251**, 267, 1995.
- [33] J. WESS et B. ZUMINO, « Un modèle lagrangien invariant sous des transformations de supergauge », *Phys. Lett. B* **49**, 52, 1974 ; « Transformations Supergauge en quatre - dimensions », *Nucl. Phys. B* **70**, 39, 1974.
- [34] A. BRIGNOLE, LE IBANEZ et C. MUNOZ, 'Soft supersymmetry-breaking Terms from supergravity and superstring models', dans 'Perspectives on Supersymmetry', G. Kane (éd.), World Scientific, 1998.
- [35] L. O'RAIFEARTAIGH, « Rupture spontanée de symétrie pour les superchamps scalaires chiraux », *Nucl. Phys. B* **96**, 331, 1975.
- [36] P. FAYET et J. ILIOPOULOS, 'Symétries de supergauge spontanément brisées et spineurs de pierre d'or', *Phys. Lett. B* **-51**, 461, 1974.
- [37] P. FAYET, "Supersymétrie et interactions faibles, électromagnétiques et fortes",

*Phys. Lett. B* **64**, 159, 1976 ; «Théories supersymétriques spontanément brisées des interactions faibles, électromagnétiques et fortes», *Phys. Lett. B* **69**, 489, 1977 ; «Relations entre les masses des superpartenaires des leptons et des quarks, le couplage goldstino et les courants neutres», *Phys. Lett. B* **-84**, 416, 1979.

[38] P. FAYET, 'Théories supersymétriques des particules et interactions', *Phys. Rep.* **105**, 21, 1984.

[39] KA OLIVE, *Supersymétrie*, dans *L'Univers primordial* - Les Houches Session LXXI, Editeurs P. Binétruy et *al.*, EDP Science & Springer, 2000.

[40] P. van NIEUWENHUIZEN, 'Supergravité', *Phys. Rep.* **68**, 189, 1981.

# 11

## Transitions de phase et défauts topologiques

---

D'un point de vue cosmologique, l'une des implications les plus importantes des théories de grande unification est le schéma de rupture de symétrie, c'est-à-dire la manière précise dont les symétries internes des théories de physique des particules évoluent dynamiquement vers les symétries du modèle standard électrofaible. Ces ruptures de symétrie se produisent via des transitions de phase <sup>1</sup> qui conduisent potentiellement à la formation de défauts topologiques, dont les nombreuses conséquences cosmologiques peuvent à leur tour imposer indirectement des contraintes sur la manière dont la grande unification pourrait être mise en œuvre [2],

### 11.1 Transitions de phases

Dans les premières phases de l'Univers, lorsque la densité était très grande, la température aurait pu atteindre, voire dépasser, la grande échelle de l'unification. Si les interactions sont décrites par une théorie unifiée, alors la symétrie n'était pas rompue au départ. Cette symétrie change qualitativement en dessous de la température critique et nous avons donc une *transition de phase*.

Pour comprendre l'influence de la température sur le potentiel du champ de Higgs, il faut calculer le potentiel effectif de ce champ, en tenant compte de ses interactions avec les particules de l'environnement, d'une manière très similaire au calcul du déroulement des constantes de couplage avec énergie. Dans le cas présent, la température joue le rôle de l'énergie de sorte que le potentiel effectif dépend de la température. C'est pourquoi les effets thermiques entrent en jeu dans le contexte de la théorie des champs et de la manière dont ils peuvent être calculés.

Un traitement complet de la théorie quantique des champs à température finie dépasse la portée de ce livre et peut être trouvé dans la réf. [3], par exemple. Toutefois, par souci d'exhaustivité et de cohérence, nous résumons ici les principaux points nécessaires à notre propos.

#### 11.1.1 Théorie du champ thermique

##### 11.1.1.1 Rupture de symétrie et partie classique du champ

Pour calculer les effets des hautes températures, il faut commencer par décrire la physique à température zéro. Pour cela, nous choisissons un modèle dans lequel le champ de Higgs,  $\langle f \rangle$ , est dans une représentation arbitraire du groupe de symétrie  $Q$ . Il a donc une représentation arbitraire

<sup>1</sup> Une discussion détaillée des transitions de phase dans des contextes non cosmologiques, mais où des concepts tels que l'invariance d'échelle sont pris en compte, peut être trouvée dans la Réf. [1].

nombre de degrés de liberté et, à température zéro, évolue avec un potentiel d'auto-interaction de la forme

$$V(\phi) = \frac{1}{4} \mu^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \quad (11.1)$$

où  $\langle \phi \rangle^2 = 0$ . L'état de vide de cette théorie devrait être invariant sous toutes conditions transformations possibles du groupe de Poincaré et ne peut donc dépendre d'aucune coordonnée spatio-temporelle. Le vide correspond à un minimum du potentiel, ce qui impose une valeur attendue du vide de champ (VEV)

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \quad \text{avec} \quad \langle \phi \rangle = v, \quad \text{avec} \quad \langle \phi \rangle^2 = \frac{1}{\lambda} \mu^2 \quad (11.2)$$

où  $\mu$  représente une configuration constante fixe. Dans le cas où la théorie est simplement invariante  $Z_2$ , et donc  $P$  GR, il n'y a que deux possibilités, à savoir  $G = \pm 1$ . Pour une invariance  $U(1)$  brisée avec  $e C$ , on obtient  $\langle \phi \rangle = v e^{i\theta}$ , où  $\theta$  GR est une phase arbitraire. La symétrie est en effet rompue puisque la solution du vide n'est plus invariante sous les transformations de  $Q$ .

Soulignons que  $\phi$  est un nombre, ou un ensemble de nombres, et non un opérateur :  $\langle \phi \rangle$  est interprété comme la valeur attendue du champ de Higgs dans le vide 0), soit  $\langle \phi \rangle = W(0)$ . On peut ainsi décomposer le domaine comme

$$\langle \phi \rangle = \langle \phi \rangle_c + \langle \phi \rangle_q, \quad (11-3)$$

où  $\langle \phi \rangle_c = \langle \phi \rangle$  est un nombre, ou une fonction de coordonnées spatio-temporelles, la partie dite « classique », et  $\langle \phi \rangle_q$ , qui est sa partie « quantique », est un opérateur.

#### 11.1.1.2 Potentiel à température finie

Le lagrangien d'une théorie générale contient des bosons scalaires  $\phi_i$ , des bosons vectoriels et des fermions, tous couplés au champ de Higgs comme dans le cas du modèle standard décrit au chapitre 2. Ces couplages contiennent généralement une partie quadratique, conduisant ainsi à ternis interprétables comme termes de masse pour toutes les particules. Ces masses dépendent donc de la partie classique du champ de Higgs  $\langle \phi \rangle_c$ , et on a, en général,

$$\mathcal{L}_{\text{quad}} = -\frac{1}{2} [M^2 \phi^2]_{ab} \phi_a \phi_b - [M_F \bar{\psi} \psi] \quad (11.4)$$

où les matrices de masse  $M_s$ ,  $M_v$  et  $M_F$  sont déterminées par les représentations dans lesquelles sont initialement placées les différentes particules.

Compte tenu de la théorie à température zéro, il est désormais possible d'écrire les corrections thermiques et de déterminer le potentiel effectif à haute température, dans l'approximation dans laquelle toutes les particules du bain thermique sont considérées comme ultra-relativistes. On trouve (voir Réf. [3] pour les détails techniques)

$$K(\phi_c, T) = AV(\phi_c, T),$$

où  $V(\phi_c)$  est donné par l'équation (11-1), et  $\Gamma=0$

$$\Delta V(\phi_c, T) = -\frac{\pi^2 T^4}{90} \left( N_B + \frac{7}{8} N_F \right) + \frac{T^2}{24} [\text{Tr}(M_S^2) + 3\text{Tr}(M_V^2) + 2\text{Tr}(M_F^2)], \quad (11.5)$$

est la correction thermique. Les nombres  $N_D$  et  $N_F$  représentent respectivement les degrés de liberté bosonique et fermionique ( $N_B = 1$  pour un champ scalaire,  $N_B = 2$  pour un boson de jauge sans masse,  $N_B = 3$  pour un boson de jauge massif, et  $N_F = 4$  pour un spinor de Dirac).

### 11.1.2 Dynamique de la rupture de symétrie

#### 11.1.2.1 Exemple du modèle abélien de Higgs

Le mécanisme de rupture de symétrie peut être illustré en considérant le modèle le plus simple de rupture de symétrie, à savoir celui d'une invariance  $U(1)$ , brisée par un champ de Higgs complexe  $\langle j \rangle$

$$\text{rab} \cdot H = - \quad - v \tilde{y}) \quad T=0, \quad (U-6)$$

où la dérivée covariante est  $D^\wedge \langle j \rangle = (d^\wedge + iqB^\wedge) \langle t \rangle$  et  $= d^\wedge B^\wedge, \quad 0/B^\wedge$ . Dans ce modèle simplifié, nous n'introduisons aucun fermion, bien qu'ils puissent être ajoutés sans modifier qualitativement les résultats. En décomposant le corps en <sup>2</sup>, la partie quadratique (11.4) est donnée par où nous avons utilisé  $|\langle y \rangle|^2 = |(O? + \langle ?! \rangle)^2$ . On lit facilement cette relation entre les matrices de masse et leurs traces, à savoir

$$\text{Tr}[Af^2(\langle ?i_c \rangle)] = 2\langle ?^2 | 4 \rangle_c|^2,$$

à partir de laquelle nous obtenons maintenant la dynamique de la transition.

#### 11.1.2.2 Température critique

Ayant obtenu ces résultats, nous déduisons la correction thermique suivante du potentiel effectif du champ scalaire

$$(U-8)$$

où la fonction  $f$  est donnée par

<sup>2</sup> Nous avons choisi ici directement la partie classique comme étant réelle : cela simplifie simplement les calculs tout en laissant inchangés les résultats, puisque la théorie sous-jacente est invariante sous les transformations  $U(1)$  de la phase du champ de Higgs.

$$f(T, \phi_c) = \frac{T_c^2}{11} (1 - 2A - V)$$

This function only depends on temperature (not on  $\phi_c$ ), and so does the minimum  $r$ ), through the relation

$$\Delta^2(r) = \frac{1}{2} \left( \frac{4A + 3}{72} \right)^2$$

ce qui, en fin de compte, n'est pas positif et défini. En fait, elle disparaît lorsque la température diminue jusqu'à sa valeur critique  $T_c$ , donnée par

$$T_c^2 = \frac{24\lambda\eta^2}{4\lambda + 3q^2}. \quad (11.10)$$

Au-dessus de cette température, le potentiel a un minimum global unique pour  $\phi_c = 0$ , alors qu'il est décalé vers un ensemble de valeurs non nulles de  $\phi_c$  pour  $T < T_c$ . La figure 11.1 illustre la dépendance du potentiel en température.

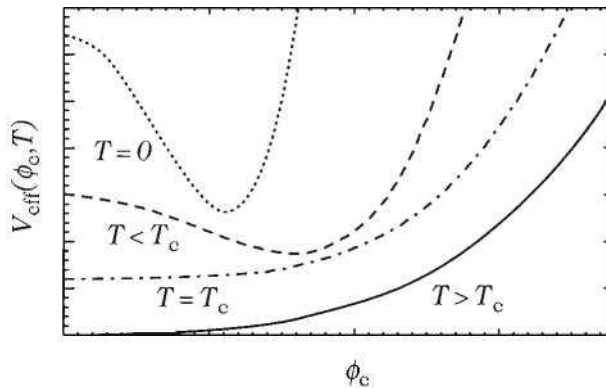


**Fig. 11.1** Variation of the potential  $V_{\text{eff}}(\phi_c, T)$  as a function of the ‘classical’ part of the scalar field  $\phi_c$  for different températures  $T$ . We have only represented a single variable for the scalar field, which is actually one of its components, i.e., the imaginary or real part (or an arbitrary combination of them) in the case of a complex field. At high températures ( $T > T_c$ ), the potential has a unique minimum at the symmetry-restoring point  $\phi_c = 0$  that evolves, as the température decreases, to become a maximum. A minimum eventually develops, and the potential subsequently smoothly transforms into the zero-temperature curve (dotted line). Since the température of the Universe decreases during the expansion, the symmetry naturally breaks down, hence spontaneously producing a phase transition.

### 11.1.2.3 Potentiel efficace

A haute température, c'est à dire pour  $T > T_c$ , le potentiel effectif a un unique minimum localisé à  $\phi_c = 0$  (Fig. 11.1). La symétrie est ainsi intacte tant que la température est suffisamment élevée. Lorsque la température diminue sous l'effet d'un autre mécanisme physique, comme par exemple l'expansion de l'Univers, la forme du potentiel change jusqu'à ce que son minimum

ne soit plus à  $\langle p_c = 0$ . La symétrie est alors spontanément rompue (notons que dans le cadre cosmologique, et en réalité seulement dans ce cas, le terme spontané, suggérant une certaine dynamique, est tout à fait approprié). Il s'agit d'une véritable transition de phase, au sens thermodynamique, puisque le paramètre d'ordre, ici la valeur du champ  $\langle \phi_c$ , ne varie qu'avec la température jusqu'à ce que la température critique soit atteinte. Le potentiel (11-8) est alors minimisé pour  $\langle \phi_c = J_j(T) = r/y/1 - (T/T_c)^2$  tant que  $T < T_c$ .

La forme de ce potentiel, en particulier sa dépendance à la température, peut être comprise en termes de théorie thermique une fois que les fluctuations sont prises en compte. Lorsque la température est basse, le champ doit choisir un des minima possibles, et son énergie n'est pas suffisante pour franchir la barrière de potentiel. Une telle transition n'est permise que par des effets tunnel d'autant plus improbables que la barrière est haute. A haute température, l'interaction du champ avec le bain thermique fournit une énergie supplémentaire, provenant du bain de particules. Si l'énergie est supérieure à une valeur donnée, appelée température de Hagedorn, alors les fluctuations thermiques permettent au champ de franchir la barrière de potentiel. Les probabilités que le champ reste dans cet état ou revienne à son état initial sont alors identiques, il oscille donc entre les deux états sans privilégier celui-ci. Ceci est d'autant plus vrai que la température est élevée puisque le taux de transition augmente avec la température.

A partir de la partie classique du champ, on peut définir une valeur attendue  $\hat{a} = \langle \phi_c(\mathbf{x}, i) \rangle$  moyenné sur des temps ou des échelles spatiales grandes par rapport aux paramètres de microscopie (le temps de transition ou la longueur de corrélation). C'est ce que nous appelons une description « à gros grain » puisque nous prenons la moyenne sur des régions petites mais de taille finie. Le champ  $\phi_c(\mathbf{x}, \mathbf{x})$  oscille entre les deux valeurs de vide à température zéro, de sorte que  $\langle p_c$  doit disparaître. Cela se traduit par un terme de masse supplémentaire dans le potentiel effectif, forçant le champ moyen à avoir une valeur nulle.

#### 11.1.2.4 Autres corrections

Outre la partie quadratique (11.4) du Lagrangien, les corrections thermiques peuvent également conduire à des termes cubiques dans le champ scalaire. Ce terme dépend du contenu en particules de la théorie à température zéro. Nous trouvons

$$A_y(\phi_c, T) = .5T|\phi_c|^3, \quad (11.11)$$

où la constante (3 dépend des constantes de couplage initiales de la théorie. Le potentiel effectif complété, obtenu dans le modèle abélien de Higgs à partir de la somme des corrections (11-8) et (11.11), est représenté sur la Fig. 11.2 pour le deux cas ( $\beta < 0$  et  $\beta > 0$ ). Dans le premier cas,  $\beta < 0$ , la transition de phase est du premier ordre, tandis que pour  $\beta > 0$  elle est du second ordre.<sup>3</sup>

---

<sup>3</sup>Une transition est dite de second ordre lorsqu'elle se produit de manière continue, la phase changeant continuellement jusqu'au point critique. En revanche, une transition de premier ordre se caractérise par le fait que les différentes phases peuvent coexister au niveau critique. indiquer. Selon la classification Ehrenfest, une transition est d'ordre  $n$  si la  $n$ ème dérivée d'un potentiel thermodynamique approprié (souvent l'énergie libre) est discontinue, tandis que toutes les dérivées d'ordre  $p < n$  sont continues au franchissement du point de transition.

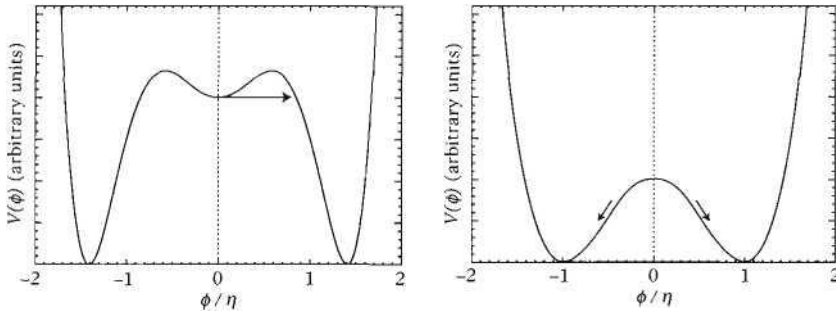


**Fig. 11.2** (left): Potential  $V(\langle f \rangle)$  for a scalar field  $\langle j \rangle$  leading to a symmetry breaking via a first-order phase transition. The phase  $\langle j \rangle = 0$  is metastable, so that the transition must occur via a tunnel effect. The field, which is initially trapped at the central value, in the local minimum, cannot cross over the potential barrier classically, but quantum fluctuations can allow it to cross at once by tunnelling (along the arrow indicated in the graph, for instance). The phase transition occurs through nucléation, (right): Potential  $V(\langle j \rangle)$  for a scalar field  $h$  leading to a symmetry breaking via a second-order phase transition. The phase  $= 0$  is unstable. As soon as the température becomes lower than the critical value, the field must choose a direction to break the symmetry, following one of the two arrows indicated in the graph.

### 11.1.3 Formation de défauts topologiques

Désormais, nous nous concentrerons sur la partie classique,  $\textcircled{R}_c$ , du champ. Pour éviter des notations inutilement lourdes, on le note simplement par  $\langle / \rangle$ , sachant que les champs en question sont désormais classiques.

#### 11.1.3.1 Schéma général de rupture de symétrie

Le mécanisme de rupture de symétrie basé sur un champ scalaire sera toujours présenté dans ce qui suit par un schéma dans lequel l'invariance initiale sous transformations du groupe  $Q$  est réduite, du fait de l'apparition d'une valeur d'espérance de vide non nulle pour le champ de Higgs, dans la représentation  $\langle / \rangle_0$ , à celle du sous-groupe  $\mathcal{H}$ , définissant ainsi la variété à vide  $\mathcal{M}$  comme étant isomorphe au groupe quotient  $G/H$ . (voir la section 2.5.2 du chapitre 2 pour quelques exemples).

$$\mathcal{G} \xrightarrow{\phi_0} \mathcal{H} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{M} \sim G/H \quad (11.12)$$

#### 11.1.3.2 Groupe de quotients

Avant de se concentrer explicitement sur la topologie du vide, rappelons rapidement quelques définitions utiles. Plus de détails peuvent être obtenus dans la Réf. [4].

Commençons par la notion de coensemble d'équivalence d'une relation d'équivalence  $\mathcal{I}$  (définie comme réflexive, symétrique et transitive). Définir la relation d'équivalence  $g \mathcal{I} g'$  entre deux éléments  $g$  et  $g'$  de  $Q$  par

$$g \mathcal{I} g' \quad \text{Jh e Tt ; } g' = gh,$$



le coset d'équivalence  $[g]$  de cette relation est  $[5] = \{gh - h g Tl\}$ . Nous le dénotons également par  $gTl$ , appelé 'coset gauche'. De la même manière, nous pouvons définir un « coset droit »  $Tlg$ . Il est facile de montrer que pour deux éléments  $g$  et  $g'$  de  $\zeta$ , on a soit  $gTl A g'H = 0$  soit  $gTl = g'Tl$ , de sorte que l'ensemble constitué de tous les  $p7i$  forme une décomposition de  $Q$  sur  $7Y$  en disjoint Cosets d'équivalence. Cet ensemble est l'espace quotient.

Si  $ghg \sim^x g Vg g \zeta$  et  $V/zg Tl$ , alors le sous-groupe  $Tl$  de  $Q$  est dit « normal » (ou « invariant »), ce qui est noté  $7i > Q$ . Dans ce cas particulier, les gauche et les bons cosets sont les mêmes, et aucune distinction n'est nécessaire.

Si  $Tl > \zeta$ , alors l'espace quotient  $\zeta/Tl$  est un groupe, appelé groupe quotient, dont l'opération de groupe notée  $*$ , est définie par  $(gTC) * (g'Tl) = (gg')Tl$ .

### 11.1.3.3 Défauts topologiques

Cette structure implique la possibilité de l'existence de défauts topologiques, qui sont des configurations de champs pour lesquelles il existe des domaines où la symétrie est laissée intacte, c'est à dire pour lesquels  $<b = 0$ . Ce sont des régions localisées de l'espace pour des raisons topologiques.

Comme une telle configuration ne correspond pas à un minimum du potentiel, elle contient une densité d'énergie localisée autour des points pour lesquels  $0 = 0$ . Bien que nous en reparlerons plus en détail plus tard, nous pouvons immédiatement remarquer que la condition  $0 = 0$ , imposé dans un espace tridimensionnel, peut permettre des défauts de différentes dimensions. Par exemple,

- si  $0 g R$ , alors  $0(\mathfrak{x}) = 0$  est une relation entre trois coordonnées et définit une surface, appelée « mur de domaine », ce qui est malheureusement une terminologie inappropriée car elle suggère une sorte de rigidité que ces murs n'ont pas. ;<sup>10</sup>
- si  $0 g C$ , alors cette équation se réduit à  $3Je[0(\mathfrak{x})] = 0$  et  $3m[0(\mathfrak{x})] = 0$ . On a donc deux équations pour trois coordonnées, et donc la solution de l'équation  $0 = 0$  est à l'intersection des deux membranes : c'est un objet à une dimension, appelé ligne vortex, par analogie avec les défauts apparaissant dans des systèmes similaires de physique de la matière condensée, ou encore des cordes cosmiques, c'est la terminologie que nous garderons ;
- si  $<0$  est un vecteur dans  $SO(3)$ , par exemple, à trois composantes, alors  $<0=0$  donne trois relations pour trois coordonnées. Il n'existe qu'une seule solution, définir un point, appelé monopôle.

Dans un espace à plus de trois dimensions, comme on le rencontre notamment en théorie des cordes, on peut penser à des défauts de dimension supérieure, ayant plus de dimensions. En particulier, il a même été suggéré que notre propre espace tridimensionnel pourrait être un tel défaut topologique, par exemple un mur de domaine dans un espace à 5 dimensions [5], ou une chaîne en 6 dimensions [6] (voir chapitre 13).

## 11.2 Murs de domaine

Commençons par l'exemple le plus simple d'un champ scalaire réel, avec un invariant lagrangien sous transformations du groupe  $Q = Z2 = \{ -1, +1 \}$ - Cette condition revient à imposer que la théorie est invariante sous la transformation  $</>$  —<p. A zéro

<sup>10</sup>Le terme de membrane, suggérant un plus grand degré de flexibilité, semble plus adapté à la description de la dynamique de ces objets. Nous utiliserons cependant la terminologie usuelle dans ce qui suit.

température, on considère donc le Lagrangien

$$\mathcal{L} = - \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - A (\phi - \phi_0)^2. \quad (11.13)$$

La configuration la plus basse énergie est atteinte pour  $\phi = \pm \phi_0$ , le choix du signe n'ayant aucune importance

utile pour tout calcul de physique locale (sections efficaces par exemple). Ce choix est cependant essentiel pour faire tout calcul puisqu'il définit le vide de manière complète.

Quelle que soit la valeur du vide choisie, cette valeur brise complètement la symétrie initiale puisqu'il n'est plus possible de modifier arbitrairement la valeur du champ sans changer la configuration. Cela signifie que l'invariance  $\phi \rightarrow \phi + c$  résultant de cette cassure est simplement l'ensemble contenant seule l'identité,  $H = \{Id\}$ . Le schéma de coupure équivalent à (11.12) est donc  $\{Id\}$ . Le collecteur de vide est donc  $M \sim \mathbb{Z}_2$ ,

ce qui revient à dire que chaque élément de  $\mathbb{Z}_2$  est un candidat possible pour décrire la configuration du vide.

### 11.2.1 Longueur de corrélation

Considérons maintenant comment se produit la transition de phase pendant que l'Univers se refroidit. Initialement, la température est très élevée, de sorte que le champ scalaire disparaît : par définition, c'est la phase symétrique. Au fur et à mesure que la température diminue et que le potentiel s'approfondit, le champ a tendance à suivre l'inclinaison du potentiel, et donc à prendre une valeur non nulle. Il doit donc choisir dans quelle direction, c'est à dire selon  $\phi > 0$  ou  $\phi < 0$ . Ce choix est bien entendu aléatoire. En particulier, comme le champ ne peut interagir avec lui-même que sur des distances finies, du fait de la causalité, il doit exister une *longueur de corrélation*, notée  $\xi$ , au-delà de laquelle, par définition, les choix des champs de Higgs ne sont pas corrélés. Cette longueur de corrélation est calculée en fonction de l'ordre de la transition de phase brisant la symétrie.

#### 11.2.1.1 Transitions de premier ordre

Une transition de premier ordre s'effectue par *nucléation* de la nouvelle phase au sein de l'ancienne. Pour y parvenir, le potentiel effectif ne doit avoir qu'un minimum local à  $\phi = 0$ , ce qui est le cas si  $\beta < 0$  dans la correction thermique (11.11). Le champ est initialement localisé dans son minimum global,  $\phi = 0$ . Ce point devient un minimum local en dessous de la température critique (Fig. 11.2). Classiquement, le champ ne peut pas franchir la barrière de potentiel, et il reste donc piégé pendant un certain temps dans l'état  $\phi = 0$ . Cependant, cet état est métastable, et les fluctuations quantiques finissent par permettre au champ de passer d'un côté à l'autre, c'est ce que représente la flèche sur la figure 11.2, où le choix a été fait vers des valeurs positives.

Si, en un point donné de l'espace, les fluctuations sont suffisantes pour que le tunnel se produise, alors le champ franchit la barrière, disons vers des valeurs positives, pour atteindre rapidement le minimum ( $\phi = +\phi_0$ ). En raison de l'auto-interaction de le champ autour de ce point, et comme  $\phi = 0$  n'est pas stable, la probabilité de tirer ce champ vers ce minimum augmente, de sorte que la région dans laquelle  $\phi = +\phi_0$  grandit. Une bulle de « vrai vide » est dite se nucléent spontanément dans l'espace du "faux vide". Pour cette raison, ce mécanisme est appelé nucléation. Puisque l'énergie contenue dans le vide vrai est, par définition, inférieure à celle contenue dans le faux vide, les bulles grandissent rapidement, entrent en collision et finissent par occuper tout l'espace disponible (tout l'Univers qui nous concerne dans le contexte

cosmologique) : la transition de phase est alors achevée.

### 11.2.1.2 Nucléation

Le taux de nucléation par unité de temps et d'espace,  $\gamma(T)$ , dépend bien entendu de la température ainsi que de la probabilité des configurations du champ. Nous trouvons

$$\gamma(T) = A(T)e^{-S_E/\hbar};$$

où, pour des raisons dimensionnelles,  $A(T) \propto T^4$ . La quantité  $S_E$  est l'action euclidienne, c'est à dire l'action calculée en remplaçant le temps  $t$  par la variable purement imaginaire  $t_E = it$ . Cette opération remplace la métrique de Minkowski par une métrique complètement euclidienne  $ds^2 = dt^2 + d\mathbf{x}^2$ . Cette transformation est très utile pour calculer notamment la probabilité d'une transition par effet tunnel.

La longueur de corrélation  $\xi$  est alors simplement la distance caractéristique entre deux sites de nucléation, et, dans un volume  $V$  donné, le nombre de bulles nucléées est d'ordre  $V\xi^{-3} \sim t^{3/4}$ . Si la vitesse d'expansion de chaque bulle est de l'ordre de la vitesse de la lumière, alors la longueur de corrélation dépend du seul paramètre disponible, à savoir  $\gamma$ . On retrouve alors  $\xi \propto \gamma^{-1/4}$ , évalué pour la température de transition de phase. C'est ainsi qu'il est possible de décrire une transition du premier ordre uniquement à partir de la connaissance du Lagrangien en microscopie, et à partir de là de faire des prédictions observationnelles en macroscopie, elles-mêmes très dépendantes de la longueur de corrélation.

### 11.2.1.3 Transition de second ordre

Une transition de phase du second ordre se caractérise par le fait que, contrairement à une transition du premier ordre, elle se réalise de manière continue. Il n'est pas nécessaire ici de recourir à l'effet tunnel, et la transition s'amorce de manière classique. Rien ne semble indiquer l'existence d'une longueur préférée dans un tel cas, de sorte que la longueur de corrélation semble infinie. Comment pouvons-nous alors le définir de manière cohérente ?

L'argument cosmologique, initialement proposé en 1976 par Kibble, revient à observer que depuis la singularité initiale à  $t = 0$  jusqu'au temps de transition, il y a eu en principe un temps fini, de sorte qu'il doit exister un horizon de particules (voir section 3.5 du chapitre 3). Tant que la dynamique de l'Univers est gouvernée par un facteur d'échelle de loi de puissance,  $a \propto t^p$ , cet horizon est de l'ordre du rayon de Hubble [voir (3.107)]. La causalité fixe ainsi une borne supérieure à  $\xi$ .

Cet argument, basé sur la causalité, ne s'applique pas aux transitions de phase qui se produisent dans des systèmes de laboratoire presque mathématiquement équivalents, comme les cristaux liquides ou le passage de l'état normal à l'état superfluide lors du refroidissement de l'hélium liquide. En fait, nous observons en réalité une longueur de corrélation finie dans ces systèmes lors de l'exécution de la transition. Le système spontanément

définit une longueur,  $\xi$ , qui sera la 'vraie' longueur de corrélation, d'où découleront les conséquences macroscopiques, longtemps après la transition.

#### 11.2.1.4 *Au-delà de la causalité : le temps d'extinction*

Une remarque cruciale a été faite par Kibble et Zurek : la transition dure généralement un temps fini. De plus, dans la plupart des systèmes physiques, il existe également un équivalent de l'horizon des particules. C'est l'horizon Sonore, défini par le fait qu'aucune information, dans un Système donné, ne peut se propager plus vite que la vitesse de propagation des perturbations de ce Système, qui dépend uniquement de la physique de la microscopie. Cette vitesse est généralement de l'ordre de la vitesse du Son (ou de la vitesse du second son dans le cas de l'hélium). La vitesse à laquelle se produit la transition de phase n'est pas liée à cette caractéristique microscopique en elle-même, puisqu'elle est soit imposée de l'extérieur (vitesse à laquelle l'expérimentateur décide arbitrairement de baisser la température), soit donnée par d'autres physiques, par exemple la dilatation de l'Univers dans le cas cosmologique.

Outre la transition de phase, la longueur de corrélation est définie comme l'échelle de distance des fluctuations thermiques au-delà de laquelle deux configurations de champ sont équiprobables. A très haute température, le champ peut fluctuer très facilement et  $\xi$  est donc très petit. Au voisinage de la transition, à une température notée  $T_c$ ,  $\xi$  devient infini.

En augmentant de Taylor la température du bain,  $T(t)$ , au premier ordre, nous définissons

$$\xi = \xi_0 \left( 1 - \frac{t - t_c}{\tau_Q} \right)^{-\nu}$$

where  $t_c$  is the time of the transition and  $\tau_Q$ , which is called the 'quench' time, represents the characteristic duration of the transition. Statistical physics [7] then teaches us that  $\xi$  diverges as a power law

le paramètre où  $\nu$  est un « exposant critique ». A l'approche de la transition, le Système se fige de plus en plus, c'est à dire que le temps dont il a besoin pour atteindre l'équilibre, autrement dit son temps de relaxation,  $\tau$ , augmente. Il se comporte donc aussi comme une loi de puissance définissant un deuxième coefficient critique  $\nu$ . Notons ici que  $\xi$  est la longueur de corrélation à l'équilibre, c'est à dire pour un Système qui a toujours le temps de se détendre, autrement dit pour un Système dont le temps de relaxation est toujours petit par rapport au temps caractéristique de la transition. Cette condition ne peut être maintenue à l'approche de la transition puisque  $\tau \rightarrow \infty$ . En pratique, à la transition, le Système ne peut pas maintenir l'équilibre. Dans ces conditions, la vitesse maximale à laquelle l'information peut se propager est

$$c(T) = \frac{\xi}{\tau} = \frac{\xi_0}{\tau_Q} \left( 1 - \frac{t - t_c}{\tau_Q} \right)^{-\nu}$$

Pour les transitions cosmologiques, cette vitesse est de l'ordre de la vitesse de la lumière mais peut être très différente pour d'autres Systèmes. L'horizon sonore, comme l'horizon des événements en relativité générale, est une quantité globale définie par

Cela nous permet d'obtenir la longueur réelle de corrélation en identifiant,  $\xi_v = h$ ,

$$\xi_v = \xi_0 (1 + M^{-1/\nu})$$

Tout comme dans le cas d'une transition du premier ordre, la longueur de corrélation est déterminée par des grandeurs décrivant la physique de la microscopie (les exposants critiques sont en théorie calculables), ainsi que par la vitesse de transition. Cette relation peut être vérifiée expérimentalement. Cela a en fait été fait avec une très bonne précision dans de nombreux systèmes : la densité de défauts topologiques produits lors d'une telle transition dépend explicitement de  $\xi_v$ , et cette densité peut être mesurée.

Que la transition soit du premier ou du deuxième ordre, on voit qu'il est nécessaire de connaître tous les détails microphysiques pour calculer la longueur de corrélation. Au niveau d'approximation requis pour faire toute prédiction valable en cosmologie, on constate qu'il suffit souvent de se limiter à

$$\xi \simeq T_c^{-1}.$$

En première approximation, nous associons donc à la transition de phase une longueur correspondante déterminée par la température critique. D'un point de vue dimensionnel, c'est la première quantité à laquelle nous pouvons penser.

11.2.1.5 Mécanisme Kibble pour les murs de domaine

Considérons le Système défini par le Lagrangien (11.13) décrivant un mur de domaine. Une fois la transition effectuée, le champ scalaire  $\phi$  prend aléatoirement la valeur  $r$  ou  $-r$  en chaque point. Longtemps après la transition, les fluctuations thermiques sont devenues négligeables. Deux régions situées à une distance  $D > \xi$  (où  $\xi = \xi_v$  s'il s'agit d'une transition du second ordre) sont alors, par définition, décorrélées. Cela signifie que la valeur du champ dans une région ne peut en aucun cas dépendre de la valeur dans l'autre. En d'autres termes, il existe une probabilité de  $1/2$  dans chaque région du volume  $\xi^3$  pour que le champ choisisse une valeur ou une autre, c'est-à-dire étant donné deux régions arbitraires, une probabilité de  $1/4$  que les valeurs choisies par le champ sont différentes.

Lorsque deux régions où le champ est différent sont mises en contact, que ce soit lors de la rencontre de deux bulles en expansion pour une transition du premier ordre ou lors de la dynamique de la transition du second ordre, le champ, qui est continu, doit s'interpoler entre les deux. vide (Fig. 11.3). En d'autres termes, le champ ne peut pas rester partout dans son vide véritable et les véritables régions de vide ( $\phi = \pm r$ ) sont séparées par des interfaces où  $\phi = 0$  : des parois de domaines se sont formées.

11.2.2 Configurations statiques

Cherchons maintenant les configurations statiques de la théorie (11.13). L'équation d'Euler-Lagrange se réduit alors à une équation de Klein-Gordon

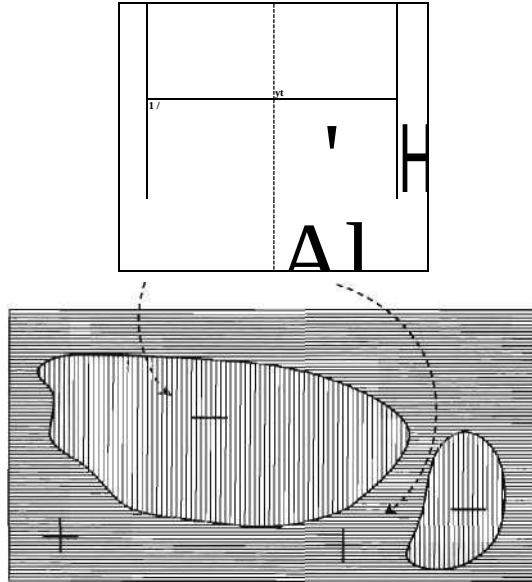


**Fig. 11.3** Apparition de régions avec différentes valeurs de champ de Higgs. Indépendamment de l'ordre de la transition, une fois celle-ci terminée, les régions avec  $\langle \phi \rangle > 0$  et d'autres avec  $\langle \phi \rangle < 0$  ont le même volume. La distance séparant ces différentes régions est, statistiquement, de l'ordre de la longueur de corrélation au moment de la transition de phase. Les surfaces de séparation, dans le cas représenté ici où la symétrie est discrète, s'étendent dans la troisième dimension et sont des parois de domaine, c'est-à-dire à 2 dimensions.

$$= d \Rightarrow (A + v^2 A = 4\lambda A^2) \quad (11.16)$$

en négligeant l'expansion de l'Univers. Pour une configuration statique,  $\langle \phi \rangle$  est indépendant de  $t$  et on retrouve la solution la plus simple  $d = \pm r/\lambda$ . De plus, on remarque que  $\langle \phi \rangle = 0$  est toujours une solution (c'est le maximum local du potentiel). De toute façon, la solution est également indépendante de l'espace.

Cherchons maintenant une solution de mur de domaine puisque nous avons vu que cette théorie produit du son pendant la transition de phase. Très proche du mur, on peut le considérer comme plan. En imposant une symétrie de translation dans le plan  $(x, y)$ , l'équation de Klein-Gordon (11.16) se réduit alors à

$$\frac{1}{dz^2} = 4\lambda^2 (A^2 - T), \quad (11.17)$$

pour les configurations statiques. La solution non triviale de cette équation est

$$d(z) = r/\tanh f - J, \quad \text{où } z_c = \dots, \quad (11.18)$$

qui interpole asymptotiquement, c'est à dire pour  $z \pm \infty$ , entre les deux vrais vides possibles,  $\langle \phi \rangle = \pm T$ . En utilisant (1.107) ou (2.78), nous pouvons calculer le profil de densité d'énergie de cette configuration de champ,

$$\frac{2Xr)^4}{\hspace{1.5cm}}$$

La solution (11.18), ainsi que la densité d'énergie (11.19) qu'elle contient, sont représentées sur la Fig. 11.4. La largeur caractéristique de la paroi,  $z_c$ , est à peu près la longueur d'onde Compton associée au champ de Higgs responsable de la transition de phase. Enfin, l'énergie surfacique du mur est obtenue par intégration sur la direction transversale  $z$ ,

$$U_{\text{wall}} \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_{\text{wall}}(z) dz = \frac{\eta^3}{\sqrt{2\lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\text{ch}^4 x} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \eta^3. \tag{11.20}$$

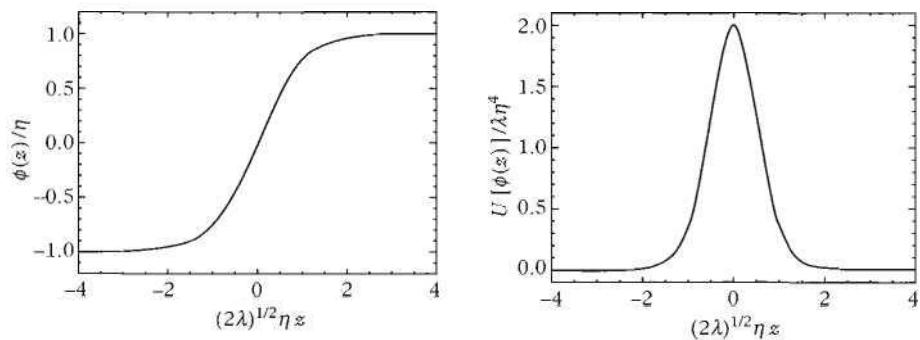


**Fig. 11.4** (left): Exact solution interpolating between the two possible vacuum states of the Higgs field for the Z2 symmetry breaking. This is a domain wall aligned in the  $(r, j)$  plane, so that the field only depends on the distance to the wall, i.e.  $z$ . (right): Energy density contained in the domain-wall configuration as a function of the distance  $z$  to the centre of the wall.

Cette relation montre d'abord que le défaut est clairement un objet non perturbateur puisque son énergie totale est inversement proportionnelle à la racine carrée de la constante de couplage  $A$ , et donc aucun développement de Taylor autour de  $A = 0$  ne peut y conduire. Il fournit également l'ordre de grandeur de la densité d'énergie comme le cube de l'échelle de bris de symétrie. Pour une transition de phase à l'échelle de la grande unification, avec  $77 \sim 10^{15}$  GeV, cela conduit à une valeur  $\tau_{\text{wall}} \sim 4,6 \times 10^{49} \text{ kg}\cdot\text{m}^{-2}$ , soit environ  $10^{13} A\Lambda$ , par millimètre carré, lors de la conversion en unités standards !

11.3 Vortex

Considérons maintenant le cas d'une symétrie initiale  $U(1)$  avec schéma de rupture donné par  $Q = U(1) \rightarrow \{Id\} = TL$ . Ce schéma correspond au cas déjà étudié d'un champ scalaire complexe dans un potentiel de Higgs, c'est à dire le modèle abélien de Higgs (11.6).

### 11.3.1 Mécanisme de croquettes pour cordes cosmiques

Le cas de la formation d'un vortex, ou corde, c'est à dire d'un défaut unidimensionnel contenant de l'énergie concentrée dans un tube mince, est très similaire à celui de la formation d'une paroi. La situation est représentée sur la figure 11.5, illustrant le cas d'une transition de phase du second ordre. En différents points de l'espace, séparés par une distance supérieure à la longueur de corrélation, ou de manière équivalente, dans différentes bulles dans le cas de la nucléation, le champ de Higgs tombe dans un minimum de potentiel, dans ce cas une amplitude fixe et une phase arbitraire.

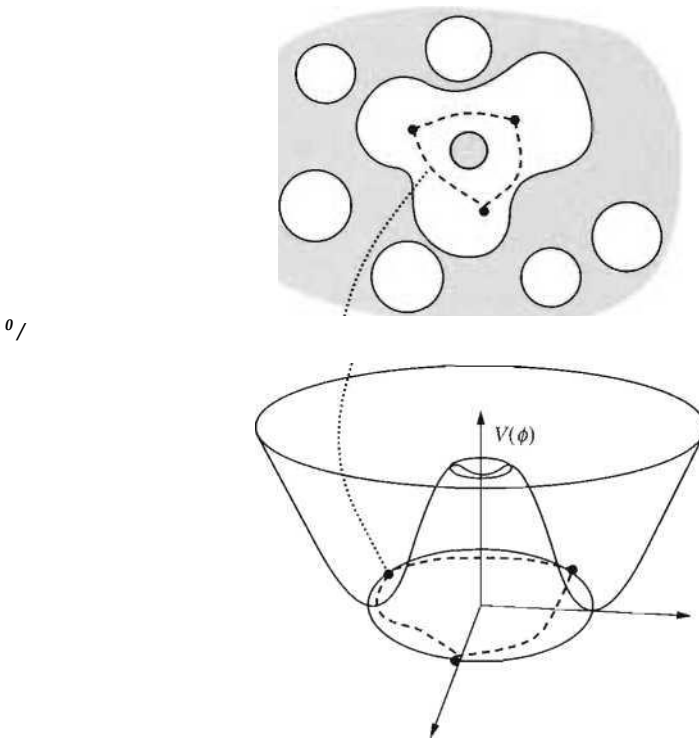


**Fig. 11.5** Mécanisme de croquette pour la rupture du groupe  $U(1)$  et la formation de cordes cosmiques. Le diagramme du haut représente l'espace physique et celui du bas l'espace du terrain. Après la transition de phase, le champ de Higgs,  $\phi$ , a pris une valeur différente en chaque point de l'espace. Cette valeur est l'une des minirnes potentielles,  $V(\phi)$ , qui est différente dans les trois régions représentées ici. Si, le long d'un chemin fermé dans l'espace réel, le champ de Higgs fait une boucle complète dans l'espace du champ, alors il doit exister un point inclus à l'intérieur du chemin pour lequel cette phase n'est pas définie. Cela implique que le champ lui-même disparaît. Dans ce cas, le champ est bloqué au maximum du potentiel et la configuration de cordes que nous obtenons contient de l'énergie. From Réf. [8].

Ces phases sont réparties aléatoirement autour du cercle des minima puisqu'aucune direction privilégiée n'existe au niveau microscopie. Lorsque trois bulles se rencontrent (ou à l'intersection de trois régions non corrélées), ces phases peuvent former une (ou plusieurs)



boucles complètes autour du cercle des minima dans l'espace du champ. Dans ce cas, on peut imaginer tracer un chemin fermé  $F$ , représenté en pointillés sur la figure 11.5, le long duquel la phase du champ de Higgs varie continûment. En chaque point  $x$  de  $F$ , le champ ne peut avoir qu'une unique phase  $i\varphi(x)$ , telle que l'on puisse changer de jauge localement sans modifier la physique locale. Après une boucle complète selon  $F$ , la variation de la phase  $\Delta\varphi$  ne peut être qu'un multiple entier de  $2\pi$  :

$$\Delta\varphi = 2\pi n, \text{ avec } n \in \mathbb{Z}. \tag{11.21}$$

En supposant désormais  $n \neq 0$  puisque l'on veut chercher une solution de défaut, on constate alors qu'il doit nécessairement exister un point singulier à l'intérieur du contour fermé  $F$ . En effet, si l'on cherche à déformer la boucle  $F$  continûment en un point, on observe une discontinuité : quelque part la phase doit passer brusquement de  $\varphi$  à  $\varphi + \Delta\varphi$  et une fois la courbe amenée à un point, cette phase ne peut alors plus être définie. La seule façon pour que cela se produise est d'avoir  $\Delta\varphi \neq 0$  à ce stade.

Une autre façon de comprendre ce phénomène est présentée sur la figure 11.6, où la phase du champ de Higgs est représentée par une flèche (c'est une direction dans le plan complexe). Le long du chemin  $T$ , cette flèche peut s'enrouler une fois ( $n = 1$ ) ou plusieurs (par exemple,  $n > 2$  cas) fois dans l'espace, voire aucune ( $n = 0$ ), comme illustré. Dans les deux cas où  $n \neq 0$ , cela implique la présence d'une singularité à l'intérieur du chemin, un point où la flèche ne peut plus être représentée. Cette représentation illustre clairement l'analogie avec les lignes vortex qui peuvent apparaître lors des transitions de phase conduisant à un système supraconducteur. Ce n'est en fait pas un hasard si le modèle de Ginzburg-Landau qui décrit un tel système, est essentiellement basé sur la version non relativiste du Lagrangien (11.6), avec un terme de la forme (11.11).

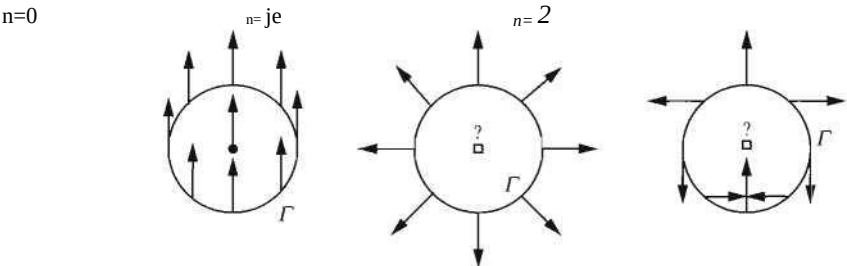


**Fig. 11.6** Illustration du mécanisme de Kibble pour lequel la phase du champ de Higgs est représentée par une flèche, équivalente au moment magnétique dans un système ferromagnétique, indiquant la direction choisie localement par  $d$ . Le cas  $n = 0$  est régulier partout, et le champ est continu en tous points, mais les deux cas  $n = 1$  et  $n = 2$  conduisent nécessairement à l'existence d'une singularité quelque part à l'intérieur du chemin  $T$ .

Le point singulier rencontré à l'intérieur de  $F$  s'étend en fait pour former une ligne à une dimension lorsque le graphique (Fig. 11.6) est étendu à la troisième dimension de l'espace. Les cordes créées sont alors nécessairement infinies ou sous forme de boucles. Supposons en effet que ce n'est pas le cas et qu'un segment de corde se forme. Il serait alors possible de déformer  $F$  de manière à le faire faire le tour du segment, puis on pourrait le déformer librement pour finalement le contracter en un point, en contradiction avec l'hypothèse initiale selon laquelle  $F$  n'est justement pas contractable vers un point.

Dans l'exemple précédent, la présence d'une chaîne est liée au nombre entier  $n$  obtenu à

partir d'une boucle donnée. Cet entier, appelé nombre d'enroulement ou indice de Pontryagin, apparaît parce que le premier groupe d'homotopie de l'espace topologique  $U(1)$  est  $\mathbb{Z}$ . Il exprime le fait que le vide n'est pas simplement connecté <sup>11</sup> et montre que les cordes peuvent être classées selon  $\mathbb{Z}$ .

### 11.3.2 Structure interne

La structure interne d'une chaîne est obtenue de la même manière que pour un mur de domaine, à ceci près qu'il n'existe pas de solution analytique connue aux équations de différenciation de champ. La plupart des cordes discutées dans la littérature, qui sont supposées avoir un rôle potentiel à jouer en cosmologie, sont des cordes abéliennes. Pour les décrire, nous supposons généralement qu'un sous-groupe  $U(1)$  du groupe de grande unification est brisé indépendamment du reste du groupe total. Dans ce cas, on néglige la plupart des degrés de liberté autres que ceux nécessaires à la description de la corde elle-même, et on se retrouve avec un modèle abélien de Higgs (11.6).

#### 11.3.2.1 Équations de champ statique

Tout comme pour les parois de domaines, nous établissons d'abord les équations dynamiques du Lagrangien (11-6) pour lesquelles nous décomposons comme

$$O(x) = \langle p(\mathbf{x}) e^{w(\mathbf{x})}, \quad (11.22)$$

donnant

$$= (V_M a + qB_M) (V^M a + qB^\wedge) + 2A (\langle p^2 - q^2 \rangle \langle p, \quad (11.23)$$

pour l'amplitude du champ scalaire,

$$[(V^\wedge - hr + qB^\wedge - 1) \langle p^2 \rangle] = 0, \quad (11.24)$$

pour la phase, cette relation étant simplement l'expression de la conservation du courant  $U(1)$ , et

$$= i q t y' a + q B^{1/2} v^2, \quad (11.25)$$

pour le champ de jauge.

Nous recherchons maintenant une configuration de cordes pour laquelle la phase du champ de Higgs s'enroule  $n$  fois dans l'espace. Localement, on peut négliger la courbure des cordes et ainsi considérer un système de coordonnées dans lequel l'ensemble des points avec  $= 0$  est aligné le long de l'axe  $z$ , en

---

<sup>11</sup>Un espace simplement connexe est un espace relié par des arcs (deux points arbitraires peuvent être joints par un chemin dans l'espace) tel que toute boucle (lacet de chaussure) est homotope à un point.

coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ . La condition de chaîne est implémentée par la solution Nielsen-Olesen [9] pour laquelle la phase est simplement

$$\text{une} = \text{non},$$

et l'amplitude ne dépend, par symétrie, que de la distance radiale,  $\psi = \psi(r)$ . Quant au champ de jauge, il ne comporte qu'une seule composante non nulle, à savoir  $B_\theta$ . Les équations (11.23) et (11.25) deviennent [(11.24) est trivialement satisfait de cette solution],

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p} \frac{dQ}{dp} = \tilde{q}^2 X^2 Q, \\ & \text{double pénétration}^2 \\ & \langle \psi^2 \rangle \\ & \text{, point de vue}^2 \end{aligned} \tag{11.26}$$

où dans ces relations, les distances sont exprimées en unités de la longueur d'onde Compton du champ de Higgs, définissant  $p = r/r_\Lambda = m/r$ ,  $r = y/\Lambda X r_j$ , et nous avons défini  $X = \psi/p$  et  $Q = n + qB_\theta$  afin de traiter uniquement les variables sans dimension. Ces notations ainsi que les équations auxquelles elles conduisent montrent qu'il n'y a qu'un seul paramètre dont dépend la solution, à savoir  $y^2 = \Lambda^2/(4A)$ .

Les équations (11.26) doivent être résolues numériquement avec des conditions aux limites correspondant à une ligne de vortex, à savoir  $A'(0) = 0$ , définissant le défaut,  $A'(\infty) = 1$ , étant la valeur nominale du champ de Higgs dans le vide, et  $Q(0) = n$  donnant l'indice de Pontryagin de la corde, ainsi que  $dQ(0)/dp = 0$  pour la régularité. On peut aussi imposer  $Q(\infty) = 0$ , ce qui est nécessaire pour être dans le vide loin de la corde, conduisant à la même conséquence. La figure 11.7 illustre cette solution dans le cas de  $n = 1$ .

A partir de la solution de ces équations, nous pouvons obtenir le tenseur énergie-impulsion des cordes défini par (1.84), à savoir

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = & 2 \left[ \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + \varphi^2 (\partial_\mu \alpha + qB_\mu) (\partial_\nu \alpha + qB_\nu) \right] \\ & - \left[ \partial_\sigma \varphi \partial^\sigma \varphi + \varphi^2 (\partial_\sigma \alpha + qB_\sigma) (\partial^\sigma \alpha + qB^\sigma) \right] g_{\mu\nu} \\ & + H_{\mu\sigma} H^\sigma_\nu + \left[ \lambda (\varphi^2 - \eta^2)^2 - \frac{1}{4} H_{\sigma\beta} H^{\sigma\beta} \right] g_{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{11.27}$$

et en déduire les quantités intégrées qui seront nécessaires à une description macroscopique de la chaîne. A noter qu'il n'est pas utile de calculer toutes les composantes du tenseur énergie-impulsion puisque l'on sait qu'il est conservé, c'est à dire  $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ . En effet, la composante  $r$  de cette loi de conservation implique

$$\frac{dT^r_o}{dr} = -T^r_r$$

où nous avons supposé que toutes les fonctions de la microscopie ne dépendaient que de la distance radiale  $r$ , ce qui est certainement le cas pour la solution de Nielsen-Olesen. Si les composantes de diminuent avec  $r$  plus vite que  $r^{-2}$ , ce qui est encore une fois le cas pour une

chaîne locale considérée ici, alors la relation précédente conduit à

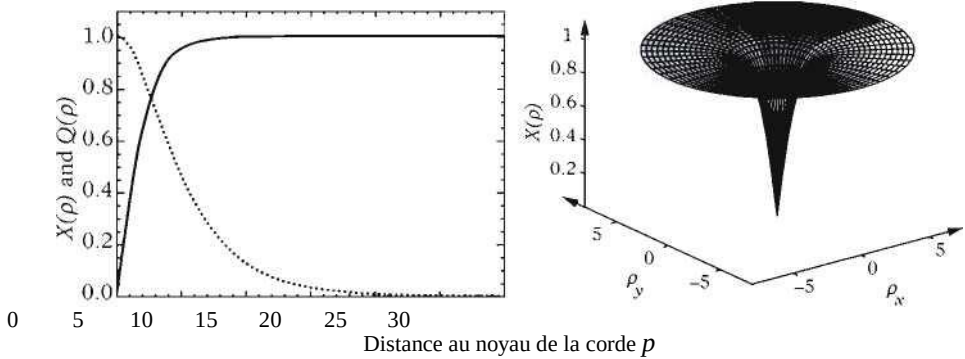


**Fig. 11.7** Structure d'une corde cosmique, (à gauche) : Valeur du champ de Higgs et du champ de jauge associé dans la solution Nielsen-Olesen pour les paramètres  $q^2 = 0,1$  et  $n = 1$ . (à droite) : Représentation de la valeur de l'amplitude du champ de Higgs  $X(p) = \langle p/y \rangle$  en fonction de la distance au centre du vortex, supposé être à l'origine du système de coordonnées ( $p_x = p_y = 0$  sur la figure). Au centre de la corde, là où le champ s'annule, on a  $X(0) = 0$ , alors qu'asymptotiquement, on retrouve une configuration de vide, soit  $X(p_x, p_y) \rightarrow 1$  quand  $(p_x, p_y) \rightarrow \infty$ . Les distances  $p, p_x$  et  $p_y$  sont exprimées en unités de la longueur d'onde Compton du champ Higgs  $r_C^{-1} = V\sqrt{8X\lambda}$ . La figure de droite est adaptée de la réf. [8],

$$\int_0^\infty \frac{dT_r^r}{dr} r^2 dr = [r^2 T_r^r]_0^\infty - 2 \int_0^\infty T_r^r r dr = \int_0^\infty (T_\theta^\theta - T_r^r) r dr,$$

et donc à  $\int (T_e^e + T_r^r) r dr = 0$ . De plus, en se plaçant en coordonnées cartésiennes ( $x, y$ ) au lieu de  $(r, \theta)$ , l'invariance rotationnelle autour de la corde impose que  $\int T_x^x r dr = \int T_y^y r dr$ . Enfin, la silice  $T_x^x + T_y^y = T_e^e + T_r^r$ , nous obtenons  $\int T_x^x r dr = \int T_y^y r dr = 0$ . Puisque le tenseur énergie-impulsion ne dépend pas du système de coordonnées, nous concluons que seules deux composantes intégrées sont significatives. Nous pouvons choisir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^2x (T^J_J - T^C_C) = -2\pi \int T_r^r r dr \text{ et } T = -2\pi \int T_z^z r dr, \quad (11.28)$$

qui sont respectivement l'énergie par unité de longueur et la tension.

Dans le modèle abélien de Higgs, les champs ne peuvent pas dépendre des coordonnées internes de la chaîne, de sorte qu'il n'est pas possible de distinguer  $U$  et  $T$ . En fait, le calcul direct, effectué en insérant la solution (11.22) dans (11.27) montre que nous avons

$$\begin{aligned} U = T &= 2\pi \int_0^\infty \left[ \left( \frac{d\varphi}{dr} \right)^2 + \frac{1}{2q^2 r^2} \left( \frac{dQ}{dr} \right)^2 + \frac{\varphi^2 Q^2}{r^2} + \lambda (\varphi^2 - \eta^2)^2 \right] r dr, \\ &= 2\pi \eta^2 \int_0^\infty \left[ \left( \frac{dX}{d\rho} \right)^2 + \frac{1}{\tilde{q}^2 \rho^2} \left( \frac{dQ}{d\rho} \right)^2 + \frac{X^2 Q^2}{\rho^2} + \frac{1}{8} (X^2 - 1)^2 \right] \rho d\rho. \end{aligned} \quad (11.29)$$

Cette fonction est donc fonction de  $q$  uniquement, multiplié par  $\eta^2$ , et est représentée sur la figure 11.8.

dix

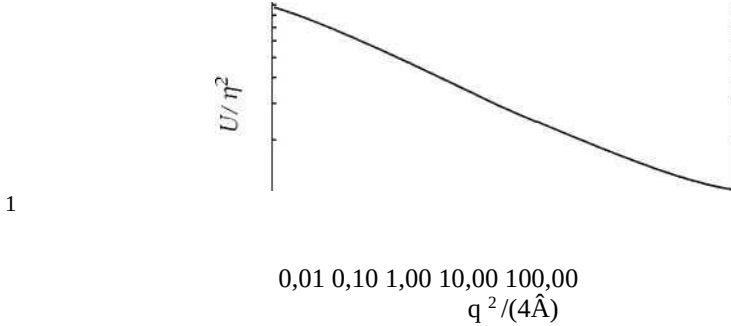


**Fig. 11.8** Énergie par unité de longueur d'un vortex, en unités de la valeur attendue du vide du champ de Higgs,  $U/r?$ , en fonction du paramètre sans dimension  $q^2 = g^2/(4A)$  dans le modèle abélien de Higgs.

### 11.3.2.2 Cordes Nambu-Goto et cordes supraconductrices

Le fait que l'énergie par unité de longueur et la tension soient égales vient du fait que la corde n'a pas de structure. En conséquence, ces cordes ont une symétrie de Lorentz dans leur direction : nous les appelons cordes Nambu-Goto [10].

Sur certaines chaînes, des courants peuvent se propager. Ceci dépend du couplage des champs constituant la corde avec les autres champs contenus dans la théorie réaliste. On peut alors montrer que les courants qui se propagent sont de type supraconducteurs [11]. Des études détaillées [12] de ces cordes supraconductrices montrent que la relation entre  $U$  et  $T$ , qui est l'équation d'état, dépend de manière non triviale d'un paramètre, appelé paramètre d'état <sup>6</sup> [13]. Ces cordes peuvent induire des effets importants en cosmologie et provoquer des catastrophes similaires à celle des monopôles puisqu'il existe des configurations d'équilibre, appelées vortons [14], dont la densité dans l'Univers s'avère n'être compatible avec les observations que si l'échelle énergétique de rupture de symétrie que forme ces cordes est très faible par rapport à  $E_{cut}$ , en pratique de plusieurs ordres de grandeur, la valeur exacte dépendant du modèle précis considéré [15].

### 11.3.2.3 Chaînes globales

Un cas particulier intéressant du modèle précédent est celui pour lequel la constante de couplage  $q \neq 0$ , c'est à dire où la symétrie  $U(1)$  est globale. Les cordes obtenues sont alors appelées cordes globales, et dans ce cas, le boson de Goldstone ne peut pas être absorbé par le champ de jauge puisque ce dernier est désormais absent de la théorie. Il existe donc une particule scalaire sans masse qui peut propager l'interaction, et donc être responsable d'une interaction à longue portée. Cela implique d'abord que l'énergie totale du vortex n'est plus confinée à une région finie : en fait, il s'avère que la densité d'énergie de la corde

<sup>6</sup>Désigné par  $w$ , le paramètre d'état d'une corde cosmique supraconductrice est lié à l'amplitude du courant circulant le long de la corde, tandis que son signe indique si ce courant est de type espace, temps ou même lumière (pour  $w = 0$ ).

diverge logarithmiquement en s'éloignant du centre :  $\ln(r/r_h)$  quand  $r \gg r_h$ ,  $r_h$  étant la longueur d'onde Compton du champ de Higgs.

Cette divergence implique que l'énergie totale des cordes globales est exprimée par  $E \sim L r_h^2 \ln(L/r_h)$  pour une boucle de longueur  $L$ . De plus, en raison de l'interaction à longue portée, la perte d'énergie due à l'émission de bosons Goldstone (rayonnement Goldstone) sont importants. Il a été estimé [16] qu'une boucle entière contenue dans le rayon de Hubble perdrait toute son énergie sous forme de rayonnement Goldstone en un temps de l'ordre de 20 fois sa longueur. Ce procédé est donc extrêmement efficace.

Un tel boson de Goldstone apparaît naturellement dans de nombreuses versions approximatives semi-réalistes de la compactification à basse énergie de la théorie des cordes, où ils peuvent, par exemple, jouer le rôle de l'axion (voir chapitre 7). En conséquence, ce rayonnement peut donner des contraintes sur ces théories à haute énergie via leurs conséquences à très basse énergie.

## 11.4 Monopôles

Un schéma de rupture de symétrie capable de produire des monopôles est  $Q = SO(3)$  divisé en  $U(1)$ . Cette rupture peut survenir à travers un champ de Higgs dans la représentation **3** de  $SO(3)$ , avec  $\phi \in \mathbb{R}$ . Le Lagrangien d'un tel modèle est alors

$$\mathcal{L}_{\text{monopole}} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2} \lambda (\phi^2 - v^2)^2 \quad (11.30)$$

avec  $D_\mu \phi = \partial_\mu \phi - q e_a^{\mu} A^a$  et  $\epsilon^{abc} = \epsilon^{abc}$ ,  $A^a = A^a_\mu dx^\mu$ , où l'on rappelle que  $e_a^{\mu}$  est le tenseur de Levi-Civita complètement antisymétrique.

Une configuration monopôle dite 't Hooft-Polyakov [17], est obtenue en coordonnées sphériques, en considérant une solution de champ radial statique de la forme

$$\phi = v f(r) \hat{r} \quad (11h31)$$

avec des conditions aux limites similaires à celle de la chaîne, à savoir  $f(0) = 0$ ,  $f(\infty) = 1$ ,  $f'(0) = 0$  et  $f'(\infty) = 0$ . De l'ansatz (11.31), les équations d'Euler-Lagrange se lisent

$$-\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{df}{dr} \right) = \lambda f (f^2 - 1) \quad (11.32)$$

$$\frac{d^2 Q}{dr^2} - Q V_Q + \frac{1}{2} (Q^2 - 1)^2 = 0$$

Ces équations sont non linéaires dans le champ de jauge en raison de la non-commutativité de  $SO(3)$ . Cela rend le Système tout aussi insoluble analytiquement que (11.26), et nous devrions donc à nouveau recourir à une intégration numérique pour obtenir un résultat. Les solutions sont très similaires à celles obtenues dans le cas du vortex de la Fig. 11.7.

Le tenseur énergie-impulsion n'a désormais qu'une seule composante intégrée indépendante, ce qui est normal puisque dans ce cas nous pouvons voir la configuration comme une particule ponctuelle. On obtient l'énergie du monopôle, ou autrement dit sa masse, en intégrant  $T^t_t$ ,

où  $TZ$  est une fonctionnelle compliquée des champs (dont la forme exacte peut être trouvée dans la réf. [18]) dépendant du seul paramètre  $q^2/X$ . obtenir la forme approximative  $E \sim 4\pi r_j / (q^2/A)$   $\propto 1/\sqrt{X}$ , qui montre que la masse du monopôle est presque indépendante de la constante d'auto-couplage du champ de Higgs.

Dans la limite  $q^2/A \rightarrow 0$ , appelée limite de Bogomol'nyi, Prasad et Sommerfield (BPS) [19], on obtient une solution analytique, c'est-à-dire de masse  $M_M = 4\pi r_j/q$ . Il est surprenant que cette limite représente également une bonne approximation de la solution pour toute valeur possible du paramètre ( $QW$ )

$$ip = 17 \cotanh \frac{r}{ro}$$

## 11.5 Textures

Cet aperçu ne serait pas complet sans évoquer les textures, qui ne sont néanmoins pas des défauts topologiques à proprement parler puisqu'elles ne sont pas stables en trois dimensions. Les textures sont des configurations de champs non triviales, avec des conditions aux limites qui les rendent topologiquement stables seulement si l'espace a au moins quatre dimensions : ce serait la même chose que construire a. configuration topologiquement non triviale avec l'action (11.30), mais dans un plan. C'est pourquoi ces objets sont nécessairement dynamiques [16]. Toutes les études indiquent qu'ils ne sont pas compatibles avec les observations cosmologiques, ou qu'ils ne peuvent avoir joué qu'un rôle mineur. En d'autres termes, ils n'entraînent aucune contrainte intéressante. Cependant, comme pour les autres défauts, leur existence, sinon leur stabilité, dépend d'un schéma de rupture de symétrie du type (11.12) pour lequel la variété à vide  $M$  n'est pas triviale. Notons au passage que s'il y a plus de trois dimensions spatiales, comme le prédisent les modèles phénoménologiques inspirés de la théorie des supercordes, alors les textures, et autres nouveaux objets du même type, peuvent devenir stables et ainsi jouer un nouveau rôle en cosmologie. Les textures dans ces théories seront considérées dans notre Univers comme des défauts de dimensionnalité plus petite, des murs, des cordes ou des monopôles.

## 11.6 Les défauts en général

Sur la base des schémas de rupture de symétrie (11.12), il est possible de généraliser les conditions dans lesquelles se forment différents types de défauts topologiques. Pour cela, nous utilisons des groupes d'homotopie, qui permettent de comprendre les propriétés topologiques de la variété à vide,  $A_4$ , elle-même vue comme un espace topologique.



### 11.6.1 Connectivité

Les groupes de quotients  $A_4$  qui nous intéressent sont, en général, des variétés, c'est-à-dire des espaces localement isomorphes à  $\mathbb{R}^n$ , où  $n$  est la dimension de l'espace considéré. Ceci permet de recourir aux définitions habituelles de topologie, telles que connues en  $\mathbb{R}^n$ . Nous définissons d'abord la connectivité de la manière suivante :  $A_4$  est connecté par des arcs si pour toute paire de points  $(x, y) \in A_4$ , il existe une application continue  $\alpha$  de  $[0, 1]$  dans  $A_4$  satisfaisant  $\alpha(0) = x$  et  $\alpha(1) = y$ . Une telle carte s'appelle un chemin.

Considérons maintenant deux espaces topologiques  $X$  et  $Y$ , et deux applications continues  $c, d$  de  $X$  dans  $Y$ . Ces deux applications sont dites homotopiques si  $c$  peut être continuellement déformé en  $d$ , c'est à dire s'il existe une application continue  $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  telle que,  $\forall x \in X, F(x, 0) = c(x)$  et  $F(x, 1) = d(x)$ . L'ensemble des applications homotopiques divise l'espace des applications de  $X$  à  $Y$  en classes d'équivalence invariantes sous les homéomorphismes de  $X$  ou de  $Y$ . Ces classes d'équivalence sont donc des invariants topologiques de la paire d'espaces  $X$  et  $Y$ . Comparer systématiquement un espace donné avec la sphère  $S^n$  de même dimension (espace topologique de référence), il est possible de classer directement n'importe quel espace topologique par ces classes d'équivalence [20].

En particulier, si  $X$  est un espace connexe et s'il existe au moins un homéomorphisme  $f : X \rightarrow Y$ , alors  $Y$  est également connexe. En effet, si  $Y$  n'était pas connexe, on peut alors l'écrire sous la forme  $Y = \bigcup_{i=1}^n U_i$  avec  $U_i$  et  $U_j$  deux ouverts satisfaisant  $U_i \cap U_j = \emptyset$ . Puisque par hypothèse  $f$  est un homéomorphisme, alors son inverse  $f^{-1}$  existe et les espaces ouverts  $f^{-1}(U_i)$  et  $f^{-1}(U_j)$  de  $X$  doivent satisfaire  $f^{-1}(U_i) \cap f^{-1}(U_j) = \emptyset$  et  $f^{-1}(U_i) \cup f^{-1}(U_j) = X$ . Pour cela,  $X$  ne doit pas être connexe, en contradiction avec l'initiale hypothèse. C'est pourquoi les défauts topologiques, qui existent en raison de propriétés similaires à la connectivité du vide  $A_4$ , sont stables. Il n'y a pas d'homéomorphisme de l'espace sur lui-même, comme par exemple un phénomène physique dynamique, susceptible de les supprimer et ils ne peuvent se former que par discontinuités physiques telles que les transitions de phase.

### 11.6.2 Groupe fondamental

La notion de connexité introduit des chemins qui peuvent former des boucles qui sont simplement des chemins fermés, allant d'un point  $x$  à lui-même. Quant aux chemins, on peut dire que deux boucles  $\alpha$  et  $\beta$  basées sur  $x$  sont homotopes s'il est possible de se déformer l'une dans l'autre, c'est à dire s'il existe une application continue  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow A_4$  tel que  $H(t, 0) = \alpha(t)$ ,  $H(t, 1) = \beta(t)$  et  $H(0, s) = H(1, s) = x$ . On écrit  $\alpha \sim \beta$  (à  $A_4$ ) l'ensemble des classes d'équivalence des boucles basées au point  $x$  de  $A_4$ .

Considérons maintenant une loi de produit de boucle consistant à suivre d'abord la première boucle, puis à revenir à  $x$ , à suivre la seconde. Ceci est représenté en définissant ainsi  $\gamma = \alpha * \beta$  comme produit de boucle de  $\alpha$  et  $\beta$ . Le produit des classes d'équivalence dans  $\pi_1$ , à savoir  $[\alpha]$  et  $[\beta]$ , est défini de la même manière par  $[\gamma] = [\alpha][\beta]$ , où  $[\gamma]$  représente la classe d'équivalence des boucles de la forme  $\gamma = \alpha * \beta$ . En ajoutant la boucle d'identité 'Id', simplement définie par  $\text{Id}(t) = x, \forall t \in [0, 1]$ , à cette structure, alors l'ensemble  $\pi_1$  avec l'opération de produit de classe d'équivalence et l'élément d'identité forment un groupe : le premier groupe

<sup>12</sup>Un homéomorphisme est défini comme une application continue inversible avec inverse continu. Agir un homéomorphisme  $O$  sur  $X$  ou sur  $Y$  revient à décomposer l'application continue initiale  $\alpha : XY$  sous la forme  $\alpha : X \rightarrow O(X) \times Y$  ou  $\alpha : XY$  inchangé. Une telle décomposition sort de la classification

d'homotopie (également appelé groupe fondamental) de  $M$  en  $x_{(i)}$ .

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{for } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t - 1) & \text{for } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases} \quad (11.34)$$

Le groupe fondamental est défini sur tout l'espace : si  $M$  est relié par des arcs, comme c'est le cas pour les variétés sous vide les plus intéressantes, et  $(\alpha, x_0) \in M^2$ , alors  $\pi_1(A_4, j; i) \sim \pi_1(A_4, X_2)$ , que l'on dénoté plus simplement par  $\pi_1(A_4)$ . Notez de plus que si  $X$  et  $Y$  sont homéomorphes et connectés au chemin, alors  $\pi_1(X) \sim \pi_1(Y)$ . En d'autres termes, le premier groupe d'homotopie est un invariant topologique.

### 11.6.3 Groupe d'homotopie

#### 11.6.3.1 Définitions

Il est possible de définir des groupes d'homotopie de rang arbitraire  $p \in \mathbb{N}$ , qui se réduit au groupe fondamental dans le cas particulier  $p = 1$ . De la même manière une boucle est définie comme une application du segment  $[0, 1]$  dans  $M$  avec identification des extrémités, nous appelons  $p$ -loop une application continue du cube à  $p$  dimensions dans  $M$  dans laquelle le contour est identifié avec un point de  $M$ . Par exemple, une boucle à 2 dimensions est homéomorphe à la surface de la sphère à 2 dimensions.  $S^2$ .

On peut montrer [20] que l'ensemble des classes d'équivalence des  $p$ -boucles, avec une opération produit généralisant celle définie en (11.34) et un élément neutre est toujours un groupe : le groupe d'homotopie de rang  $p$  de  $A_4$ , noté  $\pi_p(A_4)$ .

La classification est complétée par le groupe d'homotopie d'ordre zéro,  $\pi_0(A_4)$ , qui inclut l'ensemble des sous-ensembles disjoints de  $A_4$ . Par exemple, un espace connecté au chemin est un espace pour lequel  $\pi_0 \sim \{\text{Id}\}$ , tandis que  $\pi_0(Z) \sim \mathbb{Z}$ .

#### 11.6.3.2 Propriétés

Une propriété intéressante du premier groupe d'homotopie est liée aux groupes de produits. Nous avons

$$\pi_1(Z) \sim \pi_1(X) \oplus \pi_1(Y), \quad (11.35)$$

c'est-à-dire que le groupe fondamental d'un produit de groupes est isomorphe à la somme directe des groupes fondamentaux de chaque groupe séparé. Cette propriété nous permet d'identifier rapidement et facilement les groupes d'homotopie des espaces quotients impliqués dans les théories réalistes de grande unification.

Un exemple particulièrement utile, notamment pour les cordes cosmiques, est le cas où l'espace topologique considéré est le groupe de jauge  $U(1)$ , c'est à dire le cercle  $S^1$  auquel il est topologiquement équivalent (isomorphe). Les différentes boucles qu'il est possible de construire sur ce cercle sont caractérisées par le nombre de fois que la boucle en question s'enroule autour du cercle sachant qu'une boucle qui n'en fait pas le tour complet peut être continuellement déformée jusqu'à un certain point. De plus, si nous fournissons une orientation vers le

Par  $A \sim B$  on dénote le fait que  $A$  et  $B$  sont isomorphes.

cercle, de sorte que le sens des aiguilles d'une montre n'est pas équivalent au sens inverse des aiguilles d'une montre, nous pouvons caractériser complètement la classe d'équivalence d'une

boucle donnée avec un entier relatif. Nous avons donc

$$7T\text{-JL } [U(1)] - 7T \text{ ! } (S^1)^k \tag{11.36}$$

Cette relation est généralisable au cas de la sphère de dimension  $p$   $S^p$  à laquelle peut souvent se réduire l'étude des espaces d'intérêt. Nous trouvons

$$(11.37)$$

avec tous les groupes d'homotopie de rang inférieur étant triviaux, ie  $7q, (S^p) \sim \{Id\}$  pour tous  $k < p$ .

11.6.3.3 Classification des défauts

Muni de ces définitions et propriétés, il est maintenant facile d'établir une classification des différents défauts pouvant se former lors d'une transition de phase de brisure de symétrie suivant le schéma (11.12). Le tableau 11.1 résume les propriétés que nous dérivons maintenant.

**Tableau 11.1** Groupe d'homotopie du vide et défauts possibles.

| Défaut          | Groupe d'homotopie non trivial | Exemple                   |
|-----------------|--------------------------------|---------------------------|
| Des murs        | $\pi_0$                        | $Z_n \rightarrow \{Id\}$  |
| Cordes          |                                | $U(1) \{Id\}$             |
| Monopôles       | $7T_2$                         | $SO(3)U(1)$               |
| <b>Textures</b> | $7T_3$                         | $SO(4) \rightarrow SO(3)$ |

Les murs de domaines se forment lorsque différents domaines peuvent apparaître, comme dans le cas de la symétrie  $Z_n$  du modèle (11.13). De même, si le vide résultant de la rupture comporte de nombreux éléments distincts de même énergie, alors des domaines se formeront à nouveau. En d'autres termes, des murs existeront nécessairement en brisant une symétrie discrète, avec un groupe d'homotopie d'ordre zéro non trivial  $7\pi_0(A_4)$ .

Le cas des fines vortex dans le modèle abélien de Higgs fournit un exemple de rupture avec un groupe fondamental non trivial de la variété à vide. Cette propriété est facilement généralisable : si  $7T_1(JM) / \{Id\}$ , des cordes cosmiques résulteront de la transition de phase.

Les monopôles, en revanche, se forment systématiquement dès que le deuxième groupe d'homotopie du vide est non trivial, et que les textures résultent des propriétés du troisième groupe d'homotopie. Nous sommes ici contraints par le nombre de dimensions spatiales. Si l'espace avait plus de trois dimensions, non seulement il pourrait exister des configurations de textures topologiquement stables, mais aussi des défauts de dimensions plus élevées, impliquant des groupes d'homotopie de degrés plus élevés. Dans un espace physique de dimension  $n$ , seuls les défauts de groupes non triviaux  $7T_p$  avec  $p < n$  peuvent exister.

11.6.4 Défauts semi-topologiques

Chaque situation étudiée jusqu'à présent faisait intervenir les propriétés topologiques du vide, c'est-à-dire la topologie du groupe de transformations qui laisse invariant le minimum du potentiel. Cette classification n'impliquant pas de considérations sur l'énergie cinétique, c'est-à-dire les termes de gradient dans le Lagrangien, elle ne fait pas de distinction entre les invariances globales (rigides) et locales (de jauge). Il existe néanmoins un cas où cette distinction est importante, c'est celui où les invariances locales et globales sont brisées de telle

manière que le vide est trivial, mais tel que des configurations cinétiquement stables, appelées défauts « semi-topologiques », peuvent se former ; cela implique des invariances globales.

Un exemple où apparaissent ces défauts semi-topologiques est donné par le Lagrangien (11.6) pour un doublet,  $\psi$ , de  $SU(2)$ . La symétrie est alors  $SU(2)_{\text{global}} \times U(1)_{\text{local}}$  puisqu'il n'y a pas de boson de jauge associé à la symétrie  $SU(2)$ . Lors de la rupture de symétrie, le champ de Higgs prend une valeur d'espérance de vide non nulle et le boson de jauge  $B_{\mu}$  devient massif. Cependant, contrairement au modèle dans lequel seule la symétrie  $U(1)$  était impliquée, il reste toujours une symétrie  $U(1)_{\text{global}}$  après la rupture de symétrie. La transformation de symétrie initiale était en fait

$$0 = e^{iW_{\alpha}} \psi - \text{et} \quad B'_{\mu} = B_{\mu} - \frac{1}{g} \partial_{\mu} \chi(z),$$

où  $\chi$  est un vecteur *constant* de  $SU(2)$ ,  $\sigma_i$  les matrices de Pauli, et  $a$  une fonction arbitraire des coordonnées.

Pour minimiser le potentiel, la somme des carrés du module du doublet de Higgs doit être fixée. Pour cela, on peut par exemple choisir d'annuler l'une des composantes, et fixer le module de l'autre. Choisisr

$$\phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix}$$

il y a encore une invariance sous les transformations

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi \exp \left[ i\xi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

$\xi$  étant une constante arbitraire. Ces transformations forment un groupe  $U(1)_{\text{global}}$  et le schéma de rupture de symétrie est donc ici  $SU(2)_{\text{global}} \times U(1)_{\text{local}} \rightarrow U(1)_{\text{global}}$ . Le vide  $M$  a donc essentiellement la structure de  $SU(2)$ , qui est topologiquement équivalente à une 3-sphère qui a une groupe fondamental trivial, puisqu'il est simplement connexe. Il ne devrait donc y avoir aucune chaîne stable dans ce modèle.

En fait, la 3-sphère du vide peut être considérée comme le produit direct de la sphère  $S^2$  et du cercle  $S^1$ , ce dernier correspondant à l'invariance de jauge  $U(1)$ . On pourra alors étudier plus précisément comment il est possible d'évoluer dynamiquement d'une configuration de domaine à une autre. Passer d'un point à un autre sur la 3-sphère ne nécessite aucune énergie potentielle, puisque la 3-sphère est par définition une surface d'énergie potentielle constante. De même, se déplacer le long d'un cercle  $S^1$  ne nécessite ni énergie potentielle ni énergie cinétique puisque l'invariance  $U(1)$  initiale est mesurée. Cependant, passer d'un cercle  $S^1$  à un autre sur la sphère  $S^2$  coûte de l'énergie cinétique. En conséquence, on peut imaginer des configurations de champ le long desquelles  $\langle t \rangle$  reste sur un et un seul cercle, donc au même point de  $SU(2)$ , tout en formant une ligne vortex. Ce sera simplement équivalent à la structure normale d'une chaîne, mais avec une composante du doublet fixée à zéro, sans possibilité de modification. De telles configurations existent effectivement, mais il est Il n'est pas certain qu'elles se forment avec la même probabilité que les configurations purement topologiques. Puisque ces configurations semi-topologiques ne sont stables que pour des raisons dynamiques, la symétrie  $SU(2)$  peut être mesurée, mais avec une constante de couplage suffisamment différente de celle du  $U(1)$  pour qu'il y ait des différences notables entre les termes de jauge du différents facteurs de groupe.

Le modèle électrofaible standard a exactement le type de structure expliqué ci-dessus, et

nous nous attendons donc à trouver des cordes formées selon ce schéma. Pour le modèle standard, ces cordes ne sont stables que si la masse du boson de Higgs est inférieure à celle du boson vecteur le plus léger, en contradiction avec les contraintes expérimentales. De plus, en raison de la valeur réelle des constantes de couplage de jauge, il s'avère que si les cordes ainsi formées étaient stables, elles ne pourraient l'être qu'à la condition que leur nombre d'enroulement soit  $n = \pm 1$ .

## 11.7 Les murs en cosmologie

Même si les défauts sont génériques dans les théories de la physique des particules, en pratique ils sont prédits pour des transitions de phase qui se sont produites autour de la rupture de la grande unification, c'est-à-dire une échelle d'énergie inaccessible dans les accélérateurs. C'est donc surtout en cosmologie que ces objets peuvent avoir une certaine pertinence et jouer un rôle que nous allons maintenant élucider. Ce sont à leur tour les observations cosmologiques qui permettront d'imposer des contraintes sur les défauts et donc sur les schémas de bris de symétrie à haute énergie qui les prédisent.

Le cas des murs de domaines est le plus simple à traiter dans le contexte de la cosmologie. Compte tenu de la longueur de corrélation  $\xi$  sur laquelle ils se forment, on s'attend à trouver des murs de toutes tailles dans l'Univers. L'énergie par unité de surface calculée en (11.20) conduit à  $\rho_{\text{wall}} \sim T^3 \sim 4 \times 10^{48} \text{ g-cm}^{-2}$ , pour une échelle GUT d'ordre  $77 \sim 10^{15} \text{ GeV}$ . Pour un mur sans structure s'étendant à travers l'Univers, c'est à dire sur une taille typique comparable à la distance de Hubble  $HQ^{-1}$ , cela conduit à une densité d'énergie totale  $\rho_{\text{wall}} \sim U_{\text{wall}} \sim 10^{20} \text{ g-cm}^{-3}$ . Le paramètre de densité de la composante paroi de domaine est donc de l'ordre

$$\rho_{\text{wall}} \sim 10^{49} \times (10^{15} \text{ GeV}) \sim (100 \text{ MeV})^4 \quad (11.38)$$

ce qui nécessite qu'aucune transition de phase produisant une paroi n'ait pu se produire à une échelle d'énergie supérieure à 100 MeV, une échelle qui est en fait bien testée dans les accélérateurs. Cette première estimation approximative, bien que peu réaliste, donne une bonne indication de l'ampleur du problème.

### 11.7.1 Distribution et évolution

La contrainte (11.38) repose sur l'hypothèse qu'il pourrait encore exister aujourd'hui une paroi de domaine planaire s'étalant sur une distance de l'ordre du rayon de Hubble. En effet, juste après la transition de phase, l'échelle caractéristique des inhomogénéités le long des parois doit être de l'ordre de la longueur de corrélation. Cette longueur donne donc une estimation du rayon de courbure moyen de la paroi. Quant à leur répartition dans l'Univers, il s'agit d'un problème de percolation qui dépasse le cadre de cet ouvrage [21] dont la conséquence bien connue est la suivante : peu après la transition, le Système doit être dominé par un grand mur à la dimension extrêmement structure complexe qui s'étend à travers

tout l'Univers. Le reste est réparti entre quelques murs fermés de taille comparable à la longueur de corrélation, la probabilité d'avoir un mur de plus grande taille étant exponentiellement supprimée.

Comme les murs ont une densité et une tension superficielle importantes, le mur fermé commence immédiatement à se contracter et finit par se dégrader en peu de temps, de sorte que leur contribution, déjà faible au départ, devient rapidement complètement négligeable. Les grandes parois sont soumises à deux effets : la force de tension qui tend à les accélérer rapidement jusqu'à des vitesses relativistes, et le frottement dû à la densité de matière existante  $p$ . Si  $\langle v \rangle$  est la vitesse moyenne des particules du fluide environnant lorsqu'elles heurtent la paroi, alors la force par unité de surface agissant sur la paroi est  $F/S = Fp\langle v \rangle R$ , où  $R$  est la vitesse d'une courbure locale perturbations de la paroi et  $T$  un coefficient numérique déterminé par les sections efficaces d'interaction de la paroi avec les particules de l'environnement. Pour un mur sans structure,<sup>9</sup> la tension du mur est simplement donnée par  $U_{\text{wall}}/R$ . L'évolution de  $R$  peut être évaluée dans un régime de suramortissement dans lequel on considère que le terme de frottement est très important pour que le mur soit pratiquement en équilibre. Nous postulons donc un équilibre entre ces forces, de sorte que

This régime is reached during a phase dominated by a perfect fluid (in general, rayonnement), pour lequel la densité est  $8\pi G_N p - 3H^2$ , et le facteur d'échelle se comporte comme  $a \propto t^a$ . Cela implique

$$32\pi G_N t^2 dt$$

dont la solution

$$R \sqrt{R_0^2 + \frac{64\pi G_N U_{\text{wall}}}{9\Upsilon} t^3} \rightarrow \frac{8}{3} \sqrt{\frac{\pi G_N U_{\text{wall}}}{\Upsilon}}$$

permet de déduire la vitesse caractéristique

$$R \sqrt{\frac{t}{t_*}}, \quad \text{with} \quad \Upsilon \equiv \frac{T}{16\pi G_N U_{\text{wall}}}$$

Comme au bout d'un temps  $t^*$  cette vitesse est de l'ordre de la vitesse de la lumière, l'approximation du régime suramorti n'est plus valable.

La fonction  $R(t)$  est interprétée comme le rayon de courbure typique de l'ensemble des parois présentes dans l'Univers au temps  $t$ , de sorte que la densité d'énergie contenue dans ces parois est simplement l'énergie de surface multipliée par l'aire de cette surface, comparée à le volume qu'il occupe. En d'autres termes, nous trouvons  $p_{\text{wall}} = U_{\text{wall}}/R^3 = U_{\text{wall}}/R^3$ . En divisant par la densité critique, on trouve

$$\Omega_{\text{wall}}^{\text{c.a.}} = \frac{\Upsilon}{4\alpha^2} \sqrt{\frac{t}{t_*}}, \quad (11.39)$$

<sup>9</sup>Some walls have a structure [22] due to some currents that can propagate along them: it is a mechanism similar to that used for the superconducting strings described below, but less interesting in view of the strong constraints on the existence of a wall.

(où 'o.d.' signifie overdamped) qui montre que les murs dominent l'Univers dès que  $t$  s'approche de  $t_c$ , si  $T \sim 1$  (c'est strictement le cas du rayonnement pour lequel  $a = 1$ ).

La valeur de  $T_c$  a été estimée notamment pour le cas du rayonnement. Dans les grandes théories unifiées, le photon appartient à un multiplet de bosons de jauge dont les autres membres sont très massifs. Selon la manière dont la symétrie est brisée, le photon, c'est-à-dire le champ de jauge sans masse restant après la rupture de symétrie, n'est pas nécessairement la même composante du multiplet donné de chaque côté de la paroi, sur laquelle la probabilité d'interaction du photon avec le mur en dépend fortement. Cette question a été résolue en 1974 [23] : Everett a montré que si la composante du photon d'un côté du mur correspondait à un vecteur massif de l'autre côté, alors la probabilité de réflexion est grande, et le coefficient  $T$  est d'ordre unité. Dans le cas contraire, le mur est pratiquement transparent à la lumière et à  $T \sim 1$ .

Différents régimes ont été étudiés outre celui suramorti qui vient d'être évoqué, et toujours avec le même résultat : au bout d'un temps  $U$ , l'Univers est dominé par les murs. Indépendamment de la valeur de  $T_c$ ,  $t^*$  est un temps extrêmement court du point de vue cosmologique.

### 11.7.2 Contraintes d'observation

La domination de l'Univers par un réseau de murs de domaines, ou la simple existence d'un tel mur encore aujourd'hui, entraîne de nombreuses conséquences observables, qui ne sont pas observées, et se transforment ainsi en contraintes très sérieuses sur les théories prédisant leur existence. Par exemple, un ensemble de murs agit, en faisant la moyenne des composantes du tenseur énergie-contrainte, comme un fluide parfait avec une équation d'état  $w = -1/3$  conduisant à une expansion accélérée  $a \propto t^{2/3}$ . Même les observations récentes de l'accélération actuelle de l'Univers sont incompatibles avec une telle valeur, comme discuté au chapitre 12.

L'estimation (11.38) de la densité des parois est en réalité trop grossière en termes de densité globale puisqu'elle repose sur l'existence de parois s'étendant à travers l'Univers tout entier. Une telle configuration est évidemment en total désaccord avec le principe cosmologique puisqu'elle produirait un plan préféré. Pour que ce principe reste respecté,  $Q_{\text{walls}}$  doit être petit. Mais comme les photons ont la possibilité d'interagir avec la paroi, ne serait-ce que par gravité, cela induirait des anisotropies de température dans le fond micro-onde. L'équation (11.38) doit donc être remplacée en indiquant que l'échelle d'énergie de rupture de symétrie ne doit pas dépasser l'ordre du MeV.

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{\text{walls}} \sim 10^{-6} \times \left(\frac{\eta}{1\text{MeV}}\right)^3, \quad (11.40)$$

Pour conclure, en dehors des situations particulières, on peut dire qu'il est généralement admis qu'une théorie présentant des symétries discrètes brisées, et produisant ainsi des murs lors de la transition de phase correspondante, doit également inclure un mécanisme pour détruire ces murs afin de ne pas être exclue par observations cosmologiques. La méthode la plus simple pour construire une grande théorie unifiée qui soit satisfaisante de ce point de vue est de faire en sorte qu'aucun mur ne soit créé. Cela limite le nombre de théories possibles, mais pas de manière significative.

## 11.8 Monopôles cosmologiques

Les monopôles, comme les murs, sont extrêmement contraints et conduisent dans la plupart des cas à des catastrophes cosmologiques inévitables. La différence avec les murs, c'est qu'il ne semble pas possible de combiner la grande unification avec l'absence constatée de monopoles.

### 11.8.1 Les monopoles GUT sont inévitables

Supposons que le groupe d'unification soit  $Q$ . Nous le choisissons généralement tel que ses deux premiers groupes d'homotopie soient triviaux :  $\pi_1(Q) \sim \pi_2(Q) \sim \{Id\}$ . Cependant, le modèle standard de la physique des particules indique qu'à basse énergie, il doit subsister une invariance locale  $U(1)$  correspondant au secteur électromagnétique, puisque les contraintes expérimentales montrent que le photon est sans masse. De plus, nous pouvons montrer l'implication

$$\pi_1(Q) \sim \pi_2(Q) \sim \{Id\} \Rightarrow \pi_n(Q) \sim \pi_{n-1}(Q) \quad (H), \quad (H.41)$$

où nous avons utilisé les conventions (11.12).

Puisque dans le schéma général de rupture de symétrie, quel qu'il soit, qui mène des symétries de grande unification à celles actuellement observées, on retrouve un  $U(1)$  ininterrompu à la fin, cela signifie qu'il existe nécessairement un tel facteur  $U(1)$  dans la séquence de rupture. Puisque  $U(1)$  est topologiquement équivalent à un cercle, son premier groupe d'homotopie est  $\mathbb{Z}$ , de sorte que, du fait de (11.35) appliqué à  $n=1$ , le deuxième groupe d'homotopie doit contenir un facteur  $\mathbb{Z}$ . En conséquence, indépendamment de la grande théorie unifiée, on a

$$\pi_2(Q) \sim \pi_1(Q) \sim \mathbb{Z} \quad (H), \quad (11.42)$$

et l'apparition de monopoles est inévitable.

### 11.8.2 Le problème du monopole

Le problème de l'excès de monopôle n'est pas, comme dans le cas des murs, dû à la masse ou aux perturbations d'un seul monopôle, mais à leur densité et à leur évolution. La seule façon de faire disparaître les monopôles produits lors de la transition de phase est d'annihiler toutes les paires de monopôles et d'antimonopoles. Les couples initialement très proches les uns des autres vont s'annihiler relativement rapidement, mais la petite densité restante doit se disperser longtemps dans le milieu environnant avant de parvenir à se désintégrer : c'est un processus très lent.

#### 11.8.2.1 L'argument de la causalité

Dans de nombreuses références, on trouve un argument de causalité permettant d'estimer une borne inférieure sur la densité de monopoles présente dans l'Univers. Cet argument a surtout une valeur historique puisqu'il s'appuie sur l'existence d'un horizon cosmologique, et montre l'existence d'un problème sans même calculer efficacement la densité réelle des monopoles. Malheureusement, si le problème de l'horizon est résolu par quelque moyen que ce soit, alors l'argument ne tient plus et il faut recourir à un calcul plus complet. Nous le présentons cependant par souci d'exhaustivité.



Supposons donc que l'Univers commence son évolution avec une singularité à  $t = 0$ , suivie d'une phase dominée par le rayonnement, à  $oc \sqrt{t}$ . Dans ce cas, la causalité fournit une borne supérieure sur la longueur de corrélation  $\mathcal{L}$  du champ de Higgs responsable de l'apparition des monopôles par  $\mathcal{L} < d_H$ , où la taille de l'horizon  $d_H$  est donnée par (3.107). En utilisant (4.19), on obtient ainsi

$$\mathcal{L} < \sqrt{\frac{45}{4\pi^3 g_* G_N}} T_c^{-2}$$

où  $T_c$  est la température à la transition de phase ou celle au début de la nucléation de la bulle, selon l'ordre de la transition. Soit  $p$  la probabilité d'une configuration de champ non triviale dans un volume de corrélation ;  $p$  dépend principalement de la structure topologique du vide et est, pour la plupart des théories étudiées jusqu'à présent, un nombre d'ordre  $10^{-1}$ . Puisque la densité initiale de monopôles produits à la transition est de l'ordre  $n_M \sim p \mathcal{L}^{-3}$ , on retrouve une densité initiale trop élevée pour être suffisamment réduite par l'évolution, comme on le verra plus loin.

$$\left. \frac{n_M}{T^3} \right|_{\text{ini}} \approx M(T_c) \gtrsim p \quad 10^{-10}$$

#### 11.8.2.2 Densité initiale

La densité initiale réelle peut être calculée de manière plus efficace sans recourir à l'argument de la causalité, d'autant plus que cet argument n'aurait eu aucun rôle à jouer si le problème de l'horizon avait été résolu avant la transition de phase.

La densité des défauts produits dépend de l'ordre de la transition. En particulier, nous pouvons trouver des valeurs des paramètres pour lesquels la densité initiale est aussi petite que nous le souhaitons si la transition est fortement du premier ordre. Cela est dû au fait que, pour ces paramètres, la température doit être très faible par rapport à la température critique avant que la nucléation ne commence à être efficace. Dans ce cas, l'énergie contenue dans chaque bulle peut être assez faible, alors que la masse du monopôle qui se forme reste la même, et on s'attend donc à ce que la probabilité de formation soit réduite. Une telle transition de phase du premier ordre donne une première solution au problème du monopôle.

Si la transition est du second ordre, alors proche de la transition, les fluctuations du champ responsable de l'apparition des monopôles sont très importantes et de nombreux défauts apparaissent, rapidement éliminés par annihilations de paires jusqu'à ce que la température descende au niveau où les fluctuations sont négligeables. Cela donne une distribution de monopôles qui évoluera rapidement par annihilation des paires voisines. En effet, lorsqu'un monopôle et un antimonopôle sont mis en contact, avant de s'annihiler, ils forment un état lié appelé monopolonium [24] semblable à un atome d'hydrogène mais dont l'interaction électrostatique est remplacée par une interaction magnétostatique. Contrairement à l'atome d'hydrogène, ce monopolonium est formé de deux particules structurées et capables de s'annihiler puisque la condition de stabilité topologique du monopôle est annulée par celle de l'antimonopôle. Plus le couple initial est dosé, plus la désintégration du monopolonium est rapide et dans les conditions initiales, on peut négliger ce temps caractéristique.

Après les premières annihilations, il reste une distribution diluée avec une longueur de corrélation supérieure à la longueur de capture radiative (considérée comme étant le mécanisme dominant pour former des paires susceptibles de se désintégrer). Il existe en réalité d'autres mécanismes, plus efficaces [25], mais les conclusions restent inchangées si on les prend en compte et ne font finalement que compliquer les calculs. A une température  $T$ , la distance de capture d'un monopôle par un antimonopôle est donnée par  $d_c = \langle r^2 \rangle / (4\pi T) \sim 75/T$ , où  $g$  est la charge magnétique monopôle, de l'ordre de  $27 \hbar / q$ , et  $q$  la charge électrique fondamentale réduite dans la théorie considérée [ie  $q^2 / (27\hbar^2) \sim y_j$ ]- La distribution qui nous intéresse ainsi a, juste après la transition de phase qui l'a produite, une densité numérique de monopôle par volume unitaire  $\sim (4\pi / g^2)^3 T^3 10^{-6} T^3$ , égal à celui des antimonopoles.

$$\Delta + 3Hn_M = -Dn_M^2, \quad (11.43)$$

### 11.8.2.3 Evolution of a gas of monopoles

The evolution of this distribution, which is assumed to be isotropic, is subject to two effects: the annihilation between monopoles and antimonopoles and the dilution under the effects of the expansion, and both these effects cancel. The equation governing the evolution is thus [26,27]

où le coefficient de diffusion  $D$  caractérise l'annihilation (ceci est similaire à notre étude du chapitre 4).

A haute température, le libre parcours moyen,  $\Lambda_M$ , des monopôles est supérieur à  $d_c$ , et le taux d'annihilation est simplement donné par le flux monopôle  $F$  dans le plasma primordial, qui s'obtient par la relation  $F = g^2 n_M r / M_M$ , où  $T$  représente le temps caractéristique entre deux collisions pendant lequel le monopôle est diffusé selon un angle important et  $M_M$  est la masse du monopôle. Le coefficient de diffusion  $D$  s'avère être le flux de monopôles divisé par la distribution,  $D = F/n_M$ .

Lors d'une collision entre une particule légère du plasma, ayant une énergie essentiellement égale à la température du plasma  $T$  et à la charge  $q$ , et un monopôle de charge magnétique  $g$ , la section efficace de diffusion est

Le monopôle est très faiblement diffusé à chaque collision, de sorte qu'il devrait y avoir environ  $M_M/T$  collisions avant que la diffusion monopôle ne soit importante. D'après la relation du tableau 4.4, la densité numérique des particules de chaque espèce sur lesquelles les monopôles peuvent se disperser est  $n_{p \text{ asma}} = 3\zeta(3)T^3/4\pi r^2$ , DE SORTE que le temps caractéristique après lequel un monopôle est dévié est  $T = (M_M/T)(n_{p \text{ asma}} \text{ cr})^{-1} = M_M/(BT^2)$ , où  $B = dM(\hbar^3/4\pi^2)$ . Si  $Q_i \sim 10$  (la somme des carrés des charges prenant en compte le nombre réel de degrés de liberté  $g_i$  à cet instant), et on trouve ainsi

$$BT^2 \quad (11h44)$$

Cette relation est valable jusqu'à  $\Lambda_M \sim d_c$ .

Once the time  $T$  is known, the mean free path can be calculated as  $\lambda_M = (u_M)r$ , where  $(u_M) = y/TM_M$  is the thermal speed of the monopoles. As a result, the temperature  $T_f$  below which the coefficient  $D$  is no longer well estimated by (11.44) turns out to be given by  $T_f = M_M B^{-2} (4 - 7T/p^2)^2 \sim$

The dominant mechanism is then that of thermal capture. Without going into too much detail, we find [25] that the cross-section for this process is  $\sigma \propto T^{-7/5}$ , and then  $D = \sigma r (u_M) \propto T^{-9/10}$ . If other mechanisms play a rôle, one can find a different power law, but still with exponent smaller than unity. In order to study the general case, we will thus set

$D = \sim k$  où  $A$  est un facteur numérique (sans dimension) prenant en compte la microphysique de la collision entre les monopôles. L'évolution de leur distribution dépend fortement de la valeur de  $p$ .

Nous supposons maintenant que l'évolution ci-dessus se produit pendant une phase pour laquelle la température  $T$  diminue avec le facteur d'échelle  $T \propto a^{-1}$ , de sorte que  $T/T = -H$ . Le facteur de Hubble s'exprime par (4.19), et en utilisant (4.21) entre le temps et la température, on peut réécrire (11.43) sous la forme

(11.45) avec  $C^2 = 4TT^3 g^* G_N/45$ , et où l'on constate que le terme linéaire dans  $n_M$  disparaît. La relation (11.45) peut être intégrée et on obtient

où  $T_{nj}$  est la température à laquelle la distribution monopôle commence à évoluer comme (11.43);  $T_{ni}$  est de l'ordre de  $T_c$ , la température de la transition de phase.

Considérons d'abord le cas de (11.44) avec  $p = 2$ . La solution (11.46) indique que les

$$\frac{AC}{(P \sim} \quad \begin{matrix} p-1 & p-T \end{matrix} \quad (11.46)$$

annihilations ne s'arrêtent jamais, et l'évolution conduit à

(11h47)

indépendamment des conditions initiales tant que  $T < T_{dans i}$ , ce qui est bien le cas si  $T_{ini} \sim M_M/g$  et  $T \sim T_f$ , correspondant à la deuxième partie de cette équation.

A partir de là, le rapport  $n \propto JT^3$  n'évolue jamais puisque  $p < 1$ . Cependant, cette phase inclut celle pendant laquelle doit se produire la nucléosynthèse, dont on sait qu'elle ne peut être dominée par autre chose que le rayonnement. En fait, pour que les monopôles ne dominent pas l'Univers à la nucléosynthèse, il aurait fallu

$$T^3 \frac{1}{IT} = 1 \text{ MeV} \sim < 10^{-19} \quad \backslash 10^{16} \text{ GeV } J \quad -je$$

en contradiction avec la prédiction précédente.

### 11.8.3 Solutions possibles au problème du monopôle

De nombreuses solutions à l'excès cosmologique monopôle ont été proposées. Le plus simple est de supposer que la transition de la phase de grande unification n'a produit aucun monopôle. Bien que cela ne soit pas impossible, il s'agit d'une solution difficile à croire à moins que la transition ne soit fortement de premier ordre avec des paramètres réglés de manière à ce que le taux de production initial soit effectivement extrêmement faible. Il se peut aussi que la transition n'ait jamais eu lieu et donc que la symétrie ait toujours été brisée [28]. Dans ce cas, les paramètres de la théorie doivent être à nouveau ajustés afin de s'assurer que la production de monopôles thermiques n'induit pas le même problème [29]. Toutes ces hypothèses nécessitent des valeurs très précises des paramètres : c'est une solution possible mais, en général, pas considéré comme très satisfaisant.

#### 11.8.3.1 Défauts multiples

Un cas non encore abordé jusqu'à présent est celui des défauts hybrides, c'est à dire composés soit d'une paroi délimitée par un fil, soit d'un fil se terminant par deux monopôles (ou plutôt un monopôle et un antimonopôle), qui peuvent apparaître si deux groupes d'homotopie du le collecteur à vide n'est pas trivial. Une théorie peut aussi avoir des murs et des monopôles, produisant ainsi des défauts multiples, mais pas hybrides. Enfin, il existe des cas où les trois premiers groupes d'homotopie ne sont pas triviaux et tous les défauts possibles peuvent être produits.

Lorsque des murs et des monopôles sont produits, on peut imaginer que les murs, lors de leur mouvement dans l'Univers, interagissent avec les monopôles en les « balayant » [30]. Lorsqu'un monopôle pénètre dans un mur, il devient topologiquement instable, dans le sens où le champ de Higgs à l'intérieur du mur où la symétrie est restaurée doit disparaître. Le monopôle se désintègre ainsi à l'intérieur du mur. Afin de ne pas remplacer le problème des monopôles par celui, plus grave, des murs, une fois que tous les monopôles initialement présents auront été absorbés, les murs eux-mêmes devront alors disparaître eux aussi. Cela est possible à condition que la symétrie discrète qui les produit ne soit qu'approximative. Le modèle le plus simple auquel on puisse penser, basé sur le groupe d'unification SU(5), permet déjà une généralisation cohérente de ce scénario. On peut aussi imaginer que des cordes se forment plus tard, créant des trous dans les murs. Ces trous s'agrandissent ensuite jusqu'à dissiper complètement l'énergie des parois en rayonnement. Dans ce dernier cas, non seulement les problèmes de monopôle et de mur sont résolus, mais nous obtenons également un réseau de cordes pouvant contribuer aux perturbations primordiales.

Une autre idée, proposée par Langacker et Pi [31], est d'imaginer un schéma de rupture dans lequel la symétrie  $U(1)_{\text{eic}}$  se brise spontanément à un instant donné. Durant cette phase, monopôles et antimonopoles sont nécessairement liés par des cordes locales formées à partir du Higgs qui brise le  $U(1)_{\text{eic}}$  et le photon. Cela a pour effet d'augmenter considérablement la probabilité de désintégration des paires puisque c'est désormais la tension des cordes qui attire les deux extrémités l'une vers l'autre. Ces mécanismes sont discutés en détail dans la réf. [16],

#### 11.8.3.2 Inflation

Toutes ces solutions présentent un inconvénient majeur, du moins du point de vue de la plupart des cosmologistes. Ils dépendent du schéma explicite de rupture de symétrie, et donc des représentations des champs de Higgs présents dans la Nature, ainsi que des valeurs des paramètres de microscopie. À cet égard, la solution proposée par l'inflation, ayant l'avantage de résoudre le problème de manière indépendante de la physique microscopique sous-jacente,

semble particulièrement privilégiée. En outre, il est économique, car il résout également les autres énigmes cosmologiques du scénario standard du Big-Bang chaud (chapitre 8).

Dans le cas de l'inflation, l'Univers observable tout entier provient d'un volume contenant au plus quelques monopôles. Si la température de réchauffage est suffisamment basse, ce qui est le cas dans les modèles acceptés comme compatibles avec les données d'observation, alors la production thermique reste limitée à un rythme acceptable.

On peut également considérer le cas où les monopôles se produisent après la période d'inflation, si certaines conditions sont respectées, comme le fait que la transition soit fortement de premier ordre. Il existe alors de fortes contraintes sur les paramètres inconnus, expliquant pourquoi il est considéré comme plus satisfaisant de recourir simplement à une phase d'inflation.

## 11.9 Cordes cosmiques

Le seul défaut topologique qui ne produit pas de catastrophe cosmologique est la ligne tourbillonnaire. En fait, contrairement aux autres défauts, les cordes peuvent atteindre un régime de « mise à l'échelle » (expliqué plus tard) dans l'Univers, de sorte qu'elles ne risquent jamais de dominer le contenu global de matière à condition que leur contribution initiale ne domine pas déjà. De plus, ils peuvent produire des fluctuations métriques susceptibles de servir de sources à la formation de la structure à grande échelle. Pendant longtemps, ces modèles ont été considérés comme des concurrents potentiels de l'inflation. Il est aujourd'hui démontré que ces modèles ne pouvaient, à eux seuls, reproduire les observations, et notamment celles du fond diffus cosmologique. Les cordes cosmologiques apparaissent donc davantage comme une possibilité logique testable par des mesures de haute précision (une composante non inflationniste du fond diffus cosmologique, par exemple).

### 11.9.1 Les propriétés générales

#### 11.9.1.1 Schémas réalistes produisant des chaînes

De nombreux schémas réalistes de rupture de symétrie dans les grandes théories unifiées ont été étudiés, en tenant compte de la plupart des contraintes connues de la cosmologie et de la physique des particules. En particulier, nous supposons que l'inflation survient après la rupture de symétrie produisant les monopôles, et se termine par une nouvelle transition de phase : c'est l'inflation hybride (voir chapitre 8).

Parmi l'ensemble des schémas possibles, seuls 34 satisfont aux contraintes cosmologiques si la symétrie initiale est  $SO(10)$ , et 1124 pour  $E_6$ . Tous ces schémas, sans exception, conduisent à la présence de chaînes topologiques stables ! Cela indique que les cordes cosmiques, malgré leur faible contribution au fond diffus cosmologique, sont une prédiction générique de grandes théories unifiées. À partir de là, nous pouvons espérer contraindre ces derniers par observation [32],

Comme nous l'avons montré dans le chapitre précédent, les grandes théories unifiées supersymétriques ont souvent besoin d'un sous-groupe, la parité  $R$ , qui reste ininterrompu. Cette symétrie est nécessaire pour que le proton ait une durée de vie suffisamment longue. Le schéma général auquel nous nous attendons est donc

$$Q \rightarrow \text{----} \rightarrow SU_C(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1) \times Z_2. \quad (11h48)$$

La propriété (11.35) appliquée au groupe d'homotopie d'ordre 0 implique que le groupe

résultant contient un facteur  $7r_0(Z_2) \sim Z_2 / \{Id\}$ . D'après (11.41), nous avons  $\wedge(Ad)^2 Z_2 / \{Id\}$ , et trouvons donc que les chaînes sont inévitables dans ce cadre.

Enfin, des cordes de dimensions cosmologiques ont été suggérées comme une prédiction plausible de la théorie des supercordes (voir chapitre 13).

### 11.9.1.2 Cordes fines

Une corde cosmique est un objet étendu dans une direction, justifiant son nom, dont la largeur  $6r$  est de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde de Compton associée à la masse du champ de Higgs,  $6r \sim m^{-1}$ . Ce rayon, dans le cas d'une corde issue d'une rupture de symétrie de grande unification, est de l'ordre de  $10^{-28} \text{ cm}$ , à comparer aux dimensions cosmologiques sur lesquelles évoluent les cordes. Il convient donc de négliger la largeur totale de la chaîne. On approxime ainsi la corde comme une distribution de Dirac  $S(C^\circ)$ , où les points  $c^{-1}(\mathcal{L})$  décrivent la trajectoire de la corde, la feuille du monde, en fonction de deux coordonnées intrinsèques, l'une temporelle,  $\langle f^\circ = \tau$ , équivalent au temps propre nécessaire à la description de la trajectoire d'une particule libre, et l'autre de type spatial,  $\zeta^{-1} = a$ , pour indiquer la localisation spatiale sur la corde.

Dans l'approximation des cordes minces, le tenseur énergie-impulsion total à 4 dimensions  $T^{\mu\nu}$  de la corde peut alors en général être écrit sous la forme

$$(x^a) = J \quad \backslash x^a - x^a(\mathcal{L}'). \quad (11h49)$$

Au voisinage d'une corde, il est toujours possible de la considérer comme localement droite et alignée selon un axe, disons  $z$ , aux coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  de la section 11.3.2. Une telle corde est décrite par le tenseur énergie-impulsion (11.27), qui devient, dans la limite des petites largeurs,

$$T^{\mu\nu} = U\delta(x)\delta(y) \text{ et } T^{zz} = -T\delta(x)\delta(y),$$

tous les autres composants disparaissent.

### 11.9.2 Effets gravitationnels des cordes

Le tenseur énergie-contrainte d'une corde cosmique dérivé ci-dessus sert finalement de source aux équations d'Einstein. Cela permet de calculer les effets gravitationnels des cordes cosmiques.

#### 11.9.2.1 Métrique et déficit angulaire

Loin de la corde, on peut considérer la solution du vide à symétrie axiale, décrite par la métrique

$$ds^2 = -\hat{f}^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + \hat{G}^2 dy^2 \quad (u = 50)$$

où  $r_h$  est la largeur effective de la chaîne. Les exposants  $a, \beta$  et  $\gamma$  satisfont aux contraintes

$$1 + a + \beta + \gamma = a^2 + \beta^2 + \gamma^2 = l, \text{ où}$$

à ce niveau,  $\gamma$  est une constante arbitraire.

En utilisant la relation  $V^2 \ln(r/r_h) = 27r^5(7/5)y$  en deux dimensions, il est possible de résoudre les équations d'Einstein linéarisées (1.126) pour le tenseur énergie-impulsion des cordes. En supposant que les énergies typiques sont de l'ordre de la grande échelle d'unification  $E_{GUT}$  alors  $G_N U \sim G_N E'^2_{VT} \sim (E_{GGT}/Mp)^2 < 10^{-6}$ . En identifiant cette solution linéaire avec la solution générale (11.50), on trouve, au premier ordre dans  $G_N U$ , [33]

$$a = -1/3 = 2G^{\wedge}UT) + \dots, \quad 5 = 1 + \dots \quad 7 = 1 - 4G_N(G + T) + \blacksquare \bullet \blacksquare,$$

où les ellipses représentent les termes d'ordre  $(G_N G)^2$ .

Pour une chaîne Nambu-Goto,  $U = T$ , on retrouve une métrique qui est majoritairement celle de Minkowski jusqu'au fait que  $7 = 1 - 8T\tilde{G}_N U$ . Ceci s'interprète en renormalisant la variable angulaire, c'est à dire en posant

$$9 = 0.8G'_N \wedge (1 - 4G_{Nm})$$

transformant  $yd0^2$  en  $d(9^2)$ , comme pour une métrique spatialement fiat. Puisque 9 varie entre 0 et  $2-zr$ , 9 varie dans l'intervalle  $0 < 9 < 27r(1 - 4G_N G)$ . La métrique est conique : elle est plat, mais en raison de la plage de variations de 9, il lui manque un angle  $\delta 9 = 8TTG_N U$ .

Considérant deux cercles entourant les cordes et situés aux rayons  $r$  et  $r+dr$  alors la différence des circonférences entre les deux cercles n'est pas  $2\pi dr$  comme pour un espace plat ordinaire, mais

$$\varpi(r) = 2\pi \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{g_{rr}}} \frac{d\sqrt{g_{\theta\theta}}}{dr} \right) = 2\pi \left[ 1 - \sqrt{\gamma} \delta \left( \frac{r}{r_h} \right)^{\delta-1} \right] \simeq 4\pi G_N (U + T),$$

indépendant de la distance  $r$  à cet ordre d'approximation. L'angle  $w$  est appelé angle de déficit.

Un point de définition important : en général, on considère des chaînes sans structure interne, comme c'est le cas de la chaîne Nambu-Goto, ou alors on néglige cette structure interne. L'énergie par unité de longueur et la tension sont deux nombres du même ordre de grandeur, et l'angle de déficit est

$$\mu \equiv \frac{1}{2}(U + T) \implies \varpi \sim 8\pi G_N \mu.$$

(11.51)

C'est la grandeur de référence dans ce qui suit et dans la plupart des ouvrages publiés sur cordes.

### 11.9.2.2 Location gravitationnelle

La présence d'un angle déficitaire autour d'une corde conduit à des mirages gravitationnels qui se manifestent sous la forme d'images doubles (Fig. 11.9). On peut calculer explicitement les trajectoires des rayons lumineux (les géodésiques) passant à proximité d'une corde et en déduire l'angle de déviation  $A$  (voir chapitre 7). Nous trouvons [33]

$$A = 47rG_N^{\wedge} + O \left[ \left( G_N^2 \mu^2 \ln \frac{b}{r_h} \right) \right]$$

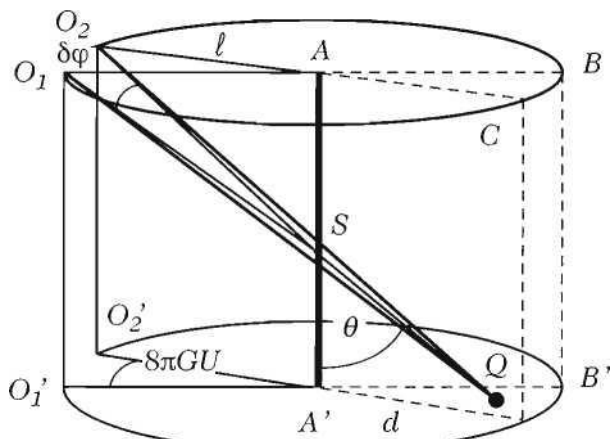


**Fig. 11.9** Angle manquant autour d'une corde droite. La corde se situe le long de l'axe  $AA'$  et on identifie les plans  $AA'CAO_1$  et  $AA'O_1O_2$ , séparés par un angle  $8\pi G_N t \sim 8\pi G_N /l$ . Un observateur situé au point  $Q$  verra ainsi deux rayons lumineux issus de  $O_1$  et  $O_2$ , qui représentent cependant une seule source puisque les plans sont identifiés. Une source unique est ainsi vue comme une image double.

où  $b$  est le paramètre d'impact ; on voit qu'au premier ordre en approximation, la flèche ne dépend pas de  $b$ . Les angles de déficit et de déflexion sont identiques jusqu'à un facteur 2 dans le cas d'une corde Nambu-Goto puisque

$$2A-w = 47rG_N(t-T).$$

En pratique, l'angle de déficit est très faible. Pour une énergie de l'ordre de la grande échelle d'unification, on retrouve donc  $A \sim 10^{-5}$ , soit environ  $2''$ . Cependant, il n'est pas exclu de détecter cet effet et, d'ailleurs, des observations de certains alignements de galaxies ont été interprétées à plusieurs reprises en ces termes [34] ; jusqu'à présent, ces interprétations ont échoué en raison de données (spectrales notamment) plus précises. En se référant à la Fig. 11.9, on voit que la distance angulaire  $\delta < p$  entre les deux images, c'est à dire l'angle formé par le secteur  $O_1QO_2$ , est donné par

$$\delta < p = \frac{E}{G_N P_d} \sin^2 \theta,$$

où  $t = AO_{\pm}$  est la distance entre la corde et la source,  $d = QA'$  celle entre la corde et l'observateur, et  $\theta$  l'angle entre la ligne de visée et la tangente à la corde.

Pour aller au-delà du simple modèle de corde, les fluctuations de la densité d'énergie et de la géométrie le long de la corde ont été modélisées en supposant que la densité d'énergie linéaire était décrite par une densité aléatoire de Poisson [35]. De nouveaux phénomènes gravitationnels sont impliqués, comme l'apparition de fines critiques où l'amplification est infinie (Chapitre 7). Nous pouvons montrer que la longueur de la ligne caustique par unité de longueur de chaîne est de  $4\sqrt{3}E'$  (J). Ces effets sont représentés sur la figure 11.10.



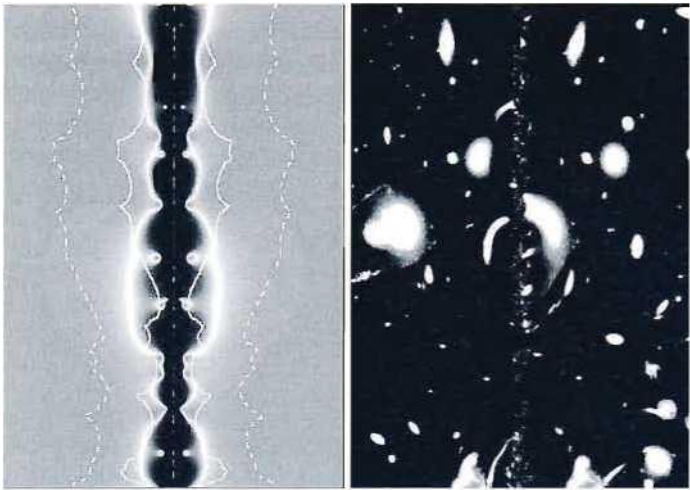


Fig. 11.10 Simulation of gravitational lensing effects by a cosmic string. Effects from string density and geometry fluctuations are taken into account. (left): Amplification map of a Poisson string. The brightest pixels correspond to a greater amplification. The white zone corresponds to a critical line where the amplification is infinité. The continuous white line is the caustic line and the dotted line corresponds to the counterimage of the critical line (Chapter 7). (right): This distortion field is applied to the cluster A2218 arbitrarily localized at  $z = 1$ . The string is located at  $z = 0.8$ . The resolution is of 0.1 arcsec. The pair separation is of about 5 arcsec. We note the appearance of a multitude of small images along the string and great arcs along the critical lines. These effects are absent for a smooth string. From Ref. [35],

11.9.2.3 Effet Kaiser-Stebb'ns

La déviation gravitationnelle offre un autre moyen de détecter potentiellement une chaîne. Nous supposons qu'une telle corde passe entre un observateur et une source lumineuse, et dénotons par  $v$  la vitesse de la corde par rapport à l'observateur. Du fait de l'angle de déficit, une fois la corde passée, la source voit sa vitesse modifiée par rapport à l'observateur de sorte que, par effet Doppler, la fréquence  $n$  du rayonnement émis est modifiée d'un facteur  $< 5n$ . On trouve  $H > v/v$  oc  $87TG_N/.z7$ , où  $y = \sqrt{1 - v^2}$  est le facteur de Lorentz de la chaîne.

En appliquant cet argument à une distribution thermique de photons telle que le corps noir du fond diffus cosmologique, nous voyons alors que chaque fréquence est modifiée de la même manière relative. Le spectre total est ainsi simplement décalé par le passage de la corde. En conséquence, la température change et on trouve [36]

$$\frac{\Delta T}{T} = 8\pi G_N \mu \, n \cdot (v \wedge t), \tag{11.52}$$

où  $n$  est un vecteur unitaire le long de la ligne de visée et  $t$  un vecteur unitaire tangent à la chaîne.

### 11.9.3 Effet d'un réseau sur le fond micro-onde

Le modèle Kibble est utilisé pour simuler numériquement des réseaux de cordes : on construit un réseau dont les mailles sont séparées par une longueur de corrélation, et sur chaque maille, une phase est générée aléatoirement. L'étude de la répartition de ces phases aux points du réseau permet de déterminer si une corde cosmique traverse ces mailles. Grâce à cette méthode, il a été montré qu'environ 80% des cordes qui se forment lors d'une transition de phase sont des cordes infinies, c'est à dire s'étalant d'une partie à l'autre du volume de la simulation, et que la distribution des boucles est invariante d'échelle, c'est à dire le nombre de boucles formées dans une coque sphérique entre le rayon  $r$  et l'épaisseur  $dr$  est proportionnel à  $dr/r^4$  et indépendant de la longueur de corrélation.

#### 11.9.3.1 Conditions initiales

Pour effectuer des simulations numériques d'un réseau de cordes cosmiques, nous considérons les conditions initiales imposées longtemps après la transition de phase, lorsque la température a suffisamment baissé pour pouvoir négliger les fluctuations thermiques du champ de Higgs, pour les transitions du second ordre. La distribution des phases est donc considérée comme figée, et on peut évaluer la distribution des défauts simplement en évaluant la distribution aléatoire du champ sur des distances supérieures à la longueur de corrélation de transition  $\xi$ . Pour obtenir cette distribution, on utilise l'algorithme initialement proposé par Vachaspati et Vilenkin [37] : en chaque point d'une grille cubique de pas  $\xi$ , une phase est générée aléatoirement entre trois valeurs discrètes, 0,  $2\pi/3$  et  $4\pi/3$ . Une corde cosmique traverse un carré en quatre points (une plaquette) si la phase de champ s'enroule de  $2\pi$  autour de la plaquette. On obtient ainsi des cubes élémentaires avec des chaînes entrantes et sortantes. Imposer la conservation des flux permet alors de savoir comment les relier.

La figure 11.11 montre une configuration initiale générée par cet algorithme, similaire à celles utilisées dans les simulations de la Réf. [38]. Deux paramètres physiques apparaissent dans la simulation : la densité initiale des cordes, donnée par la longueur de corrélation et le volume initial (autant de volumes de Hubble que possible au moment de la simulation initiale), et la vitesse moyenne des segments de cordes de longueur  $\xi$ . Le volume initial étant en expansion, la simulation est nécessairement limitée dans sa dynamique par la taille finie de la grille numérique. En effet, lorsque le rayon de Hubble devient comparable à la taille de la grille initiale, les effets de frontière commencent à dominer et la simulation cesse d'avoir un sens physique. Dans cette grille, sur laquelle sont imposées des conditions aux limites périodiques (ce qui fait en fait de la grille un 3-tore), les cordes qui ne se ferment pas dans le volume sont dites infinies ou longues, et les autres sont appelées boucles.

#### 11.9.3.2 Reconnexion et intercommutation

Lorsque deux chaînes se rencontrent, il existe deux possibilités topologiques : soit elles se croisent, soit elles échangent les extrémités qui se rencontrent. Seule la dynamique des champs microscopiques composant les cordes permet de déterminer l'interaction appropriée, et des simulations ont été réalisées indiquant que c'est la deuxième option qui se produit dans la plupart des cas. On dit alors que les cordes se reconnectent, ou font la navette.

La conséquence la plus importante pour la cosmologie est la formation constante de boucles qui peuvent dissiper l'énergie du réseau, initialement principalement contenue dans les longues cordes. Comme indiqué sur la Fig. 11.12, lorsque deux cordes se rencontrent en deux points ou lorsqu'un

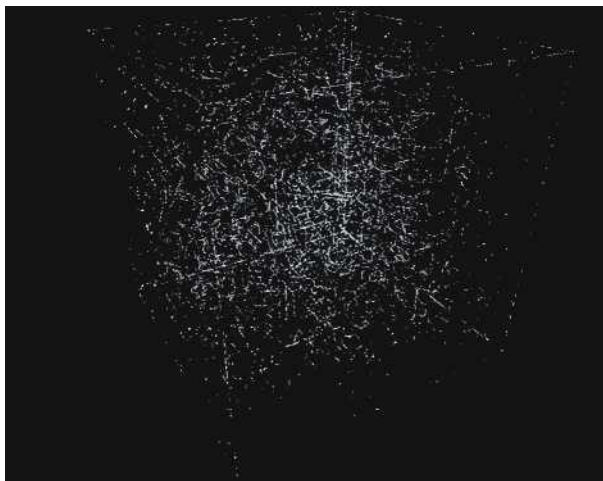


**Fig. 11.11** Configuration initiale d'un réseau de cordes, calculé avec l'algorithme de Vachaspati et Vilenkin [37], dans un volume comobile initial de côté  $18\lambda$  avec 26 points par longueur de corrélation. Figure réalisée et fournie par C. Ringeval grâce au code original de simulation numérique de D. Bennett et F. Bouchet.

la corde, en raison de son mouvement, se replie sur elle-même, le mécanisme d'intercommutation produit toujours une boucle. A chaque point d'échange, la corde finale présente une arête très vive. Cette configuration, appelée *coude*, se propage à la vitesse de la lumière le long de la corde, émettant une grande quantité de rayonnement gravitationnel.

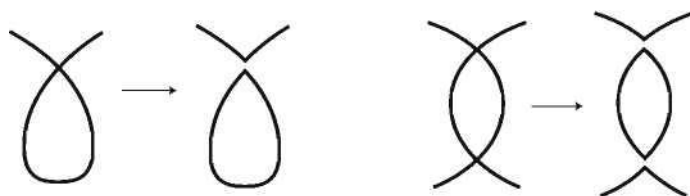


**Fig. 11.12** Formation de boucles de cordes cosmiques par le mécanisme d'intercommutation et apparition de *plis*.

### 11.9.3.3 Mise à l'échelle

De nombreux modèles analytiques ont été proposés pour décrire l'évolution d'un réseau de cordes, d'abord avec une échelle de longueur [39], puis deux ou trois [40] ainsi qu'une échelle de longueur et une vitesse [41]. Tous ces modèles, ainsi que leurs simulations numériques indiquent que le réseau de cordes atteint rapidement un régime spécial, appelé régime *d'échelle*, dans lequel ses propriétés statistiques deviennent indépendantes du temps. Par conséquent, indépendamment du moment précis auquel la transition de phase conduisant aux cordes s'est produite, les

conséquences cosmologiques de ces modèles devraient être pour la plupart indépendantes des détails de la théorie sous-jacente.

Le modèle à une échelle permet de comprendre comment le régime de mise à l'échelle est atteint. L'échelle en question est encore la longueur de corrélation  $\zeta$ , qui représente autant l'échelle caractéristique entre chaque corde que la courbure moyenne des cordes (des modèles plus élaborés donnent des valeurs différentes à ces longueurs). Considérons d'abord un réseau de cordes infinies, d'échelle de longueur caractéristique notée  $L_{\text{oo}}(t)$ . Au moment de transition, soit pour  $t = t_{\text{ini}}$ , on a  $\zeta = L_{\text{oo}}$ , de sorte que dans un volume  $V$ , le nombre de chaînes est  $M_{\text{strings}} = V / L_{\text{oo}}^3$ . Puisque l'énergie des cordes est  $E_{\text{strings}} = \mu L_{\text{oo}}$ , on trouve une densité d'énergie  $\rho_x = \mu / L_{\text{oo}}^2$ , ce qui implique qu'un réseau de cordes infinies sans interactions finit toujours par dominer les composantes de matière et de rayonnement. Nous soulignons également que cette évolution donne lieu à une équation d'état effective  $w_{\text{s.t. anneaux}} = -1/3$  pour ces chaînes : un tel ensemble de chaînes est exactement à la frontière entre une solution accélératrice et décélératrice, et imite un terme de courbure.

Heureusement, ce n'est pas la fin de l'histoire puisque les chaînes interagissent via la reconnexion et la formation de boucles. Ainsi, une fraction de l'énergie est transférée du système de cordes infinies vers des boucles, qui finissent par dissiper l'énergie des cordes longues, principalement sous forme de rayonnement gravitationnel, empêchant ainsi la domination du réseau de cordes. Cette fraction est proportionnelle au nombre d'interactions. En supposant que la vitesse moyenne des cordes est de l'ordre de la vitesse de la lumière (les simulations donnent  $\langle f_{\text{strings}} \rangle \sim 0,7$ ), alors le temps moyen entre deux interactions est  $\sim \lambda$  et donc le nombre d'interactions par unité de temps et de volume est  $\sim \lambda^{-3}$ . La fraction d'énergie transférée du Système de cordes infinies dans des boucles de longueur  $L_{\text{X}}$  pendant un temps  $\delta t$  est donc  $\langle \rho_{\text{poo}} \rangle_{\text{ops}} \sim L_{\text{X}}^{-3} \delta t \sim U L_{\text{X}}^{-3}$ . Compte tenu de l'expansion de l'Univers, on retrouve une évolution dictée par

$$\frac{d\rho_{\text{poo}}}{dt} + 3H\rho_{\text{poo}} = -\frac{\rho_{\text{poo}}}{2} \quad \rho_{\text{poo}} \propto t^{-2}$$

and as a conséquence

$$\frac{d\ln \rho_{\text{poo}}}{dt} = -\frac{1}{2} + 2H$$

whose general solution is

$$\rho_{\text{poo}}(t) = \rho_{\text{poo}}(t_0) \left( \frac{a(t_0)}{a(t)} \right)^{1/2} \exp \left( \int_{t_0}^t \frac{dr}{a(r)} \right)$$

En considérant une phase dominée par un fluide parfait d'équation d'état  $w$ , et donc un facteur d'échelle  $a(t) = a_0 (t/t_0)^{2/(1+w)}$ , on trouve

$$\rho_{\text{poo}}(t) \propto t^{-3/(1+w)}$$

ce qui conduit rapidement à  $L_{\text{X}} \propto t$  dans le cas d'un Univers non accélérateur ( $w > -1/3$ ). La densité d'énergie correspondante évolue alors comme  $\rho_{\text{X}} \propto t^{-2/(1+w)}$ , c'est-à-dire la même



669 se comportent comme le fluide dominant. <sup>13</sup>En d'autres termes, la densité énergétique du réseau de cordes par rapport à la densité de l'Univers tend rapidement vers une constante. C'est ce que nous appelons un régime de mise à l'échelle.

#### 11.9.3.4 Simulations numériques de réseaux de cordes

A partir des configurations initiales évoquées ci-dessus, il est possible de résoudre numériquement les équations de mouvement des cordes composant le réseau, en tenant compte des mutations intercom. Pour cela, il faut d'abord choisir la valeur de l'équation d'état du fluide dominant. En pratique, deux cas sont considérés : les phases de rayonnement et les phases dominées par la matière. Certaines simulations discutent également de la transition entre ces deux périodes.

Aux deux époques, il a été constaté que la densité énergétique totale tend effectivement vers une loi d'échelle. Plus précisément, les simulations numériques conduisent à [42]

$$\frac{28}{cCrg} \text{ et } \frac{4Q}{cCrg} \text{ JL}$$

confirmant ainsi le mécanisme de transfert d'énergie.

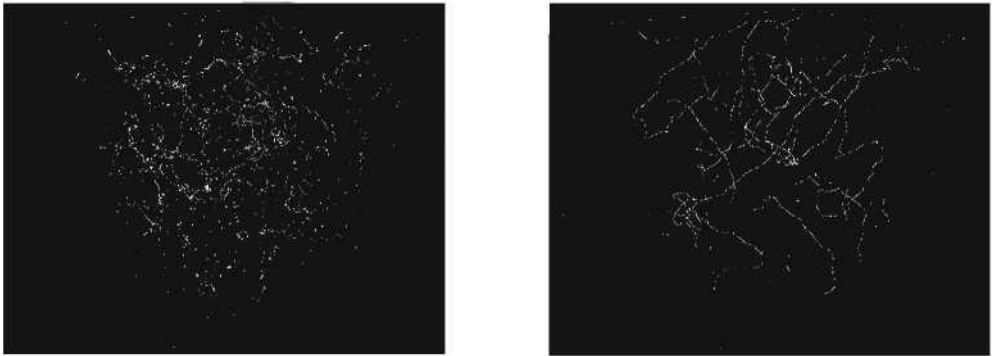


**Fig. 11.13** État final de l'évolution d'un réseau de cordes cosmiques, à droite pour une époque dominée par la matière, et à gauche pour une époque dominée par le rayonnement. Nous observons la répartition de certaines cordes infinies dans le volume Hubble ainsi qu'un grand nombre de cordes de toute taille. Figure réalisée et fournie par C. Ringeval grâce au code original de simulation numérique de D. Bennett et F. Bouchet.

#### 11.9.3.5 Spectre de puissance angulaire de fond cosmique à micro-ondes

Grâce à des simulations numériques, il est possible de calculer la déformation subie par une onde plane électromagnétique traversant le réseau de cordes due à l'effet Kaiser-Stebbins. Ces simulations de cordes permettent ainsi d'établir des cartes de température

<sup>13</sup>Si l'expansion est accélérée, c'est à dire si  $w < -1$  — c'est l'autre terme qui domine rapidement, et la contribution des cordes devient vite négligeable.

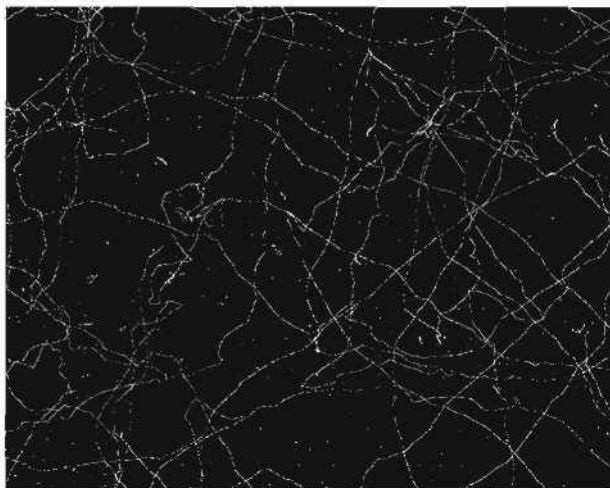


**Fig. 11.14** Zoom sur l'état final de l'évolution d'un réseau de cordes cosmiques à l'ère dominée par la matière. On voit clairement un grand nombre de boucles formées au cours de l'évolution du réseau. Ce sont ces boucles qui permettent l'évacuation de l'essentiel de l'énergie contenue dans les cordes et sa dissipation sous forme de rayonnement gravitationnel. Figure réalisée et fournie par C. Ringeval grâce au code original de simulation numérique de D. Bennett et F. Bouchet.

du fond cosmique des micro-ondes et, après avoir fait la moyenne sur un ensemble de simulations, de calculer le spectre de puissance angulaire du fond cosmique des micro-ondes.

Dans un premier temps, des simulations permettent d'établir quelle est la valeur de la fluctuation moyenne de température produite par les cordes aux très grandes échelles angulaires (le plateau) dans le fond diffus cosmologique. On constate qu'il s'agit

$$\left( \frac{\Delta T}{T} \right)_{\text{plateau}} \simeq 19 G_N U.$$

Puisque les observations révèlent que les fluctuations sont de l'ordre de  $10^{-5}$ , nous obtenons la borne supérieure  $< 10^{-6}$ , indiquant une échelle de rupture de symétrie du bon ordre.

d'ampleur pour une grande unification. Initialement, c'est cette coïncidence qui a stimulé l'intérêt pour l'étude des réseaux de cordes cosmiques.

Le spectre de puissance angulaire des anisotropies du fond diffus cosmologique n'est pas encore établi avec certitude pour le moment, mais certaines de ses propriétés sont déjà connues. Par exemple, nous savons déjà que les perturbations produites par un réseau de cordes n'étant pas cohérentes, le spectre ne présente pas la structure standard des pics acoustiques (Chapitre 6). Les différentes simulations réalisées jusqu'à présent indiquent, mais avec des barres d'erreur importantes, que le spectre de puissance angulaire commence par un petit plateau de pente aux grands angles (petit  $l$ ), puis monte lentement pour atteindre un maximum vers  $l \sim 350$  avant de descendre très rapidement par la suite.

Malgré l'absence de courbe théorique précise du spectre de puissance angulaire, les données expérimentales disponibles permettent de conclure qu'elles ne peuvent être responsables de toutes les fluctuations. Néanmoins, il reste toujours possible qu'une fraction soit due aux cordes.

Dans ce cas, les données indiquent que la part des fluctuations primordiales due aux cordes doit être inférieure à environ 10 % [43]. Comme nous le verrons plus loin, cela impose déjà des contraintes très sévères à certaines théories.

### 11.9.4 Autres conséquences des cordes cosmiques

#### 11.9.4.1 Chaînes non abéliennes

Des chaînes beaucoup plus compliquées peuvent être produites lors d'une transition de phase arbitraire. En particulier, comme le groupe initial est la plupart du temps non-abélien, il n'est pas toujours possible de factoriser le schéma de rupture en celui d'un sous-groupe  $U(1)$  multiplié par un groupe non producteur de défauts. Dans ce cas, la rupture conduisant aux chaînes est alors celle d'un groupe non-abélien, et les chaînes résultantes sont en conséquence dites non-abéliennes.

Plus précisément, les chaînes pouvant être produites selon le schéma (11.12) sont classées selon le premier groupe d'homotopie de  $<7/74$ , et donc, de (11.41),  $7A(74)$ . Pour un groupe résultant discret 74, on a  $7ro(74) \sim 74$ . Si 74 est non abélien, la chaîne sera dite non-abélienne.

Dans le cas non-abélien, la généralisation de la rotation du champ de Higgs autour du centre d'une corde, mais loin de là, s'écrit

$$\langle W \rangle = CJ(0) \wedge (O) = e^{iTSO} \wedge (O),$$

où  $T^s$  est l'un des générateurs de groupe. Cette expression n'est en réalité pas invariante de jauge, mais il existe une forme plus compliquée qui donne des résultats essentiellement similaires. Pour nos besoins, le formulaire ci-dessus est suffisant. Dans le cas où il n'y a qu'un seul générateur, la corde est abélienne et on revient aux études précédentes. S'il y a plusieurs générateurs de cordes, et que, de plus, ils ne commutent pas, alors la reconnexion décrite précédemment ne se produit pas : en effet, si deux cordes, de générateurs respectifs  $T^1$  et  $T^2$  disent, se rencontrent, elles seront reliées par un troisième chaîne, avec générateur proportionnel au collecteur  $[T^1, T^2]$ .

L'évolution d'un tel réseau est très différente de celle d'un réseau abélien. En particulier, la présence de nouveaux segments de cordes reliant ceux qui se croisent empêche la création de boucles et constitue ainsi le mécanisme le plus efficace pour réduire l'énergie contenue dans le réseau. On peut donc a priori douter de l'existence d'un régime de mise à l'échelle pour un tel réseau. Deux simulations ont été réalisées sur ce sujet. La première [44] montrant qu'un réseau de cordes avec  $74 = S_3$ , groupe des permutations à trois éléments, semble atteindre un régime d'échelle avec beaucoup plus de cordes qu'un réseau abélien, et surtout avec une densité fortement dépendante des conditions initiales. La deuxième simulation [45] indique qu'un réseau global de chaînes avec  $74 = Z_3$  semble ralentir la formation d'un réseau dit « frustré ». Dans un tel réseau, puisque chaque intersection introduit une nouvelle corde, l'énergie cinétique initiale du réseau est lentement transférée dans ces nouvelles cordes et le réseau finit par devenir solide [46] avec seule la dynamique étant celle de l'expansion. Tel que, le réseau se comporte comme un fluide de matière noire avec l'équation d'état  $w = -1$ . La différence entre ces deux simulations pourrait venir du fait que les cordes globales perdent beaucoup plus d'énergie que les cordes locales puisque les premières le font via le rayonnement Goldstone, qui est très efficace, tandis que les autres reposent sur le rayonnement gravitationnel, ce qui est un processus beaucoup plus lent.



## 11.9.4.2 Rayonnement gravitationnel

Lorsqu'une boucle de corde locale est en mouvement, elle peut atteindre une configuration d'équilibre grâce à son moment cinétique lui permettant de résister à la force de contraction de la tension. De telles configurations auraient une durée de vie infinie si le rayonnement gravitationnel était absent.

Pour une boucle de longueur  $L$ , de masse  $M = UL$  et donc de moment quadripolaire  $D \sim ML^2 \sim UL^3$ , la formule quadripolaire (voir la section 1.132 du chapitre 1) pour le rayonnement gravitationnel donne le taux total d'émission d'énergie où  $\omega$  est une fréquence caractéristique

avec  $T$  un facteur numérique dépendant uniquement de la forme de la boucle et de sa trajectoire.

$$\frac{dE}{dt} \sim G_N \left( \frac{d^3 D}{dt^3} \right)^2 \sim G_N M^2 L^4 \omega^6,$$

Les simulations numériques

(eu -  $L T$ ). We thus find

$$\frac{dE}{dt} \sim \Gamma G_N U,$$

et les solutions analytiques connues indiquent que fixer  $T \sim 100$  constitue une bonne approximation.

La durée de vie d'une grande boucle d'unification est donc

$$= \quad (11,54)$$

montrant que les cordes mettent beaucoup de temps à se désintégrer via le rayonnement gravitationnel.

Le rayonnement gravitationnel émis par a. Le réseau de cordes est obtenu après intégration sur l'ensemble des boucles. Ce faisant, nous obtenons un fond d'ondes de gravité stochastique qui peut être comparé à celui attendu dans différents modèles d'inflation [47] (Fig. 11.15) sur lequel se superpose une composante non gaussienne, induite par le rayonnement gravitationnel « explosif », au niveau des « pointes » des cordes. Cette dernière composante serait détectable par LIGO, LISA ou pulsars si  $G_N U > 10^{-13}$ . Pour l'instant, dans la mesure où aucune onde gravitationnelle n'a encore été détectée, la meilleure contrainte sur ce fond d'ondes gravitationnelles produit par un ensemble de cordes vient de la stabilité des pulsars. Lorsque des ondes gravitationnelles passent entre ces pulsars et la Terre, elles perturbent la métrique et produisent ainsi des fluctuations dans les heures d'arrivée des puces. Puisqu'il s'agit d'un signal continu dans le temps, il est possible d'améliorer la précision mesurée simplement en intégrant sur le temps non mesuré. C'est pourquoi c'est à ce jour la contrainte la plus connue sur l'échelle énergétique des cordes. Cela mène à

$$G_N U \lesssim 10^{-5}. \quad (11h55)$$

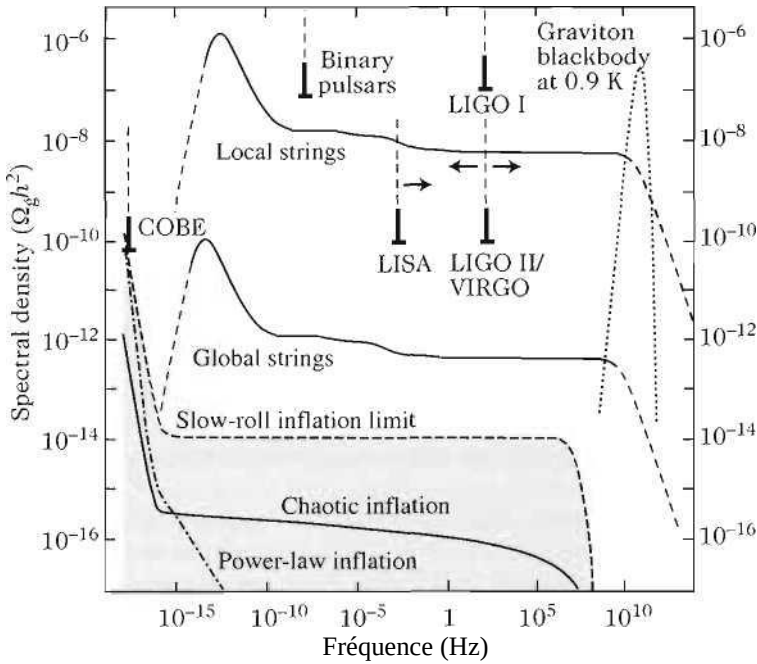


**Fig. 11.15** Spectre de rayonnement gravitationnel d'un réseau de cordes [47] : les deux courbes en pointillés montrent la contribution des cordes qui se désintègrent pendant les périodes dominées par le rayonnement et la matière. A titre de comparaison, le spectre du fond de rayonnement gravitationnel à 0,9 K, analogue au fond diffus cosmologique, est indiqué, ainsi que les contributions dues à l'inflation et à une phase de transition électrofaible fortement de premier ordre. Nous avons également placé la contrainte de stabilité des pulsars ainsi que la sensibilité attendue des expériences de détection d'ondes gravitationnelles. De la Réf. [48].

# Les références

- [1] SE STANLEY, *Introduction aux transitions de phase et aux phénomènes critiques*, Oxford University Press, 1971 ; N. GOLDENFELD, *Lectures on phase transitions and the renormalization group*, Addison-Wesley, 1992. La référence la plus récente et à jour suivante pourrait également intéresser les lecteurs francophones, à savoir M. LAGUËS et A. LESNE, *Invariances d'échelles - Des changements d'état à la turbulence*, Belin, 2003 (en français, non traduit). A. LESNE, *Renormalization METHODS*, Wiley, 1998 est légèrement plus spécialisé.
- [2] Une introduction informelle à certains défauts topologiques et à leur pertinence cosmologique en cosmologie peut être trouvée dans A. GANGUI, *Superconducting Cosmic Strings American Scientist*, Vol 88, N° 2, pages 254-263, numéro de mai-juin (2000). [astroph/0005186]. Cet article, largement basé sur l'ouvrage populaire intitulé *Des défauts dans l'Univers* de P. PETER et A. GANGUI, CNRS Editions, 2003 (en français, non traduit), contient également de nombreuses références connexes.
- [3] D. BAILIN et A. LOVE, *Introduction à la théorie des champs de jauge*, Intitute of Physics Publishing, 1986, chapitre 17.
- [4] M. NAKAFIARA, *Géométrie, topologie et physique*, Institute of Physics Publishing, 1990.
- [5] C. RINGEVAL, P. PETER et J.-P. UZAN, 'Localisation de fermions massifs sur la brane', *Phys. Rev. D* **65**, 044016, 2002, et les références qui y figurent.
- [6] C. RINGEVAL, P. PETER et J.-P. UZAN, « Stabilité des mondes braniques hypercordes à six dimensions », *Phys. Rev. D* **71**, 104018, 2005, et les références qui y figurent.
- [7] B. Diu, C. GUTHMANN, D. LEDERER et B. ROULET, *Physique statistique*, Hermann , 2001 ; M. LE BELLAC, *Théorie quantique et statistique des champs*, Oxford University Press, 1992.
- [8] MB HINDMARSH et TWB KIBBLE, « Cordes cosmiques », *Rep. Prog. Phys.* **58**, 477, 1995.
- [9] HB NIELSEN et P. OLESEN, « Modèles Vortex-line pour cordes doubles », *Nucl. Phys. B* **61**, 45, 1973.
- [10] Y. NAMBU, *Symétries et modèle des quarks*, R. Chand (éd.), Gordon & Breach, 1970 ; T. GOTO, « Relativiste. Mécanique quantique du continuum mécanique unidimensionnel et condition subsidiaire du modèle à double résonance', *Prog. Théorique. Phys.* **46**, 1560, 1971.
- [11] E. WITTEN, « Cordes supraconductrices », *Nucl. Phys. B* **249**, 557, 1985.
- [12] P. PETER, « Corde cosmique supraconductrice : équation d'état pour les courants spatiaux et temporels dans la limite neutre », *Phys. Rév. D* **45**, 1091, 1992 ; « Influence de la force de couplage électrique dans les cordes cosmiques porteuses de courant », *Phys. Rév.D* **46**, 3335, 1992.
- [13] B. CARTER et P. PETER, « Modèle de cordes supersoniques pour les vortex de Witten », *Phys.*

Rév. D **52**, R1744, 1995 ; B. CARTER, P. PETER et A. GANGUI, « Évitement de l'effondrement par des boucles circulaires de cordes cosmiques transportant un courant », *Phys. Rév.D* **55**, 4647, 1997.

- [14] RL DAVIS et EPS SHELLARD, « Vortons cosmiques », *Nucl. Phys. B* **323**, 209, 1989.
- [15] R. BRANDENBERGER *et al.*, « Vortons cosmiques et contraintes en physique des particules », *Phys. Rév. D* **54**, 6059, 1996.
- [16] A. VILENKIN et EPS SHELLARD, *Cosmic strings and other topological defects*, Cambridge University Press, 2000.
- [17] GT HOOFT, « Monopoles magnétiques dans les théories de jauge unifiées », *Nucl. Phys. B* **79**, 276, 1974 ; AM POLYAKOV, « Spectre de particules dans la théorie quantique des champs », *JETP Lett.* **20**, 194, 1974.
- [18] E. HUGUET et P. PETER, « Les États liés dans les monopoles : sources pour l'UHECR ? », *Astropart. Phys.* **12**, 277, 2000.
- [19] EB BOGOMOL'NYI, « La stabilité des solutions classiques », *Sov. J. Nucl. Phys.* **24**, 449, 1976 ; MK PRASAD et CM SOMMERFIELD, 'Solution classique exacte pour le monopôle 't Hooft et le dyon Julia-Zee', *Phys. Le révérend Lett.* **35**, 760, 1975.
- [20] C. NASH et S. SEN, *Topologie et géométrie pour les physiciens*, Academie Press, 1987.
- [21] D. STAUFFER et A. AHARONY, *Introduction à la théorie de la percolation*, Taylor et Francis, 1994 ; D. STAUFFER, « Théorie de mise à l'échelle des clusters de percolation », *Phys. Rep.* **54**, 1, 1979.
- [22] P. PETER, « Murs de domaine porteurs de courant de surface », *J. Phys. A* **29**, 5125, 1996.
- [23] AE EVERETT, « Conséquences de l'observation d'une structure de « domaines » de l'Univers », *Phys. Rév. D* **10**, 3161, (1974); Ya B. ZEL'DOVICH *et al.*, *Sov. Phys. JETP* **40**, 1, 1975.
- [24] CT HILL, « Monopolonium », *Nucl. Phys. B* **224**, 469, 1983.
- [25] DA DICUS, DN PAGE et VL TEPLITZ, « Contributions à deux et trois corps à l'annihilation du monopole cosmologique », *Phys. Rév.D* **26**, 1306, 1982.
- [26] JP PRESKILL, « Production cosmologique de monopôles super-lourds », *Phys. Le révérend Lett.* **43**, 1365, 1979.
- [27] MB EINHORN, DL STEIN et D. TOUSSAINT, « Les grandes théories unifiées sont-elles compatibles avec la cosmologie standard ? », *Phys. Rév.D* **21**, 3295, 1980.
- [28] G. DVALI, A. MELFO et G. SENJANOVIC, « Y A-t-il un problème de monopole ? », *Phys. Le révérend Lett.* **75**, 4559, 1995.
- [29] MS TURNER, « Production thermique de monopôles magnétiques super-lourds dans l'Univers primitif », *Phys. Lett. B* **115**, 95, 1982.
- [30] G. DVALI, H. Liu et T. VACHASPATI, « Balayer le problème du monopole », *Phys. Le révérend Lett.* **80**, 2281, 1998.
- [31] P. LANGACKER et S.-Y. Pi, « Monopôles magnétiques dans les grandes théories unifiées », *Phys. Le révérend Lett.* **45**, 1, 1980.
- [32] R. JEANNEROT, J. ROCHER et M. SAKELLARIADOU, « DANS QUELLE mesure la formation des cordes cosmiques est-elle générique dans les grandes théories supersymétriques unifiées ? », *Phys. Rév. D* **68**, 103514, 2003.

## 676 Références

- [33] P. PETER, 'Commentaires sur certaines propriétés métriques de cordes cosmiques ayant un tenseur d'énergie de contrainte non dégénéré', *Class. Quant. Grav.* **11**, 131, 1994.
- [34] M. SAZHIN *et al.*, 'CSL-1 : effet de projection aléatoire ou découverte fortuite d'une lentille gravitationnelle induite par une corde cosmique', *Mois. Pas. R. Astron. Soc.* **343**, 353,

- 2003 ; « Objectifs candidats dans le champ profond de Capodimonte à proximité de l'objet CSL-1 », [astro-ph/0406516] ; R. SCHILD et *al.*, « Fluctuations anormales dans les observations de Q0957+561 A,B : preuve irréfutable d'une corde cosmique ? », *Astron. Astrophysique*. **422**, 477, 2004 ; E. AGOL, CJ HOGAN et RM PLOTKIN, « L'imagerie Hubble exclut la lentille cosmique », *Phys. Rév. D* **73**, 087302, 2006 ; M. SAZHIN et *al.*, « Lentille gravitationnelle par cordes cosmiques : ce que nous apprenons du cas CSL-1 », *Mon. Pas. R. Astron. Soc.* **376**, 1731, 2007.
- [35] J.-P. UZAN et F. BERNARDEAU, 'Phénoménologie de la lentille cosmique : propriétés générales du champ de distorsion', *Phys. Rév. D* **63**, 023004, 2000 ; F. BERNARDEAU et J.-P. UZAN, « Phénoménologie de la lentille cosmique : modèle de distribution d'énergie de Poisson », *Phys. Rév. D* **63**, 023005, 2000.
- [36] N. KAISER et A. STEBBINS, « Anisotropie des micro-ondes due aux cordes cosmiques », *Nature* **310**, 391, 1984 .
- [37] T. VACHASPATI et A. VILENKIN, « Formation et évolution des cordes cosmiques », *Phys. Rév.D* **30**, 2036, 1984.
- [38] FR BOUCHET, DP BENNETT et A. STEBBINS, 'Modèles du fond de micro-ondes cosmiques à partir de réseaux de cordes en évolution', *Nature* **335**, 410, 1988.
- [39] TWB KIBBLE, 'Topologie des domaines et cordes cosmiques', *J. Phys. A* **9**, 1387, 1976 et « Quelques implications d'une transition de phase cosmologique », *Phys. Rep.* **67** , 183, 1980.
- [40] E. COPELAND, TWB KIBBLE et D. AUSTIN, « Solutions de mise à l'échelle dans les réseaux de cordes cosmiques », *Phys. Rév. D* **45**, R1000, 1992 ; D. AUSTIN, E. COPELAND et TWB KIBBLE, « Évolution des configurations de cordes cosmiques », *Phys. Rév.D* **48**, 5594, 1993.
- [41] CJAP MARTINS et EPS SHELLARD, 'Évolution quantitative des cordes', *Phys. Rév. D* **54**, 2535, 1996 ; «Extension du modèle d'évolution des cordes à une échelle dépendant de la vitesse», *Phys. Rév. D* **65**, 043514, 2002.
- [42] C. RINGEVAL, *Courants fermioniques circulant le long d'objets étendus*, thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris [hep-ph/0211126].
- [43] FR BOUCHET, P. PETER, A. RIAZUELO et M. SAKELLARIADOU, 'Y A-t-il des preuves de défauts topologiques dans les données BOOMERanG ?', *Phys. Rév. D* **65**, 021301, 2002 ; L. POGOSIAN, M. WYMAN et I. WASSERMAN, 'Contraintes d'observation sur les cordes cosmiques : analyse bayésienne dans un espace de paramètres tridimensionnel', *JCAP* **09**, 008, 2004.
- [44] P. MCGRAW, « Evolution d'un réseau de cordes cosmiques non-abéliennes », *Phys. Rév.D* **57**, 3317, 1998.
- [45] D. SPERGEL et U.-L. PEN, « Cosmologie dans un univers dominé par les cordes », *Astro phys. J. Lett.* **491**, L67, 1997.
- [46] M. BUCHER et DN SPERGEL, ' La matière noire est-elle un solide ?', *Phys. Rév. D* **60**, 043505, 1999.

Références **677**

- [47] B. ALLEN, Le fond stochastique des ondes gravitationnelles : sources et détection, Actes de l'École des Houches sur les sources astrophysiques des ondes gravitationnelles, J.-A. Marck et J.-P. Lasota (éd.), Cambridge University Press, 1996, [gr-qc/9604033]
- [48] RA BATTYE, RR CALDWELL et EPS SHELLARD, *Ondes gravitationnelles provenant de cordes cosmiques*, [astro-ph/9706013], Actes de « Défauts topologiques en cosmologie », M. Signore et F. Melchiorri (éd.), World Scientific, 1998.

# 12

## Extensions du cadre cosmologique standard

---

Ce chapitre illustre diverses extensions du cadre cosmologique standard compte tenu des développements théoriques présentés au chapitre 10. Sans être exhaustif, nous donnons, dans la section 12.1, un aperçu de la contribution de la supersymétrie et de la supergravité à la construction de modèles inflationnistes. Quant à l'Univers récent, nous explorons la question de l'origine de l'énergie noire, section 12.2, qui est aujourd'hui au cœur de nombreuses réflexions. Enfin, nous évoquons la question de la constance des constantes fondamentales, section 12.3, et la topologie de l'Univers, section 12.4, deux sujets qui ont connu des progrès significatifs récemment.

### 12.1 Construction de modèles inflationnistes

Le paradigme inflationniste est désormais la pierre angulaire du modèle cosmologique standard (voir le chapitre 8 pour les arguments). Cependant, pour asseoir la physique de l'inflation sur des bases plus solides, il faudrait l'inscrire dans le cadre général de la théorie des champs qui décrit les particules et leurs interactions telles que nous les connaissons. Nous devrions ainsi pouvoir formuler des théories contenant le modèle standard (chapitre 2) dans une limite de basse énergie et contenant des champs scalaires aux potentiels suffisamment plats pour donner lieu à une phase d'inflation.

La grande unification (chapitre 10) et la théorie des cordes (chapitre 13), et en fait, toute extension cohérente à haute énergie du modèle standard, jusqu'à présent, exige que la supersymétrie soit mise en œuvre. Cette propriété générique s'avère fournir les champs scalaires nécessaires et conduit essentiellement à deux familles principales de modèles susceptibles de résoudre le problème de l'inflation. Ces modèles s'appuient sur le terme  $F$  ou  $D$  de supersymétrie, voire de supergravité. Ici, nous présenterons les exigences de base pour construire de tels modèles, avec des exemples simples, et recommanderons les revues [1,2] dans lesquelles des modèles plus explicites (et réalistes) ont été analysés.

#### 12.1.1 Un modèle cohérent : la supergravité

La théorie à partir de laquelle le modèle inflationniste sera construit décrit un grand nombre de particules, leurs masses et leurs termes d'interaction. Pour que cette théorie soit physiquement réaliste, elle doit contenir toutes les informations sur le modèle standard décrit au chapitre 2. De manière équivalente, il faut pouvoir insérer ce modèle dans un cadre étendu contenant un secteur capable de donner lieu à une phase de l'inflation.

Pour que la phase inflationniste puisse être mise en relation avec les données d'observation, son échelle énergétique caractéristique devrait être de l'ordre de celle de la grande unification (chapitre 8). Ainsi, nous considérerons comme acquis que les grandes théories unifiées supersymétriques sont de bons candidats pour la construction d'un modèle réaliste. Comme discuté ci-dessus, le choix de la supersymétrie peut être justifié par deux arguments. Premièrement, aucune théorie réaliste non supersymétrique contenant le modèle standard, tout en étant compatible avec toutes les expériences (de physique des particules), n'a encore été trouvée. De plus, et c'est la deuxième raison, la théorie des cordes doit contenir cette symétrie pour être stable.

Deux cas peuvent alors se présenter. Soit nous voulons que le modèle soit renormalisable (ou fini, ce qui pourrait sans doute être encore mieux), soit nous voulons simplement étudier les conséquences d'un modèle efficace et non renormalisable. Le premier cas est quelque peu favorisé par beaucoup pour les raisons suivantes : une théorie renormalisable ne peut contenir qu'un nombre fini de paramètres qui doivent finalement être déterminés expérimentalement. En outre, le modèle standard lui-même *est* renormalisable, tout comme son extension supersymétrique globale.

, plus probablement, comme une approximation à faible énergie d'une théorie plus générale, valable en dessous d'une échelle caractéristique donnée, *disons* . Cette théorie a priori inconnue peut être développée aux basses énergies : dans la limite  $E_c \rightarrow \infty$ , on retrouve une théorie renormalisable, c'est à dire qui ne dépend pas de  $E_c$  . Les termes d'ordre suivant sont évidemment indéterminés, mais peuvent être construits de manière phénoménologique à l'aide d'arguments dimensionnels. On trouve alors des termes pour lesquels les constantes de couplage effectives se comportent comme  $E^{-n}$ , avec la puissance  $n = 2, 4, \dots$ . Celles-ci sont généralement non renormalisables, mais cela ne doit pas nous inquiéter car nous avons affaire, après tout, à une théorie efficace. En pratique, on fixe souvent  $E_c$  comme étant de l'ordre soit de la masse de Planck  $M_P$ , soit de l'échelle de grande unification  $E_{GUT}$ . Autour et au-delà de cette échelle typique, les corrections dues aux termes non renormalisables, c'est-à-dire issues de la théorie complète, peuvent devenir importantes et doivent être évaluées.

Nous souhaitons maintenant considérer de tels modèles afin de les appliquer à un cas cosmologique, à savoir l'époque de l'inflation. Il faut donc explicitement considérer un couplage à la gravité : la limite  $M_P \rightarrow \infty$  ne peut en aucun cas être prise, car elle n'a ici aucun sens. Tous les termes supplémentaires possibles provenant notamment de la supergravité doivent donc être pris en compte, y compris là encore les termes non renormalisables.

Parmi les nombreux domaines présents dans les théories de grande unification supersymétrique,<sup>14</sup> il faut distinguer les champs scalaires capables de dominer le contenu matériel de l'Univers. Ces champs scalaires apparaissent dans le Lagrangien de la théorie, notamment dans les termes dits  $F$  et  $D$ . Nous reviendrons donc successivement sur ces termes ultérieurement.

#### 12.1.1.1 Contraintes du « potentiel Fiat »

Le fait que la théorie soit réaliste au sens de la physique des particules, bien que cela soit clairement nécessaire, n'est pas suffisant. En particulier, le potentiel du champ scalaire qui dominera la dynamique de l'Univers devrait également avoir les bonnes propriétés pour

---

<sup>14</sup>L'acronyme SUSY-GUT, ou simplement SGUT, est parfois utilisé dans la littérature ; nous éviterons cependant cette pratique dans la suite.





donner lieu à une phase inflationniste suffisamment longue (rappelons les contraintes observationnelles dérivées du chapitre 8). En pratique, ce potentiel devrait être suffisamment plat, au moins dans certaines directions, pour que les conditions de roulis lent <sup>15</sup>puissent être mises en œuvre.

Cependant, un problème général se pose. Un champ scalaire dont la dynamique est pilotée par un potentiel plat a également, du fait de sa planéité, une très petite masse. Si ce champ scalaire léger est couplé aux autres champs de la théorie, les corrections quantiques dues aux interactions induiront de grandes modifications de ce potentiel, et pourraient ainsi changer drastiquement la masse du champ scalaire. Une fois ces corrections prises en compte, une telle théorie finit, en général, par ne plus être un candidat sérieux puisque le champ scalaire devient trop massif pour produire des corrélations super-Hubble.

### 12.1.1.2 Correction Coleman-Weinberg

Une fois les potentiels de tous les domaines de la théorie choisis, on peut calculer les corrections quantiques dues aux interactions entre les différents domaines du modèle. Les potentiels scalaires, en plus des termes  $D$  et  $F$ , obtiennent alors un terme supplémentaire  $\Delta V_i$ , initialement calculé par Coleman et Weinberg [3], qui s'écrit

$$\Delta V_{\text{boucle}} = \frac{1}{64\pi^2} \sum_i \left( \frac{1}{2} \text{Tr} \left( \frac{M_i^2}{\Lambda^2} \right) \ln \left( \frac{M_i^2}{\Lambda^2} \right) \right) \quad (12J)$$

où la somme est effectuée sur tous les états d'hélicité  $i$ . Ici,  $N_F$  est le nombre fermionique (Section 10.3 du Chapitre 10) et  $m_i$  les masses des états d'hélicité  $i$ . L'équation (12.1) a été obtenue par renormalisation à une échelle d'énergie de coupure  $\Lambda$ . Il est absolument obligatoire de prendre en compte cette correction afin de calculer correctement les prédictions cosmologiques des modèles supersymétriques d'inflation.

Pour illustrer l'effet de cette correction, considérons un potentiel qui peut être développé le long d'une de ses directions plates comme

$$V = V_0 + \frac{1}{2} M^2 (\phi - \phi_0)^2, \quad (12.2)$$

où les points correspondent à des termes non renormalisables. En choisissant l'échelle de Planck comme seuil, c'est-à-dire en définissant  $\Lambda = M_P$ , la correction à une boucle prend génériquement la forme

$$\Delta V = \frac{m^2}{64\pi^2} \ln \left( \frac{m^2}{M_P^2} \right) \quad (12,3)$$

où  $\Lambda$  est une échelle de masse et  $c$  est une constante pure. Il est alors facile de se convaincre que si  $m \sim M_P$ , le potentiel effectif a un extremum pour  $\langle \phi \rangle \sim M_P \exp(-1/c)$ . Cet extremum est un minimum si  $m(M_P)^2 > 0$ . En traçant ces potentiels, nous constatons qu'ils correspondent à des potentiels similaires à ceux montrés sur la figure 8.2, conduisant aux « anciens » ou aux « nouveaux » modèles d'inflation du chapitre 8.

<sup>15</sup>On pourrait imaginer mettre en œuvre l'inflation de manière cohérente sans toutefois remplir ces conditions, mais il faudrait alors le démontrer explicitement pour chaque cas. En revanche, si l'hypothèse du roulement lent est valide, nous sommes assurés que la théorie sera capable de satisfaire aux contraintes observationnelles.

Soulignons cependant une éventuelle lacune concernant la conclusion ci-dessus. Les termes de correction de boucle sont calculés à partir de la théorie des champs dans un espace-temps plat, c'est à dire dans un espace de Minkowski, alors que lors de l'inflation la structure espace-temps est quasi-de Sitter. Rigoureusement, il faut calculer ces corrections dans une théorie quantique des champs dans le formalisme espace-temps courbe (voir Réf. [4] pour un exemple explicite calculant la renormalisation de masse dans un espace-temps de De Sitter). Dans la plupart des cas, cela n'affecte pas la conclusion, mais il convient de vérifier qu'il en est bien ainsi avant de comparer avec des données.

### 12.1.1.3 Stratégies

Les contraintes requises sur le potentiel au niveau de l'arbre pour obtenir une phase d'inflation lente sont décrites au chapitre 8. Nous discuterons ici de la manière de remplir celles-ci dans le contexte actuel des théories réalistes.

Dans le cadre de la supersymétrie globale, les corrections de supergravité ne sont pas minimales lors de l'inflation. Ils impliquent typiquement que  $m^2 > V_0/M^2$  pour tout champ scalaire et en particulier pour l'inflaton. Pour ce dernier,  $V_0 \sim H^2 M^2$  en régime de roulis lent pour que sa masse devienne supérieure à la constante de Hubble lors du gonflement, soit  $m > H$  ; il est donc trop « lourd » pour produire des corrélations super-Hubble. Diverses stratégies ont été proposées pour résoudre ce problème et construire un modèle viable dans ce contexte,

- le potentiel est dominé par un terme  $F$  mais la masse de l'inflaton est supprimée car le potentiel de Kähler,  $K$ , et le superpotentiel,  $W$ , ont des formes très spécifiques ;
- le potentiel est dominé par un  $F$ -terme générique mais la masse de l'inflaton est supprimée du fait d'une annulation entre les différents termes ;
- le potentiel est dominé par un terme  $F$  générique à l'échelle de Planck  $M_p$  mais la masse de l'inflation est supprimée aux échelles d'énergie où l'inflation s'est produite, en raison d'une dépendance d'échelle ;  
le potentiel est dominé par un terme  $F$  ;
- le potentiel est dominé par un terme  $F$  générique mais le terme cinétique de l'inflation devient singulier dans le régime où l'inflation s'est produite de sorte qu'une fois le terme cinétique a sa forme canonique, le potentiel devient suffisamment plat même s'il ne l'était pas à l'origine.

Dans ce qui suit, par souci de simplicité, nous illustrons les deux situations possibles ( $F$  ou  $D$ ) avec une théorie contenant trois multiplets chiraux,  $\Phi$ ,  $\Psi$  et  $\Sigma$ . Quant aux potentiels, ils dépendront du cas particulier considéré et nous les choisirons selon les besoins.

### 12.1.2 Inflation à $F$ terme

La première possibilité est donc celle pour laquelle le potentiel est dominé par le terme  $F$ , ce qui revient à dire que les contributions des termes  $F$  n'ont qu'une influence limitée, et dans la plupart des cas négligeable, sur la dynamique de l'Univers. Notons que ces  $F$ -termes peuvent néanmoins jouer un rôle important dans le sens où ils peuvent déterminer la trajectoire de l'inflation.

### 12.1.2.1 Potentiel efficace

Considérons le cas d'un superpotentiel renormalisable

$$W_F = A \phi_0 (\phi^\dagger \phi - M^2), \quad (12.4)$$

où  $A$  est une constante de couplage et  $M$  une masse supposée très petite par rapport à la masse de Planck,  $M_{Pl}$ , afin que les corrections de supergravité soient négligeables. Dans ce cas, (10.118) nous permet de déduire le potentiel

$$V_F = A^2 |j|^2 - M^2 |j|^2 + |j|^{2N+2} \quad (12.5)$$

dont le minimum global est localisé à  $\langle \phi_0 = 0$  et  $\langle \phi^\dagger = \langle \phi = M$ , avec  $V_F = 0$ , et satisfaisant ainsi la supersymétrie.

En s'identifiant à l'inflation et en supposant des conditions initiales chaotiques, alors il devrait exister des régions de l'espace pour lesquelles  $\phi_0 > M$ . Considérons une de ces régions : le potentiel a une vallée de minima locaux pour  $\langle \phi^\dagger = \langle \phi = 0$ , et il y a donc un terme constant dans le potentiel  $V$ ,  $DA^2 A^2$ . Puisque  $V_F > 0$ , la supersymétrie est rompue pendant la phase d'inflation, et le potentiel ne dépend pas de l'inflation  $\phi_0$ .

Maintenant, pour évaluer les corrections à une boucle données par (12.1), nous devons connaître exactement le spectre des particules de la théorie. La supersymétrie étant brisée, nous avons un fermion de Dirac de masse  $A|\phi_0|$  et deux champs scalaires de masses  $A^{\pm}/|\phi_0| \pm M^2$ . L'équation (12.1) implique alors que

$$= A^2 A d^4(1 + \dots), \quad (12.6)$$

avec

$$A = 2 \ln \left( \frac{N}{2} \right) J + (z + 1)^2 \ln(1 + z^{-N}) + (z - 1)^2 \ln(1 - z^{-N}), \quad (12.7)$$

où  $N$  est la dimension de la représentation dans laquelle se trouvent les superchamps  $\langle 1 \rangle_{\pm}$ , et on a posé  $z = |\phi_0|^2 / M^2$ .

Le potentiel (12.6) sert de point de départ à un scénario d'inflation hybride : dès que l'inflation atteint la valeur critique  $M$ , elle devient énergétiquement favorable pour que  $\langle \phi^\dagger \neq 0$  prenne des valeurs non nulles, évoluant dynamiquement vers le minimum global supersymétrique. Les paramètres de ce modèle sont alors contraints par des observations, notamment celle du fond diffus cosmologique. Lorsqu'il est implémenté pour le groupe de grande unification  $SO(10)$  [5], nous constatons que nous aurions dû

$$M < 2 \times 10^{15} \text{ GeV et } A < 7 \times 10^{-7},$$

où nous avons également pris en compte le fait que les cordes cosmiques, dont la contribution aux anisotropies [6] doit être inférieure à environ 10%, sont produites de manière générique dans ce genre de modèles [7] (et cela ne dépend que peu du choix des modèles). le groupe de jauge).

De nombreux autres modèles peuvent être construits de la même manière. Une compilation comprenant une description de nombreuses propositions de ce type avec leurs contraintes respectives peut être trouvée, par exemple, dans la Réf. [2],

### 12.1.2.2 Le problème $g$

Le scénario précédent souffre cependant d'un problème si l'on souhaite inclure des corrections de supergravité. Ceci vient du fait que si l'on applique directement (10.142), on trouve un potentiel contenant un pré-facteur global de la forme  $V \sim \exp(87rG_N Q)$ , de sorte que le roulement lent le paramètre  $r/y$ , défini par (8.49), s'avère être d'ordre unité. En effet, en différenciant l'exponentielle du potentiel de Kähler, on trouve que  $r/y = 1 + \dots$ , et les termes supplémentaires n'ont a priori aucune raison d'annuler le premier, à moins bien sûr que le potentiel de Kähler et le superpotentiel sont artificiellement réglés dans ce but.

Il existe de nombreuses solutions à ce problème. Le plus simple est de ne pas du tout considérer les corrections liées à la supergravité ! Ceci est possible car dans cette catégorie de modèles, le gonflement ne prend jamais de valeurs grandes par rapport à la masse de Planck (soit  $< M_P$ ). En considérant un potentiel de Kähler de la forme (10.141) alors le premier terme de masse de l'inflaton se simplifie et il ne reste que des termes d'ordre supérieur, se comportant ici comme  $|</>0/M_P| < 1$ .

On peut également imposer à la théorie des symétries particulières qui évitent l'apparition de termes aussi gênants. De plus, on peut aussi construire des modèles d'inflation parfaitement cohérents pour lesquels  $r/y \sim 1$  ne pose pas de problème. Ceci est possible à condition que  $\epsilon < 1$ , et doit être examiné au cas par cas.

La dernière solution est bien entendu de se tourner vers différents types de modèles, où ce problème est absent. Comme c'est par exemple le cas lorsque le terme  $\mathcal{F}$  domine le potentiel total, nous nous tournons maintenant vers cette deuxième catégorie.

### 12.1.3 Inflation à terme $Z$ ?

Considérons maintenant une théorie invariante sous les transformations du groupe  $U(1)$ , de sorte que le D-terme de Fayet-Iliopoulos est important. On choisit alors le superpotentiel

$$W_D = A \langle t \rangle_0 \langle t \rangle \langle \mathcal{F} \rangle, \quad (12,8)$$

qui est essentiellement le même que pour le cas du terme  $F$  mais avec un paramètre de masse  $M = 0$ . Dans  $W_D$ , les superchamps ont des charges sous  $U(1)$  données par  $Q(4?) = 0$  et  $Q(\mathcal{F}) = \pm 1$ . L'inflaton sera alors identifié avec la partie radiale d'un champ de charge disparaissant.

#### 12.1.3.1 Supersymétrie globale

Le superpotentiel (12.8) conduit à un potentiel résultant du terme  $F$ , et la théorie contient également un terme  $Z$ , donné par (10.125), de sorte que le potentiel total est la somme des deux termes,

$$V_0 = A^2 (|\langle t \rangle + \langle t \rangle^*|^2 + 0 \langle 0 | I'' + 1000 \cdot 1^2) + \frac{22}{(\zeta + 0 + |\cdot|^2 - 0 \cdot 1)} > \quad (12.9)$$

où  $g$  est la constante de couplage du groupe  $U(1)$ . Pour être défini, on suppose aussi que  $\mathcal{F} > 0$ . La partie  $F$  du potentiel est alors définie positive et on n'a donc qu'un seul minimum localisé à zéro, quand au moins deux des corps ( $\langle \mathcal{F} \rangle$  et  $\langle p \rangle$  ou 0) disparaître. Le terme de Fayet-Iliopoulos, quant à lui, permet de briser la symétrie  $U(1)$  dans le sens où le potentiel a un minimum non nul en  $\langle y \rangle = 0\mathcal{F}$ . Il existe donc un minimum supersymétrique global ( $V_D = 0$ ) pour

$$f > 0 = 4 > + = 0, \quad = y/l-$$

Si l'inflation  $\phi$  prend une valeur supérieure à la valeur critique  $\langle f \rangle_c$  donnée par

$$\phi_c = \left( \frac{g^2 \xi}{2\lambda^2} \right)^{1/2}$$

puis on récupère un minimum local à  $\langle f \rangle_+ = \langle p \rangle_- = 0$ . Donc pour  $\langle f \rangle > \langle f \rangle_c$  et  $\langle f \rangle_+ = 0$ , le potentiel au niveau de l'arbre est plat dans la direction de  $\langle f \rangle > 0$  où il a une valeur indépendante de  $\langle f \rangle > Q$ , à savoir

Les champs  $\langle j \rangle_+$  et  $\langle \phi \rangle_-$  sont massifs et le spectre de masse est constitué d'un fermion de Dirac de masse  $A|\phi_0|$  et de deux champs scalaires de masse  $m^2_{\pm} = A^2 |\phi_0|^2 \pm P^2 \zeta$ . Cette théorie simple permet de réaliser un modèle d'inflation « hybride » (voir Fig. 8.7).

Après avoir déterminé le spectre de masse, il faut maintenant évaluer la correction radiative [8] qu'il induit à partir de (12.1). On obtient alors le potentiel effectif

$$= + (12.10)$$

Dans ce modèle, l'inflation dans le régime de roulement lent s'arrête lorsque  $\langle \mathcal{F} \rangle > Q$  atteint  $\langle f \rangle_c$  ou lorsque  $r/y \sim 1$ , ce qui se produit pour  $f, \sim \sqrt{y/87r^2} \cdot M_{Pl}$ , en fonction de la valeur des paramètres. Si le gonflage se termine avec la fin du régime de roulement lent, le champ  $\langle j \rangle$  se met à osciller jusqu'à ce que son amplitude devienne inférieure à  $\langle f \rangle_c$ .

### 12.1.3.2 Corrections de supergravité

Contrairement au cas de l'inflation à terme T, les corrections de supergravité peuvent être très importantes dans l'inflation à terme D. Il s'avère cependant qu'ils n'empêchent pas la compatibilité du modèle avec les données. Nous constatons que les masses des bosons et des fermions, qui dépendent de  $\exp(|\phi_0|^2/M^2)$ , modifient le potentiel effectif (12.1), rendant les calculs de roulement lent légèrement plus compliqués à réaliser. Des contraintes observationnelles imposent alors [5]

$$5 < 10^{-2}, A < 10^{-5} \text{ et } y/\hat{\Lambda}^4 \text{ GeV}.$$

Tout comme pour le cas de l'inflation à terme T, de nombreux modèles peuvent être construits. Référence [2] propose à nouveau une compilation et une description de nombreux modèles de ce type. Notons notamment l'existence de modèles construits dans le cadre de la grande unification.

## 12.2 Constante cosmologique et énergie sombre

Les observations cosmologiques indiquent que l'expansion de l'Univers est récemment entrée dans une phase d'accélération, de sorte que  $Q < 0$  (Chapitre 4). Cette conclusion repose uniquement sur le fait que l'Univers est décrit par un espace-temps de Friedmann-Lemaître, c'est-à-dire que le principe copernicien est valable. Si la gravité est bien décrite par la théorie de la relativité générale, alors une telle accélération ne peut s'expliquer que si le contenu en matière de l'Univers est dominé par un fluide dont l'équation d'état satisfait  $w < -1/3$ .

Le premier candidat qui vient naturellement à l'esprit pour une telle composante est la *constante cosmologique*, qui correspond à  $w = -1$ .

Cette section étudie les différents aspects concernant la nature physique de cette composante, appelée génériquement *énergie noire* et décrit quelques modèles qui ont été proposés pour l'expliquer. Pour les critiques, on peut se référer aux Réf. [9-11].

### 12.2.1 Le problème de la constante cosmologique

La constante cosmologique est un paramètre dimensionné (longueur<sup>-2</sup>) qui apparaît dans les équations d'Einstein (1.85). Selon que cette constante (notée  $\Lambda$  pour l'instant) est arbitrairement écrite à gauche ou à droite, elle peut être interprétée comme un terme géométrique ou comme un terme associé à une matière avec un tenseur énergie-contrainte.

$$T_{\mu\nu} = \frac{\Lambda}{8\pi G} g_{\mu\nu}$$

This would then correspond to a fluid with equation of state  $w = -1$  and constant energy density (12.12)

$$\rho_{\Lambda} = \frac{\Lambda}{8\pi G}$$

Du point de vue de la relativité générale ce paramètre est totalement libre et il n'existe aucun argument théorique permettant de fixer la valeur de cette constante cosmologique, ou de manière équivalente, l'échelle de longueur  $l_{\Lambda} = |\Lambda|^{-1/2}$ . La cosmologie impose encore grossièrement que

$$|l_{\Lambda}| < H^{-1}$$

En soi, cette valeur ne pose aucun problème, tant que l'on considère uniquement la physique classique. Notez cependant qu'elle est disproportionnée par rapport à l'échelle naturelle fixée par la longueur de Planck.

$$l_{\Lambda} > 10^{26} \text{ m} \quad \text{or} \quad \rho_{\Lambda} < 10^{-120} \text{ g cm}^{-3} \sim 10^{-120} \text{ M}^4 \sim 10^{-47} \text{ GeV}^4, \quad (12.13)$$

lorsqu'elle est exprimée en termes de densité énergétique.

#### 12.2.1.1 Densité d'énergie du vide

La physique des particules offre une nouvelle perspective à cette question. L'invariance de Lorentz du vide implique que son tenseur énergie-impulsion doit prendre la forme [12] ( $T^{\mu\nu} = -\rho_{\Lambda} g^{\mu\nu}$ ) = —■

D'un point de vue classique, considérons un champ scalaire de potentiel  $V(\phi)$ . Son action prend la forme (1.106) et son tenseur énergie-impulsion est donné par (1.107). Sa configuration de plus faible énergie est obtenue pour  $\phi = \phi_0$ . Dans cette configuration

$$T_{\mu\nu} = -V(\phi_0) g_{\mu\nu}, \quad (12.14)$$

où  $\phi_0$  est la valeur du champ qui minimise le potentiel. Il n'y a a priori aucune raison pour que  $V(\phi_0) = 0$ . En effet, le mécanisme de rupture spontanée de symétrie (chapitres 2 et 11) nous apprend que cette énergie peut changer au cours de l'évolution de

l'Univers si des transitions de phase se produisent. Par exemple, considérons un potentiel de type Higgs,

$$V(\phi) = V_0 - \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 + \frac{1}{4} \lambda \phi^4 \quad (12.15)$$

La configuration  $\phi = 0$  est instable et le vrai vide s'établit à  $\phi^2 = \mu^2/\lambda$ , valeur à laquelle la densité d'énergie est

$$V(\phi) = V_0 - \frac{1}{4} \mu^4/\lambda \quad (12.16)$$

Or, si  $V_0 = 0$  alors l'énergie du vide est négative. Dans le modèle électrofaible, elle est de l'ordre de  $V(\phi) \sim -\frac{1}{4} \mu^4/\lambda \sim -10^{-6} \text{ GeV}^4$  : c'est déjà un embarrassant 53 ordres de grandeur plus grand que ce qu'exigent les observations cosmologiques ! Cette situation peut être évitée si  $\mu^2 + V_0 > \mu^4/\lambda \sim 10^{-47} \text{ GeV}^4$ , mais alors pourquoi un réglage aussi fin aurait-il lieu ? Réciproquement, une telle annulation impliquerait l'existence d'une énorme constante cosmologique à des températures supérieures à l'échelle électrofaible.

D'un point de vue quantique, l'énergie du vide reçoit une contribution

$$\langle 0 | H | 0 \rangle = \int_0^{k_{\text{max}}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \omega(k) \quad (12.17)$$

découlant de l'énergie du point zéro. En fixant la fréquence de coupure,  $k_{\text{max}}$ , à l'échelle électrofaible ou à l'échelle de Planck, cette contribution est alors de l'ordre de

$$\langle 0 | H | 0 \rangle \sim (200 \text{ GeV})^4, \quad (k_{\text{max}} \sim (10^{18} \text{ GeV})^4, \quad (12.18)$$

ce qui implique un désaccord de respectivement 60 à 120 ordres de grandeur, encore une fois !

Le problème de la constante cosmologique revient donc à comprendre pourquoi

$$\langle 0 | H | 0 \rangle \sim 10^{-120} \text{ M}_{\text{Pl}}^4 \quad (12.19)$$

ou équivalent,

$$|\Lambda + 87rG(p)_{\text{vac}}| < 10^{-120} \text{ M}_{\text{Pl}}^2, \quad (12.20)$$

c'est-à-dire pourquoi  $\rho_{\text{vac}}$  est si petit *aujourd'hui* et pas pendant toute l'histoire de l'Univers.

#### 12.2.1.2 Apport de la supersymétrie

Tant qu'elle n'est pas brisée, la supersymétrie implique que l'énergie du vide doit être strictement nulle. En effet, comme vu au chapitre 10, les générateurs  $Q_a$ , des transformations de supersymétrie satisfont les relations d'anticommutation  $\{Q_a, Q_b\} = 2(\sigma_a)_{ab} P^0$  où les  $\sigma_a$  sont des matrices de Pauli,  $\text{CTO} = 1$  et est l'opérateur d'élan. Tant que la supersymétrie n'est pas rompue, le vide  $|0\rangle$  doit satisfaire

$$Q_a |0\rangle = Q_b |0\rangle = 0. \quad (12.21)$$

On en déduit que  $\langle 0 | P^0 | 0 \rangle = 0$ , de sorte que l'énergie du vide, à savoir  $\langle 0 | P^0 | 0 \rangle$ , doit strictement disparaître.

On peut récupérer ce résultat à partir du potentiel d'un champ chiral, dont l'expression du superpotentiel  $W$  est (Chapitre 10)

$$= \sqrt{2} \left| \frac{\partial W}{\partial \varphi^i} \right|^2, \quad (12.22)$$

en ignorant les degrés de liberté de jauge pour le présent argument. Dans la phase supersymétrique,  $W$  doit être stationnaire dans  $\langle p \rangle$  de sorte que  $V$ , étant défini positif, doit avoir  $V = 0$  au minimum. Les effets quantiques ne changent donc pas cette conclusion puisque la symétrie entre bosons et fermions annule exactement toutes les corrections de boucle. Donc  $\langle p \rangle_{\text{vac}} = 0$ .

Néanmoins, la supersymétrie est aujourd'hui brisée, ce qui implique que  $\langle p \rangle_{\text{vac}} > 0$ . Si elle était brisée vers 1 TeV, la densité d'énergie du vide serait de l'ordre de  $(1 \text{ TeV})^4$  en dessous de cette température, ce qui est là encore un désaccord avec des observations de 60 ordres de grandeur. A noter qu'un tel scénario est en réalité catastrophique car il impliquerait que  $P_A \sim -(1 \text{ TeV})^4$  durant toute l'histoire de l'Univers.

Cet argument est cependant basé sur une supersymétrie globale, alors que tout l'argument impliquant la gravité doit être avancé dans un contexte de supersymétrie locale, de *supergravité*. L'expression (12.22) est alors remplacée par

$$V(\langle p \rangle, \langle p \rangle) = e^{8\pi G K} \left( D_i W \bar{D}^i W - 24 T T G |W|^2 \right) \quad (12.23)$$

où  $D_i W = dW/dp^i + \text{Sit} G dG/dp^i$ ,  $K \bar{C}_y G \bar{C}_y$  étant le potentiel de Kähler et sa dérivée par rapport aux deux corps, soit  $K_{y\bar{y}} = dK/d\text{diff} d\bar{y} d\bar{y}$ . La condition selon laquelle la supersymétrie n'est pas rompue devient désormais  $D \wedge W = 0$ , donnant une position dans l'espace du champ où le potentiel  $V$  est généralement négatif. On peut encore imaginer un scénario dans lequel la supersymétrie serait brisée de telle manière que le terme entre parenthèses disparaîtrait, mais, encore une fois, un ajustement considérable serait nécessaire. Nous revenons donc à la situation précédente.

### 12.2.2 La nature de l'énergie noire

Les observations actuelles permettent de conclure que la fonction  $H(z)$  déduite des observations ne peut être reproduite par un mélange de matière ( $w = 0$ ) et de rayonnement ( $w = 1/3$ ). En particulier, la récente accélération de l'Univers nécessite l'introduction de nouveaux degrés de liberté dans les modèles cosmologiques. On appelle génériquement *énergie noire* tout modèle expliquant la phase récente d'accélération de l'Univers, indépendamment de son origine physique.

#### 12.2.2.1 Matière nouvelle ou modification de la relativité générale ?

Tout comme pour l'existence de la matière noire, la conclusion selon laquelle il devrait exister une forme d'énergie noire repose sur ses effets gravitationnels sur l'expansion de l'Univers, elle-même observée uniquement à travers les propriétés de la matière baryonique et des photons.

Deux directions sont alors possibles (de la même manière que pour la construction de la « matière noire » versus « MOND » décrite au chapitre 7) :

- on peut introduire un nouveau type de matière, non attendu dans le modèle standard de la physique des particules, tout en supposant que la gravité aux échelles cosmologiques est toujours décrite par la relativité générale. Cette nouvelle matière doit effectivement se



comporter comme un fluide d'équation d'état inférieure à  $-1/3$ . Nous décrirons dans ce qui suit plusieurs candidats, se réduisant généralement à l'introduction d'un champ scalaire léger.

- on peut supposer que la gravité, c'est-à-dire la *force à longue portée qui ne peut être filtrée*, n'est pas décrite par la relativité générale aux échelles cosmologiques. Comme résumé au chapitre 1, les modifications de la relativité générale sont extrêmement contraintes, en particulier dans le système solaire. Toute construction dans ce sens doit au préalable vérifier qu'une telle modification de la gravité est conforme à ces contraintes. Parmi les différents modèles, citons soit ceux introduisant un champ scalaire non-minimal et/ou non universellement couplé, soit ceux impliquant des gravitons massifs.

Dans les deux cas, on ne peut éviter d'introduire de nouveaux champs de matière (c'est-à-dire de nouveaux degrés de liberté physiques) au-delà de ceux du modèle standard de la physique des particules et du graviton. En ce sens, il doit exister une composante sombre, qu'elle soit ou non responsable d'une nouvelle interaction à longue portée.

La figure 12.1 présente quatre classes d'universalité pouvant englober les modèles proposés jusqu'à présent comme candidats pour la physique du secteur sombre.

Pour terminer, soulignons une troisième possibilité. La conclusion que  $q_0 < 0$  repose sur le fait que notre Univers est bien décrit par un espace-temps de Friedmann-Lemaître, c'est-à-dire sur le principe copernicien. Remettre en question ce principe peut offrir une explication de l'énergie noire sans introduire de nouvelle physique, mais seulement en considérant de nouvelles solutions cosmologiques pour décrire notre Univers. Nous discuterons également de cette possibilité plus tard.

Notons également que le modèle  $\Lambda$ CDM pur (et le plus simple de tous) est, pour le moment, compatible avec toutes les observations. Nous le considérerons donc comme notre modèle de référence.

### 12.2.2.2 Tests possibles pour *a*. physique du secteur sombre

Le secteur sombre joue un rôle de plus en plus important dans les modèles cosmologiques, et il est donc important d'aller au-delà de la phénoménologie d'un simple champ scalaire auto-interagissant. La reconstruction de l'équation d'état, ou équivalent de  $H(z)$ , est une tâche importante, mais loin d'être suffisante puisque, comme nous le montrerons, nous pourrions construire de nombreux modèles conduisant à la même fonction  $H(z)$ . Il est donc important d'aller au-delà de l'observation de cette fonction (obtenue par exemple à partir du type la *supernovæ*).

En particulier, les quatre classes d'universalité des modèles de la figure 12.1 ont des signatures spécifiques que nous pouvons tenter de détecter. Rappelant que la théorie de la relativité générale était basée sur le principe d'équivalence d'Einstein, une façon d'affiner les tests de la physique du secteur sombre est donc de tester ce principe d'équivalence. Les possibilités sont :

- Test *d'invariance de Lorentz*, utilisant la propagation de particules de haute énergie.
- Test *d'invariance de position locale*, en testant la constance des constantes non gravitationnelles (voir section 12.3 ci-dessous). La détection d'une variation de certaines constantes est, en général, associée à une violation de l'universalité de la chute libre, de sorte que les tests de physique locale peuvent avoir une grande importance dans ce contexte. Notez également qu'une telle signature est attendue dans le contexte de modèles de quintessence où le champ de quintessence est le dilaton de la théorie des cordes (voir

chapitre 13).

Test de l'équation de Poisson aux échelles sub-Hubble [15]. Si la gravité est décrite par la relativité générale, le contraste de densité de matière et le potentiel gravitationnel sont

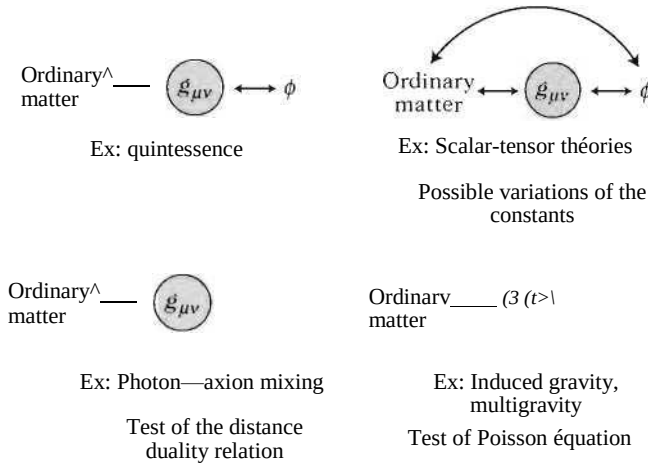


**Fig. 12.1** Classes d'universalité des modèles permettant la construction de la physique du secteur sombre. Les classes diffèrent selon la nature des nouveaux champs introduits et selon leur couplage à la matière. (en haut à gauche) : Modèles impliquant un nouveau type de matière (pas nécessairement, mais en pratique très souvent, un champ scalaire !) interagissant uniquement gravitationnellement (par exemple, quintessence, K-essence,... Dans ce cas, le seul effet observationnel apparaît principalement dans l'équation d'état du fluide cosmique et donc sur la fonction  $H(z)$  et le taux de croissance des perturbations de densité . (en haut à droite) : Si un tel champ lumineux est couplé de manière non minimale à la matière alors il est responsable de une nouvelle force à longue portée. Si cette force ne peut pas être filtrée, nous avons alors une modification de la relativité générale à grande échelle (par exemple, quintessence étendue). Ces modèles se distinguent par la variation possible de certaines constantes (en bas à droite) : Certaines Les modèles proposent une modification plus radicale de la relativité générale avec l'introduction d'un nombre infini de nouveaux degrés de liberté, comme par exemple les gravitons massifs (par exemple la multigravité, la gravité induite,. . . ). Dans ce cas, des tests de l'équation de Poisson peut laisser une signature, (en bas à gauche) : Ces modèles introduisent un nouveau domaine qui ne domine pas le contenu matière de l'Univers mais se couple aux photons. Le nombre de photons n'est alors pas conservé car ils peuvent se mélanger à ce nouveau champ non observé (ex. les axions). Tous les objets observés seraient alors moins lumineux car une partie de leurs photons ont oscillé dans cette nouvelle particule : la conclusion d'accélération des données des supernovae dérive alors du fait que toutes les distances ont été surestimées alors que l'expansion pourrait ne pas être accélérée. Dans ce cas, la relation de dualité de distance est violée. De la Réf. [14].

liés via l'équation de Poisson (5.17). La comparaison des grands catalogues de galaxies avec les effets de lentille gravitationnelle permet de reconstruire les deux côtés de cette équation et ainsi de la tester par observation. Ce test a été étendu dans de nombreux travaux essayant de concevoir un formalisme post- $\Lambda$ CDM qui a été ébauché dans la réf. [13].

- Test de la relation de dualité distance : la relation (3.75) permet de contraindre des modèles dans lesquels le nombre de photons n'est pas conservé [14], comme dans le cas d'un mélange d'axions de photons.

- *Mesure de l'équation d'état* en fonction du redshift. Cette mesure est

incontournable. En particulier, la première question à laquelle les observations devraient tenter d'apporter une réponse sans ambiguïté est la suivante : *est-ce que  $w \rightarrow -1$  ?*  
 - *Etude du taux de croissance de la structure.* En régime linéaire, ne joue qu'un rôle mais l'étude du régime non linéaire permet de contraindre les écarts par rapport à la relativité générale [16].

### 12.2.2.3 Questions auxquelles un modèle du secteur sombre doit répondre

L'accélération observée de l'Univers a conduit à distinguer le problème de la nature de l'énergie noire et celui de la constante cosmologique. Ce dernier problème est souvent supposé être résolu exactement ( $p_y = 0$ ), en supposant une raison de symétrie encore inconnue. La source de l'accélération de l'Univers mérite donc d'être expliquée.

Un modèle physique de l'énergie noire doit répondre à diverses questions. Tout d'abord, il faut expliquer le *problème de la coïncidence*, c'est-à-dire pourquoi la matière noire et l'énergie noire sont aujourd'hui dans des proportions comparables. Il doit alors être capable de reproduire l'équation d'état du fluide cosmique. Enfin, et c'est probablement le plus important, il doit fournir une explication sur l'origine de ces champs dans le cadre de la physique des particules ou dans l'une de ses extensions. Sans cela, une approche purement phénoménologique, aussi utile soit-elle, reste vaine et purement descriptive.

### 12.2.3 Quintessence

Nous appellerons *quintessence* tout modèle d'énergie noire impliquant un seul champ scalaire, noté  $Q$ , avec un terme cinétique canonique. De toute évidence, si ce champ explique l'accélération de l'Univers, il doit aujourd'hui être lent. De (1.106), on déduit que son équation d'état est

$$w(Q) = \frac{\dot{Q}^2 - 2V(Q)}{\dot{Q}^2 + 2V(Q)}, \quad (12.24)$$

qui peut varier entre  $-1$  et  $1$ . L'évolution de ce champ est dictée par l'équation de Klein-Gordon

$$\ddot{Q} + 3H\dot{Q} + \frac{dV}{dQ} = 0, \quad (12.25)$$

et  $Q$  doit se détendre vers le minimum de  $V$ .

Dans un modèle quintessence,  $Q$  n'a pas encore atteint son minimum aujourd'hui (sinon on reviendrait au problème précédent de la constante cosmologique). Il doit donc être en *slow-roll* pour que  $w(Q) < -1/3$ . Moins diluée que la matière et le rayonnement, elle dominerait donc inévitablement le contenu matière de l'Univers, même si cela n'explique pas pourquoi elle commence à dominer aujourd'hui ! De plus, l'ère de la domination  $Q$  n'aurait dû commencer que récemment, sinon le modèle serait incompatible avec les observations. Si le potentiel est suffisamment raide pour que le champ roule rapidement dans sa phase initiale, alors il se comporte comme un fluide avec l'équation d'état  $w = +1$ , son énergie est alors diluée en  $a^{-6}$ , ce qui la rend rapidement sous-dominante. Deux classes de modèles ont été construites pour prendre en compte ces contraintes : (1) ceux pour lesquels le champ évolue de façon monotone dans un potentiel décroissant vers  $0$  à l'infini et (2) ceux pour lesquels un champ scalaire, souvent appelé pseudo-*Boson Goldstone*, se détend vers

son vide. Reste à déterminer quels potentiels permettent la mise en œuvre de ce scénario.

### 12.2.3.1 Solutions de mise à l'échelle

Commençons par rechercher le type de potentiel qui nous permet d'obtenir une équation d'état « constante »,  $w(Q) = n/3 - 1$ . Cela implique que

$$\dot{Q}^2 = \frac{n}{3} \rho_Q, \quad \text{and} \quad V(Q) = \left(1 - \frac{n}{6}\right) \rho_Q. \quad (12.26)$$

Dans un Univers plat, pendant une phase dominée par un fluide avec une équation d'état  $w = m/3 - 1$  ( $m = 3, 4$ , respectivement, pour la matière et le rayonnement) et le champ scalaire (voir Réf. [17,18]), l'équation de Friedmann,  $H^2 = K(p_0 x^{m-1} + p_Q x^{n-1})/3$ , peut être utilisée pour réécrire la première équation sous la forme

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{UN}{x \sqrt{1 + B^2 x^{n-m}}}, \quad (12.27)$$

avec  $B^2 = p_0 / p_Q$ ,  $K/4^2 = n$  et  $x = 1/(1+z)$ .

Il faut alors distinguer deux cas. Si  $n = m$  alors  $Q = Q_0 \ln x$ , de sorte qu'on obtient le potentiel

$$V(Q) = A \exp(-\lambda Q), \quad (12.28)$$

où nous avons choisi un  $A$  positif pour le potentiel de satisfaire  $V \rightarrow 0$  lorsque  $Q \rightarrow \infty$  et avons introduit la masse de Planck à la main pour que  $A$  soit sans dimension. Un champ scalaire sous-dominant évoluant dans un potentiel (12.28) se comporte comme la matière qui domine l'Univers. Si  $m < n$ , alors la solution de (12.27) donne maintenant  $Q = Q_0 + x \ln [1 + B^2 x^{n-m} + B x^{n-m}] / (m - n)$ , de sorte que le potentiel est

$$V(Q) \propto Q^{-2/(n-m)}. \quad (12.29)$$

Si  $m > n$ , alors  $V \rightarrow 0$  quand  $Q \rightarrow \infty$  et  $w(Q) < w$  pour que le champ scalaire finisse par dominer.

En résumé, on obtient que pour les deux familles à potentiels,

$$V_1(Q) = M^4 e^{-\lambda Q/M^2} p, \quad V_2(Q) = M^{4+a} Q^{-a}, \quad (12.30)$$

où  $A > 0$  et  $a > 0$ , le champ de quintessence,  $Q$ , se comporte comme un fluide avec une équation d'état

$$w_1(Q) = w, \quad w_2(Q) = -\frac{a}{a+2} \quad \text{IDfy - oui} \quad (12.31)$$

respectivement, tant que l'Univers est dominé par une composante d'équation d'état constante  $w$ . Ces solutions sont également appelées solutions de suivi puisque l'équation d'état du champ scalaire est déterminée par celle du fluide qui domine le contenu matière de l'Univers. Au potentiel 14, le champ scalaire correspond toujours à une fraction constante de la matière fluide, tandis qu'au potentiel  $V_2$  il finira toujours par dominer.

### 12.2.3.2 Mécanisme attracteur

Il est intéressant de montrer que ces solutions dites d'échelle sont des attracteurs pour l'évolution cosmologique du champ scalaire [17,18]. Pour illustrer cela, considérons l'exemple d'un potentiel de loi de puissance inverse  $V \propto 1/Q$  et posons  $t = \exp u$ ,  $u = Q/Q_{\text{scaling}}$ . L'équation de

Klein-Gordon prend alors la forme

$$\left( \frac{f}{m} + \frac{-1V + f}{a+2} - \frac{1}{a+2} \right) u(i - u^a) = 0. \quad (12.33)$$

En définissant  $v = u'$  et en linéarisant autour de la solution de mise à l'échelle ( $u = 1 + \epsilon$ ), nous obtenons

$$-2 \quad (12.33)$$

En calculant les valeurs propres de ce système, on obtient que la solution est un attracteur si  $1 - 6/m - A/(a+2) < 0$  (voir Fig. 12.2).

Ainsi, à l'ère de la matière et du rayonnement, le champ  $Q$  se comporte comme un fluide avec une équation d'état dépendant de celle du champ qui domine le contenu matière de l'Univers. Le mécanisme attracteur garantit que l'on peut partir d'un large domaine de conditions initiales pour atteindre cette solution de mise à l'échelle. On peut donc penser que pour des redshifts inférieurs à celui de la nucléosynthèse, la solution de mise à l'échelle est atteinte. La figure 12.3 décrit l'évolution du domaine de la quintessence dans deux modèles différents. Comme prévu, le champ  $Q$  se comporte d'abord comme un  $-6$  et devient rapidement sous-dominant avant d'atteindre le régime d'échelle, expliquant ainsi les changements dans son équation d'état. Elle peut enfin dominer dans un passé plus récent et expliquer l'accélération de l'Univers.

A ce niveau d'analyse, la forme des potentiels (12.30) est ponctuelle et ne se justifie que par son intérêt cosmologique. Reste à comprendre comment de tels potentiels peuvent apparaître dans le cadre de modèles issus de la physique des hautes énergies.

### 12.2.3.3 Construction de maquettes

Les potentiels décroissant de façon monotone vers 0 à l'infini apparaissent souvent dans les modèles où la supersymétrie est brisée dynamiquement. En fait, les théories supersymétriques sont caractérisées par des potentiels avec de nombreuses directions plates (directions le long desquelles le potentiel varie lentement). Ces dégénérescences sont levées lors de la rupture dynamique de supersymétrie, qui est contrôlée par un champ scalaire.

De nombreux potentiels ont été proposés et nous mentionnons ici quelques exemples :

- *Potentiel exponentiel*. Il peut apparaître dans des scénarios de rupture spontanée de symétrie par condensation de Gaugino dans les théories efficaces des supercordes. Pour des valeurs élevées du dilaton, le condensat induit un potentiel  $V(\phi) \propto \exp(-3\phi/b)$ . Un comportement similaire est obtenu pour les modules [19]. On obtient ainsi une première classe de potentiels

$$V(Q) = M^4 \exp(-\phi/b) \quad (12.34)$$

Si le champ domine, son équation d'état est

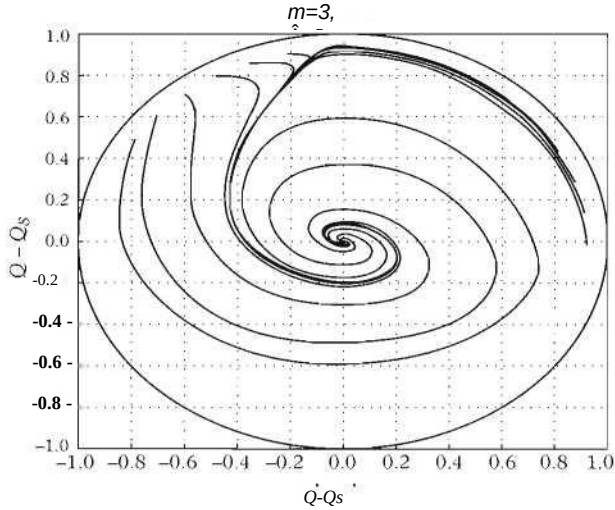


**Fig. 12.2** The scaling solution is represented by the point of coordinates (0,0). This phase diagram for a quintessence model with potential  $V(Q) \propto \exp(-XQ/M_p)$  illustrates the attractor mechanism when the matter content of the Universe is dominated by matter ( $r = 3$ ).

$$w(Q) = \gamma - \frac{\lambda^2}{3} \quad (12.35)$$

However, as we have seen, the field must initially be subdominant and its energy density then always remains a given fraction of that of the dominant fluid,

$$\Omega_Q = \frac{3(1+w)}{\lambda^2} \quad (12.36)$$

Therefore in its minimal version, this potential does not provide a satisfying model of quintessence. Notice that the value  $\Omega_Q$  is then constrained by primordial nucleosynthesis that limits the number of relativistic degrees of freedom. The constraint  $\Omega_Q(\text{IMC}) < 0.13$  implies that  $\lambda > 5.5$ .

An ‘accident’ in the potential can allow for the field to slow down and to dominate, for example, with the ‘string inspired’ potential [20],

$$V(Q) = \left[ A + \left( \frac{Q}{M_p} - B \right)^\alpha \right] e^{-XQ/M_p}$$

- *Double-exponential potential.* The previous model has been extended to

$$V(Q) = A \gamma^4 \left[ \exp \left( -\alpha \frac{Q}{M_p} \right) + \exp \left( -\beta \frac{Q}{M_p} \right) \right], \quad \alpha > \beta, \quad (12.37)$$

where the sign of  $\beta$  is arbitrary. As long as  $Q$  is subdominant, the first exponential dominates and  $w_Q = w$ . If  $\beta < 0$ , the potential has a minimum,  $Q_{\text{min}}/M_p =$



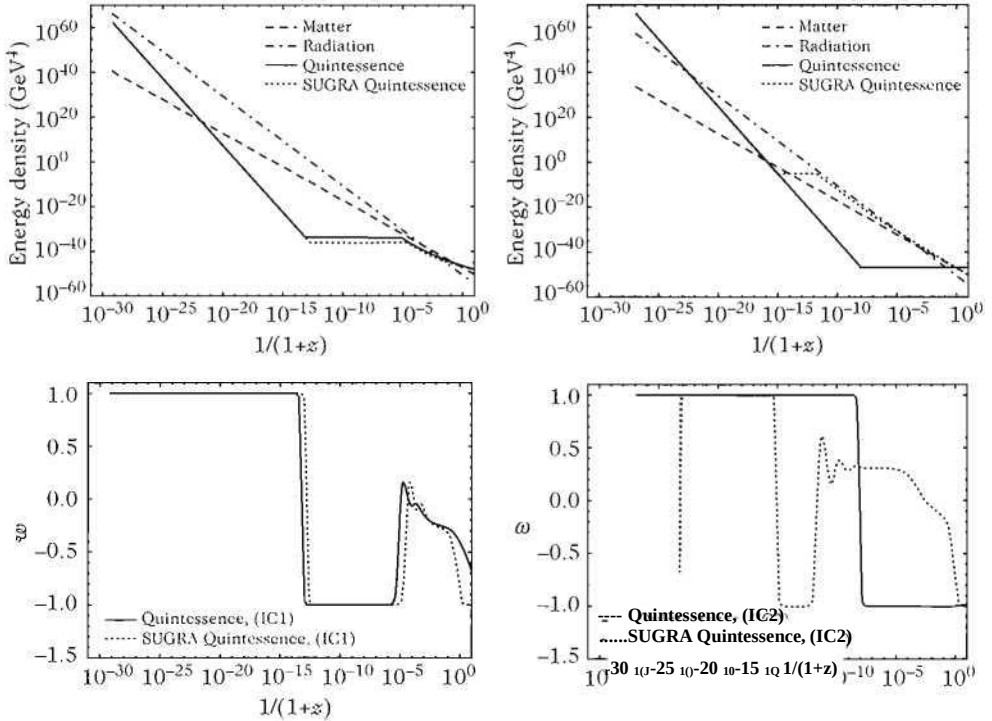


**Fig. 12.3** Evolution of the energy densities of matter, radiation and quintessence field for two quintessence potentials (inverse power law with  $a = 6$  and SUGRA) for two sets of initial conditions (top) and corresponding equation of state (bottom). The field behaves initially as  $a^{-6}$  and becomes subdominant. Its final evolution depends on the fluid dominating the dynamics of the Uni verse.

$(cr - Z?)^{-1} \ln(-CE/3)$ , vers lequel  $Q$  est attiré et donc  $w \rightarrow -1$ . Contrairement à une pure constante cosmologique, le champ peut osciller avant de se stabiliser. Il faut cependant expliquer l'accord entre  $M$ ,  $a$  et  $\beta$  qui permet  $V(Q_{min}) \sim 3M^4 H_0^2$ . Si  $\beta > 0$  alors l'une des deux exponentielles finit par dominer l'autre, de sorte que, aux temps grands, le champ se comporte avec une équation d'état donnée par la forme (12.35).

*Loi de puissance inverse.* Ce modèle est l'archétype des modèles quintessence et aussi le plus ancien considéré [17,18]. Comme le montre l'analyse précédente, le domaine est attiré vers une solution de mise à l'échelle. La figure 12.4 représente la variation de son équation d'état avec redshift pour différentes valeurs de  $a$ . Contrairement au potentiel exponentiel, le champ scalaire domine toujours dans les grands temps.

Un modèle de rupture de supersymétrie dans le cadre de la chromodynamique peut fournir un tel potentiel [19]. Dans un modèle QCD, avec un groupe de jauge  $SU(A_c)$  avec des saveurs de quarks  $N_f < N_c$ , le couplage de jauge devient fort vers l'échelle de rupture de supersymétrie et des états de liaison des mésons peuvent se former. La dynamique est

then described by a potential of the form

$$W = (N_c - N_f) \frac{M^{(3N_c - N_f)/(N_c - N_f)}}{(\det \Pi)^{1/(N_c - N_f)}}.$$

En interprétant le champ mésonique  $\Pi$  comme le champ de quintessence  $Q$ , son potentiel est alors une loi de puissance inverse avec exposant

$$\alpha = 2 \frac{(N_c + N_f)}{(N_c - N_f)}. \quad (12.38)$$

La dynamique de ces modèles est résumée par les Fig. 12.3 et 12.4.

- *Potentiel SUGRA*. Dans le modèle précédent,  $Q$  a aujourd'hui une valeur de l'ordre de  $M_p$ . Les corrections de la supergravité [21] ne peuvent plus être négligées et transforment le potentiel en

$$V(Q) = M^{4+} \llcorner Q \llcorner \exp \quad . \quad (12.39)$$

L'effet de cette correction est de stabiliser  $Q$  vers  $M_p$ . L'équation d'état de quintessence est donc plus proche de  $-1$  que pour un potentiel à loi de puissance inverse (voir Fig. 12.3).

- *Boson pseudo-Goldstone*. Ces modèles impliquent un champ relaxant vers le *minimum* de son potentiel,  $V = M^4 v(Q/f)$  où  $f$  est le champ VEV. Si le champ est proche de sa VEV et explique l'accélération de l'Univers, il faut

$$M^4 \sim H^2 M^2 \text{ et } \llcorner V'' M^4 \llcorner < <$$

la deuxième inégalité étant simplement la condition de roulement lent évaluée aujourd'hui. Nous en déduisons que nous avons besoin

$$f = O(M_p) \quad \text{et} \quad M \sim 10^3 \text{ eV}, \quad (12h40)$$

de sorte que le champ doit être très léger,  $10Q \sim 10^{33} \text{ eV}$ , ce qui n'est naturel que si le champ est un boson pseudo-Goldstone. Un exemple typique est celui de l'axion pour lequel

$$V(Q) \sim M^4 \left[ 1 + \left( \frac{Q}{f} \right)^2 \right] \quad (12.41)$$

- *Quintessence étendue*. L'existence de la solution de mise à l'échelle et du mécanisme attracteur a été étendue au cadre des théories tensori-scalaires [22]. Le champ de quintessence est alors le dilaton et il peut y avoir un mécanisme de double attracteur, vers la théorie de la relativité et vers la solution de mise à l'échelle [23]. Un modèle inspiré de la théorie des cordes, appelé « dilaton runaway », a été construit [24,25]. Dans ce modèle, le champ scalaire n'est pas universellement couplé à la matière, ce qui entraîne une variation des constantes non gravitationnelles. Un phénomène intéressant apparaît également si l'on suppose que le champ de quintessence est couplé différemment à la matière ordinaire et à la matière noire [26].

12.2.3.4 Des problèmes par excellence

L'existence du mécanisme attracteur vers la solution d'échelle assouplit les contraintes sur les conditions initiales (mais ne les supprime pas, comme nous l'avons vu dans un cas similaire au chapitre 8) du champ scalaire. Toutefois, cela ne signifie pas que ces modèles ne nécessitent pas de réglage précis.

En effet, pour que le champ  $Q$  explique l'accélération de l'Univers, il faut  $Q/Q_0 \sim 0,7$ , ce qui impose une contrainte sur les valeurs des paramètres du potentiel. Pour un potentiel de loi de puissance inverse, on obtient la condition

$$M^{i+Cx} \sim J 7_0^2 M^{n+2}, \tag{12.42}$$

ce qui revient à imposer qu'aujourd'hui  $V(M_p) \sim p_{cr} t$ . La figure 12.4 donne la relation entre  $M$  et  $a$ , obtenue numériquement, pour un Univers fiat de  $Q_0 = 0,7$ . Il y a donc encore un réglage à faire. Le bon point de (12.42) est que l'échelle d'énergie peut désormais être fixée proche de l'échelle du TeV en choisissant *correctement*.

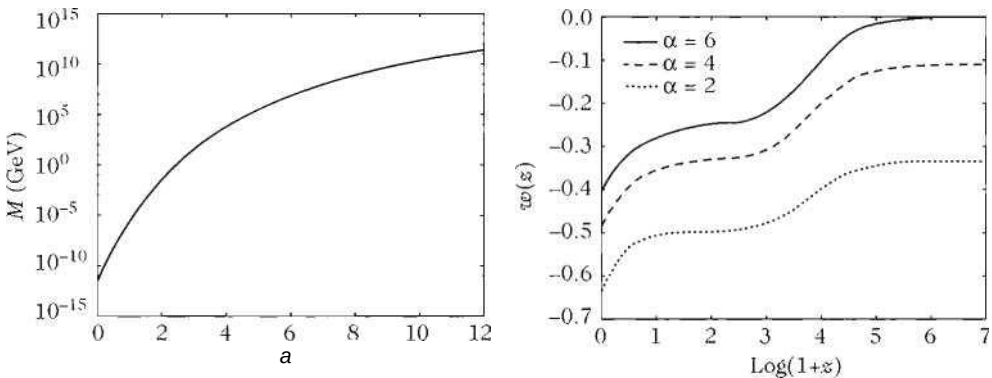


**Fig. 12.4** (left): Value of the energy scale,  $M$ , required to explain the fact that dark energy represents 70% of the matter content today as a function of the exponent  $a$  for inverse power law potentials. (right): Evolution of the equation of state as a function of the redshift for different values of  $a$ .

Quant au champ lui-même, il doit encore être très léger puisque l'équation de Klein-Gordon nous dit que si  $H^2 > V''$ ,  $Q$  s'amortit très rapidement et si  $H^2 < V''$  il n'est pas en régime de roulis lent. Indépendamment de la forme exacte du potentiel, il faut

$$m_Q \sim H_0 \sim 10^{-33} \text{ eV}. \tag{12.43}$$

Cette masse n'est proche d'aucune autre échelle caractéristique de la physique des particules, ce qui en fait un problème de naturalité. Si ce champ scalaire apparaît dans le cadre d'un modèle de physique des particules, alors il doit être couplé à d'autres champs. Il induit donc de manière générique une force à longue portée qui peut violer l'universalité de la chute libre. Il est également difficile d'imaginer une symétrie qui interdise un couplage aux termes cinétiques des champs de jauge, de la forme  $\sim (Q/M_p)^n F^2$ . Comme nous le verrons plus tard, ces types de couplages sont fortement

contraints. Une solution est de supposer que le champ de quintessence obéit à une symétrie de translation,  $Q \rightarrow Q + \text{const.}$ , mais seulement de manière approximative car sinon le potentiel serait absolument fiat (cf. l'exemple du boson pseudo-Goldstone). Une autre solution est de supposer que le champ de quintessence est le dilaton et qu'il existe un mécanisme de découplage suffisamment efficace, comme l'attraction vers la relativité générale (voir chapitre 10) ou comme le mécanisme caméléon [27].

Un champ lumineux doit également être protégé car sinon les corrections radiatives ont tendance à inclure une masse a priori plus grande que celle observée. Une solution intéressante est de considérer que le champ quintessence est un module [28],

Enfin, on peut se demander si ces modèles expliquent réellement les observations cosmologiques. En effet, si l'on veut simplement reproduire la fonction observée  $E(a)$ , on devrait pouvoir concevoir un modèle induisant une densité énergétique  $PDE(0-)$ , obtenue à partir de la fonction observée  $H^2(a)$  en soustrayant les contributions de la matière que nous connaissons (c'est-à-dire la matière sans pression et le rayonnement). Cependant, on peut toujours construire un potentiel, sous forme paramétrique, reproduisant le couple

$$\begin{aligned} V(n) &= \frac{H(1-X)}{16\pi G_N} \left( 6H + 2aH' - \frac{aHX'}{1-X} \right), \\ Q(a) &= \int \frac{d \ln a}{\sqrt{8\pi G_N}} \left[ aX' - 2(1-X)a \frac{H'}{H} \right], \end{aligned} \quad (12.44)$$

avec  $X(a) = 8TtG_{ti} pE > E(a)/3H'^2(a)$ . D'une certaine manière, ces modèles ne sont pas prédictifs puisqu'il est toujours possible d'en construire un qui reproduit l'intégralité de l'équation d'état  $w(a)$  de l'énergie noire !

L'apport d'un modèle de quintessence ne réside donc pas dans sa résolution des problèmes posés par les observations cosmologiques mais dans le fait qu'un modèle déduit de la physique des hautes énergies peut également expliquer ces observations. Pour l'instant, même s'il existe une certaine justification pour les potentiels suggérés, l'implémentation dans un cadre à haute énergie reste difficile et a. question à étudier plus en détail.

## 12.2.4 Autres modèles

### 12.2.4.1 Matière noire solide

Dans les modèles de défauts topologiques impliquant différents types de défauts ou de symétries non abéliennes, il existe des cas où des obstructions topologiques empêchent les reconnexions. Les défauts forment alors une toile « solide ». Un exemple est fourni par un modèle axion avec a. schéma de rupture de symétrie du type  $17(1) \rightarrow Z_j$ . L'Univers est alors rempli d'une composante diffuse de matière noire à pression négative [29].

Ces modèles donnent une prédiction claire de l'équation d'état, que l'on considère des cordes cosmiques ou des murs de domaines,

$$w_{\text{wall}} = -\frac{2}{3}, \quad \text{■}^{\text{string}} = -\frac{1}{3} \quad (12.45)$$

Dans le cas des murs, on obtient aujourd'hui  $Q \sim 1$  pour une transition de phase à une échelle énergétique de l'ordre de 100 keV. Ainsi, de tels défauts n'incluent aucune signature catastrophique sur le fond cosmique des micro-ondes. Malheureusement, les contraintes d'observation sur l'équation d'état excluent de tels modèles.

12.2.4.2 *K-essence*

*K-essence* [30,31] considère un champ scalaire avec un terme cinétique non canonique. Le modèle de Tins représente une transposition des modèles d'inflation A' [32] à l'Univers récent. Le mécanisme s'appuie sur les propriétés dynamiques de ce champ et sur l'existence d'un mécanisme attracteur, tout comme dans la quintessence.

L'action de ce champ scalaire, couplé de manière minimale à la gravité, prend la forme

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left( -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right) \quad (12.46)$$

où  $X = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi$ . Pour simplifier, on fait parfois la décomposition  $X = K(\phi) + p(X)$  avec  $K(\phi) > 0$  (voir Réf. [33] pour le cas général). Le champ scalaire n'a alors aucun potentiel mais notons que si  $p(0) = 0$  alors, pour de petites valeurs de  $X$ ,  $p$  autour de  $X = 0$  et en ignorant les termes quadratiques et d'ordre supérieur, conduit à un terme cinétique  $\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi$  et un potentiel  $p(0)$ . Après une redéfinition du champ, cela conduit à un champ scalaire ordinaire avec un certain potentiel.

En utilisant l'analogie avec un fluide, l'action (12.46) implique que

$$p_K = K'(\phi), \quad P_K = K(\phi) + p(X), \quad (12.47)$$

avec  $p(X) = 2Xp'(X) - p(X)$ . La vitesse du son et l'équation d'état sont alors données par

$$w_K(X) = \frac{\tilde{p}(X)}{2X\tilde{p}'(X) - \tilde{p}(X)}, \quad c_s^2(X) = \frac{\tilde{p}'(X)}{\tilde{p}'(X) + 2X\tilde{p}''(X)}. \quad (12.48)$$

On peut se restreindre à la classe des modèles considérés en imposant  $p_X(X) > 0$ ,  $\frac{p(X)}{X} > -1$  and/or  $c_g(\Lambda) > 0$ . La seule modification d'importance pour la mécanique des champs est celle de l'équation de Klein-Gordon qui prend la forme, si  $p'(X) > 0$ ,

= (12.49)

A titre d'exemple [30], si on choisit  $p(X) = X - X^2$ , alors il existe une solution de mise à l'échelle (et de suivi) qui est un attracteur des dynamiques avec une équation d'état

$$w_K(X) = -\frac{1}{3} \quad (12.50)$$

clôturant une époque dominée par un fluide avec équation d'état  $w = -\frac{1}{3}$ .

Cet exemple partage une forte similitude avec la quintessence. Pour mieux comprendre ce lien, considérons la théorie définie par l'action [34]

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left( -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) - Q(X) \right) \quad (12.51)$$

ce qui fait intervenir un nouveau champ non dynamique  $\phi$  jouant le rôle d'un simple multiplicateur de Lagrange, dans le même esprit que pour les théories du champ auxiliaire  $F$  dans

supersymétrie (voir le chapitre 10 pour les deux exemples). La variation de cette action par rapport au  $\phi$  de champ conduit à l'équation

de sorte que tant que  $\phi \neq 0$ , cette équation se réduit à une contrainte déterminant  $X$  comme une fonction de  $y$ . La théorie (12.51) est donc équivalente à la théorie initiale (12.46). Définir

$$m, V(Q) = K[\phi(Q)],$$

et, en supposant que  $\phi''$  est de signe constant,

$$\square 0 = \phi'(x) \nabla W = \phi(x) - x \phi'(x)$$

l'action (12.51) prend la forme

$$J_L = \int d^4x \sqrt{-g} V(Q) \quad (12.52)$$

Pourvu que  $\phi > 0$ , alors  $\phi' < 0$  implique  $\phi'' > 0$ . Pour la solution cosmologique, l'équation de contrainte pour  $\phi$  implique que  $V(\phi) = Q^2/2V(Q)$ . En régime de roulis lent,  $W(\phi)$  est quasiment constant de sorte que l'équation d'évolution de  $Q$ ,

$$Q + (3H^2 - c^2)Q + V'(Q)W = 0 \quad (12.53)$$

se réduit à l'équation classique de Klein-Gordon. L'exemple (12.50) est alors presque équivalent à un mode de quintessence avec un potentiel de loi de puissance inverse d'exposant  $a = 2/3/(2 - \gamma)$  pour le corps  $\mathbb{Z}/Q$ .

Cette construction montre que les modèles de K-essence peuvent se réduire à des modèles de quintessence. Cependant, si  $\phi' < 0$ , la construction conduirait à un modèle de quintessence avec un terme cinétique de mauvais signe. Dans ce cas, une étude approfondie des degrés réels de liberté de la théorie s'impose pour déterminer si elle est pathologique ou non.

#### 12.2.4.3 Tachyon

Les modèles Tachyon s'appuient sur l'action [35]

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left( -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right) \quad (12.54)$$

inspiré de l'action efficace de Dirac Born-Infeld. Cette action peut être considérée comme la version de la théorie des champs de l'action d'une particule relativiste massive unidimensionnelle  $\mathcal{L} = -m\sqrt{1 - \dot{q}^2}$ , où  $q$  est la position de la particule.

In the cosmological framework, the field  $T$  behaves as a fluid with pressure and density

$$P_T = -\frac{V(T)}{1 - T^2}, \quad P_T = -V(T)/(1 - T^2). \quad (12.55)$$

The Klein-Gordon équation takes the form

$$1 - T^2 \frac{dT}{dt} = 0 \quad (12.56)$$

et les équations de Friedmann, pour un univers fiat, deviennent

$$r^2 \frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{1}{2} \dot{r}^2 + P = 0, \quad w_P + \frac{T^2 V(T)}{1 - T^2} = 0 \quad (12.57)$$

L'intérêt suscité par ce modèle repose sur le fait que l'on peut décomposer la densité et la pression du tachyon (12.55) comme la somme d'une composante de matière noire.

$$\frac{V(T)T^2}{1 - T^2}, \quad P_{DM} = 0, \quad (12.58)$$

et un composant à pression négative

$$P = -\rho, \quad (12.59)$$

Ainsi, en régime de roulis lent,  $T \ll 1$  et le tachyon se comportent comme de l'énergie sombre, alors que si  $V(T) \rightarrow 0$  lorsque  $T \rightarrow \infty$  et  $T^2 \rightarrow 1$  simultanément, ils peuvent se comporter comme de la matière noire. L'équation d'état effective aujourd'hui et le rapport  $r = P_{DV}/\rho T_{nM}$  sont liés par la relation  $(1 + w)(1 + r) = 1$ . Pour  $r \sim 2$ , cela implique  $w \sim -2/3$ , ce qui est légèrement en accord avec les observations. L'une des vertus de ce modèle est donc principalement de suggérer une origine similaire pour deux composantes du secteur noir, ce qui résout ainsi le problème de la coïncidence.

#### 12.2.4.4 *Gaz Chaplygine*

Ces modèles [36] étaient à l'origine basés sur un fluide avec une équation d'état

$$P = -\frac{A}{\rho}, \quad A > 0, \quad P$$

présenté comme une théorie efficace en hydrodynamique. Bien que sa forme ne soit pas celle d'un simple fluide parfait, la vitesse du son reste positive et bornée.

$$2 \frac{dP}{d\rho} = -\frac{A}{\rho^2} \quad (12.61)$$

ce qui pour un fluide à pression négative n'est pas un fait anodin. Il a été avancé que, dans le cadre de la théorie des cordes, l'action Nambu-Goto pour les D-branes vivant dans un espace  $D + 2$  dimensions conduit à une telle équation d'état (voir chapitre 13). Notons également que cette équation d'état est celle d'un tachyon (12.54) de potentiel constant  $V = yC_4$ .

L'équation (12.60) a été généralisée à la classe des modèles phénoménologiques

$$P = A\rho^a, A > 0, \quad 0 < a < 1, \quad (12.62)$$

et il est facile de se convaincre que l'équation de conservation (3.27) implique que

$$\rho = \left[ A + B a^{-3(1+a)} \right]^{1/(a+1)}, \quad (12.63)$$

où  $B$  est une constante d'intégration. Cette matière interpole donc entre un comportement de matière noire à de grands redshifts, un  $B\rho^a$  de  $a = 3/4$ , et un comportement de type cosmologique constant. Dans le cas  $a = 1$ , il est intéressant de noter qu'aux petits redshifts, le gaz Chaplygin se comporte comme la superposition d'une constante cosmologique et d'un fluide d'équation d'état  $w = -1/3$  ■

$$v < 4 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}, \quad P \sim -\rho/\hat{A} + \sim \rho/L = a \sim \frac{6}{4}. \quad (12.64)$$

Cette classe de modèles vise également à décrire la matière noire et l'énergie noire dans un cadre unique.

## 12.2.5 Autres approches

### 12.2.5.1 Modification de la relativité générale

Les modèles de quintessence étendue impliquent en quelque sorte une modification de la relativité générale puisqu'ils impliquent une interaction scalaire à longue portée. Dans ce qui suit, nous souhaitons considérer des modèles impliquant une modification plus légère de la gravité.

Différents modèles inspirés des branes ont été développés (voir le chapitre 13 pour la définition de ces concepts). Citons le mécanisme *d'auto-apprentissage* dans lequel il existe un champ scalaire dans la masse s'ajustant dynamiquement pour réduire la valeur de la constante cosmologique effective sur la brane [37], les modèles à plusieurs branes [38] et les modèles de gravité induite [39] (voir chapitre 13). Dans ce dernier cas, l'équation de Friedmann prend la forme

$$H^2(z) = H_0^2 \left[ \Omega_K (1+z)^2 + \left( \sqrt{\Omega_{r_c}} + \sqrt{\Omega_{r_c} + \Omega_m (1+z)^3} \right)^2 \right], \quad (12.65)$$

où  $r_c$  étant la distance caractéristique au-delà de laquelle le graviton n'est plus localisée sur la brane. Elle devient alors en 5 dimensions, tout comme la gravité qui s'affaiblit ainsi à grande distance. L'analyse des supernovae indique que  $r_c \sim 1,4/7^h$

Les modèles *multigravité* sont des systèmes pour lesquels il existe deux ou plusieurs métriques couplées. On peut montrer que la seule théorie non linéaire cohérente impliquant  $N$  métriques est la somme des  $N$  actions de la relativité générale. Dans le cas d'un modèle de bigravité, nous supposons que les deux « mondes » interagissent simplement via le couplage métrique

$$S = \int \sqrt{-g_1} \left[ \frac{R[g_1]}{2\kappa_1} + \mathcal{L}_1(g_1, \text{mat}_1) \right] + \int \sqrt{-g_2} \left[ \frac{R[g_2]}{2\kappa_2} + \mathcal{L}_2(g_2, \text{mat}_2) \right] - \mu^4 \int (g_1 g_2)^{1/4} V(g_1, g_2), \quad (12.66)$$



où  $V$  est une fonction scalaire de couplée

à la métrique (matière de type 1 avec  $\langle \rho \rangle$ ) et il n'y a pas d'interactions entre la matière des deux secteurs. Ce modèle introduit donc trois paramètres ( $\kappa_i$ ,  $\alpha_2$  et  $\mu$ ). Lorsque  $\mu = 0$ , les deux mondes n'interagissent pas. Les équations de champ prennent alors la

form

$$G_{\mu\nu}^{(i)} = \kappa_{(i)} \left( T_{\mu\nu}^{(i)} + t_{\mu\nu}^{(i)} \right), \quad (12.67)$$

où est le tenseur énergie-impulsion de la matière du monde  $i$  ( $i = 1, 2$ ) et celui associé au couplage entre les deux métriques, par exemple,

$$t_{(1)}^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{g_{(1)}}} \frac{\delta S_{\text{int}}}{\delta g_{\mu\nu}^{(1)}} = -2\mu^4 \left( \frac{g_2}{g_1} \right)^{1/4} \left[ \frac{1}{4} g_{(1)}^{\mu\nu} V(g_1, g_2) + \frac{\partial V(g_1, g_2)}{\partial g_{\mu\nu}^{(1)}} \right]. \quad (12.68)$$

L'étude dynamique de cette théorie montre qu'elle conduit génériquement à une phase d'accélération [10]. Ce dernier est anisotrope, ce qui le distingue des autres modèles existants.

### 12.2.5.2 Oscillation photonique-axionique

Tout champ pseudo-scalaire, comme l'axion de QCD (voir chapitre 7), peut se coupler à deux photons. En présence d'un champ magnétique, les photons et les axions peuvent osciller entre eux puisqu'ils ne sont pas les états propres de la matrice de masse.

Il a été suggéré que ce mécanisme est suffisamment efficace pour expliquer les observations de supernovæ. Ces derniers verront s'atténuer à mesure qu'ils s'éloignent, tout simplement parce qu'une partie de leur énergie lumineuse a été convertie en axions, que l'on ne détecte pas.

Cette nouvelle approche implique un nouveau champ de matière mais ne suppose pas qu'il domine le contenu matière de l'Univers et ne modifie pas la théorie de la gravité. Les équations dynamiques de l'Univers ne sont donc pas modifiées et l'Univers ne serait pas en accélération malgré les indications observationnelles. Néanmoins, ce modèle souffre de divers problèmes. (1) Les champs magnétiques et le plasma intergalactique ne sont pas homogènes, ce qui implique une perte de cohérence des oscillations, se traduisant par une achromaticité des courbes de lumière des supernovæ. Ceci est fortement contraint par l'observation. (2) La preuve de l'accélération de l'Univers ne repose plus sur la seule observation de supernovæ et il est difficile d'expliquer comment ce mécanisme affecterait le fond cosmique des micro-ondes et les effets de lentille gravitationnelle, qui, une fois combinés, pointent également vers l'existence d'une accélération cosmique. (3) Ce modèle induit une violation de la relation de dualité distance (voir chapitre 3) qui semble désormais vérifiée par observation.

### 12.2.5.3 Considérations anthropiques

Il existe de nombreuses versions du principe anthropique [41], certaines si faibles qu'elles ne sont que des tautologies et d'autres si fortes qu'elles conduisent à des absurdités ou à des arguments finalistes.

Ce principe repose principalement sur l'idée que certains paramètres influencent fortement d'autres phénomènes physiques (comme notre existence en tant qu'observateurs physiques) et que si ces paramètres avaient une autre valeur, ces phénomènes ne se produiraient pas ou ne seraient pas observables. Selon cette approche, il ne s'agit plus de dériver les valeurs de ces paramètres mais de montrer quelles sont les conséquences de leur modification sur l'existence

ou sur les caractéristiques de certains phénomènes physiques, chimiques ou biologiques. Cette approche n'a donc pas le même statut épistémologique puisqu'elle ne l'est pas. une explication des valeurs des paramètres et cela revient à montrer que ces valeurs sont des conditions nécessaires à l'existence de tel ou tel phénomène.

Notez que cet argument ne prouve pas la nécessité de l'existence des phénomènes en question. En termes plus simples, si un phénomène physique  $P$  existe et si cela implique que la condition  $C$  doit être satisfaite, cela implique alors que si  $C$  n'est pas valide, alors  $P$  est impossible. Mais rien ne nous dit qu'il faut nécessairement avoir  $P$ . Cette approche repose sur des conditions nécessaires et ne doit pas être confondue avec une approche basée sur des conditions suffisantes. Si le phénomène  $P$  est la vie, alors ce principe est appelé *principe anthropique* et revient à une prise en compte. que l'existence d'un observateur est une observation à ne pas négliger.

La contrainte la plus directe concernant la constante cosmologique repose sur la réalisation que si l'énergie du vide était trop importante, alors les galaxies ne se formeraient jamais. La condition  $\rho_A(z_{\text{gai}}) < \rho_m(-Z_{\text{gai}})$  se traduit par

$$\rho_A(z_{\text{gai}}) < (1 + c_{\text{air}} \sim 125, \quad (12,69)$$

en prenant  $r_{\text{gai}} \sim 4$ . La constante cosmologique pourrait donc être plus grande que celle observée tout en permettant la formation de galaxies. Notez que cet argument suppose que l'amplitude des perturbations initiales est restée constante.

Cela pose une contrainte sur la valeur possible de la constante cosmologique mais, on peut se poser une autre question comme celle de déterminer quelle est la valeur la plus probable qu'un observateur *typique* mesurerait. Un Univers avec  $\Omega_A/\Omega_M \sim 1$  bas plus de galaxies qu'un Univers où  $\Omega_A/\Omega_M \sim 100$ . Il est donc concevable que la plupart des observateurs mesurent une valeur plus proche de 1 que de 100. La probabilité de mesurer une densité d'énergie du vide de valeur  $\rho_A$  peut être décomposé comme

$$dP(\rho_A) = 7U(dA.MdA)d\rho_A, \quad (12,70)$$

où  $P(d\rho_A)$  est la probabilité a priori d'avoir  $\rho_A$  et  $1/(PA)$  est le nombre moyen de galaxies se formant dans un modèle cosmologique donné.

Toute la difficulté réside dans la détermination de  $P(\rho_A)d\rho_A$ . Différents choix, dont celui d'une fonction de distribution constante, ont été proposés. Pour que l'approche soit satisfaisante, il faudrait être capable de construire un modèle dans lequel l'énergie du vide peut varier spatialement sur des échelles supérieures à la taille de l'Univers observable avec un incrément inférieur à  $10^{-47} \text{ GeV}^4$  sans introduire de nouveau paramètre de l'Univers observable. ordre de  $10^{-6}$ . Un mécanisme central de cette construction est le modèle d'inflation éternelle qui permet de générer une distribution spatiale pour certains paramètres physiques.

Notons que les conclusions de ce raisonnement peuvent dépendre du nombre de paramètres que l'on laisse varier. Quant à la nature de l'énergie noire, elle prédit qu'il s'agit d'une pure constante cosmologique, concluant ainsi sans ambiguïté que

$$w_x = -1. \quad (12.71)$$

#### 12.2.5.4 Snoothing et non-linéarité des équations d'Einstein

Une idée, peut-être la plus conservatrice de toutes, concernant l'énergie noire, est que la constante cosmologique apparaît dans les équations de Friedmann simplement parce que nous

n'avons pas calculé correctement la valeur de la densité de matière qui dicte, c'est-à-dire lissée à grande échelle, l'évolution de l'Univers. [42],

En fait, le tenseur énergie-inmomentum de la répartition de la matière dans l'Univers,  $\mathfrak{a}$ , a une forme très complexe. En particulier, il est inhérent et anisotrope. La solution des équations d'Einstein avec ce tenseur énergie-impulsion comme source donnerait alors un espace-temps dont la métrique,  $g_{iu}$ , > une solution de

$$G^\wedge[g] = \kappa T^\wedge x), \quad (12.72)$$

est très complexe. La métrique décrivant l'Univers aux échelles cosmologiques est, en principe, obtenue en faisant la moyenne de la métrique réelle  $g^\wedge$  à grande échelle, de sorte que la métrique de Friedmann-Lemaître est la moyenne  $\{g^\wedge\}$ .

Dans l'approche standard de la cosmologie, ce n'est pas ce qui se fait réellement. En nous basant sur le principe cosmologique, nous déduisons la forme la plus générale que devrait avoir le tenseur énergie-impulsion à grande échelle,  $(T^\wedge)$  (avec notamment la forme d'un fluide parfait imposé par les symétries), puis nous résolvons les équations d'Einstein pour obtenir une métrique à grande échelle  $g$ , une solution de

$$G^\wedge \ll (T^\wedge). \quad (12.73)$$

Puisque les équations d'Einstein ne sont pas linéaires, il est clair que  $G_{MIZ} [\hat{17}] \wedge (G^\wedge)$ , de sorte que l'équation de la métrique lisse  $g$  prend en fait la forme

$$G^\wedge[g] = + (G_{MI} [g] - (G^\wedge[. g])), \quad (12.74)$$

au lieu de (12.73). Il est donc peu probable que  $g = (9)$ , bien que les deux aient une forme de Friedmann-Lemaître. Le grand problème pour surmonter cette observation est de définir correctement les moyennes que nous avons mentionnées, de trouver un processus permettant de moyenner de manière cohérente la matière et la métrique et de définir l'échelle de lissage physiquement pertinente.

Cependant, si le terme  $[G^\wedge g] - (G^\wedge [9])$  se comporte comme une constante cosmologique, alors ce serait une explication très satisfaisante de l'interprétation des observations cosmologiques. Cette possibilité est encore largement inexplorée et nous nous référons à la Réf. [43] pour les développements récents.

#### 12.2.5.5 *Interprétation des données et principe copernicien*

Rappelons enfin que les observations cosmologiques conduisant à la conclusion de la récente accélération ont toutes été interprétées dans l'hypothèse d'un espace-temps de Friedmann-Lemaître. Ces observations sont localisées sur notre cône de lumière passé afin que ce que nous interprétons comme une histoire temporelle dans un espace homogène et isotrope puisse être interprété comme une histoire spatiale (ou inixée) dans un Univers inhomogène. Dans le cadre cosmologique standard, la dégénérescence entre l'espace et le temps le long du cône de lumière passé est levée par un choix de symétrie.

Par exemple, les observations de supernovæ peuvent être reproduites par a. Lemaître-Tolman- Bondi Univers uniquement rempli de poussière. L'expansion d'un tel espace ne s'accélère pas.

Ainsi, la conclusion concernant l'accélération de notre Univers est étroitement liée au principe cosmologique. Cela renforce la nécessité de tester autant que possible le principe copernicien. Récemment, plusieurs possibilités ont été proposées [44].

Les modèles cosmologiques inhomogènes (chapitre 3) ont malheureusement été très peu étudiés par rapport à leurs prédictions observationnelles (fond diffus cosmologique, BBN, etc.) et la question de savoir si un tel modèle peut s'accorder avec l'ensemble des observations reste ouverte. De plus, de tels modèles impliquent nécessairement une localisation « privilégiée » pour l'observateur.

### 12.2.6 Paramétrage de l'équation d'état

La détection d'une dépendance temporelle de l'équation d'état serait une information cruciale sur la nature de l'énergie noire, car elle exclurait une constante cosmologique. Notons cependant que la connaissance de  $w(t)$  ne permet pas de déduire la nature de l'énergie noire puisque, comme nous l'avons vu, on peut toujours construire un modèle de quintessence ou de tachyon reproduisant cette observation. L'information est donc importante mais pas suffisante.

Soulignons que tant qu'on se limite aux observations dans l'Univers proche, la connaissance de l'équation d'état est suffisante puisqu'elle détermine la fonction  $H(z)$  et le taux de croissance des perturbations, tant que la relativité générale n'est pas modifiée et que la le regroupement de l'énergie noire est négligeable. Il est donc utile de réfléchir au choix de ce paramétrage, nécessaire à toute analyse de données. En particulier, les contraintes publiées dans la littérature reposent souvent sur ce type de paramétrage.

#### 12.2.6.1 Équation d'état constante

Si l'équation d'état de l'énergie noire est une constante,  $w$ , alors la transition entre l'ère de décélération et d'accélération ( $z = 0$ ) se produit pour

$$(1 + w)^{3w} = 1 + 3wz_{\text{tr}} \quad (12.75)$$

Quant à l'égalité d'énergie matière-obscure, elle se produit pour

$$(1 + w)^3 = 1 + 3wz_{\text{tr}} \quad (12.76)$$

Là encore, pour que l'accélération soit observée, il faut  $1 + 3w < 0$ . Pour un Univers plat avec  $\Omega_0 = 0,7$ , on obtient  $z_{\text{tr}} = 0,73$  et  $z_{\text{de}} = 0,37$  si  $w = -1$ . Pour un univers fiat,  $z_{\text{tr}} > z_{\text{de}}$  si et seulement si  $w < -2/3$ .

Notez qu'une équation constante d'état  $w < -1$  implique un scénario cataclysmique. La résolution des équations de Friedmann conduit à

$$\left( \frac{a(t)}{a(t_{\text{de}})} \right)^{1+w} \sim \frac{1}{2(1+w)} \left( \frac{t}{t_{\text{de}}} \right)^{-1+w},$$

où  $t_{\text{de}}$  est le temps cosmique correspondant à  $z_{\text{de}}$ . Donc le facteur d'échelle diverge dans un temps *Unité*,

$$a(t) \rightarrow +\infty, \quad t \rightarrow t_{\text{rip}} \quad \frac{1+w}{1+w}$$

as well as the Hubble parameter and the energy density  $p(t) \propto (t - t_{\text{rip}})^{-2}$ . The Universe thus reaches a curvature singularity in the future, the 'big rip'.

Si l'analyse des observations effectuées avec la constante d'hypothèse montrait sans ambiguïté que  $w < -1$ , cela pourrait simplement signifier que le paramétrage choisi n'est pas valide.

### 12.2.6.2 Paramétrage général

L'idéal est d'introduire un paramétrage dépendant du moins de paramètres possibles et reproduisant le plus grand ensemble d'équations d'état des modèles microphysiques candidats. Une simple extension populaire est une extension de Taylor,

$$w(z) = w_0 + w_1 z, \quad (12.77)$$

impliquant

$$A_X(z) = A_Y (1 + z)^{3(1+w_0)} e^{3w_1 z} \quad (12.78)$$

Comme l'illustre la figure 12.5, cette approximation a un domaine de validité très limité. Le problème évident est que cela empire à mesure que l'on considère des redshifts plus importants et qu'il est difficile de déterminer son domaine de validité en  $z$ .

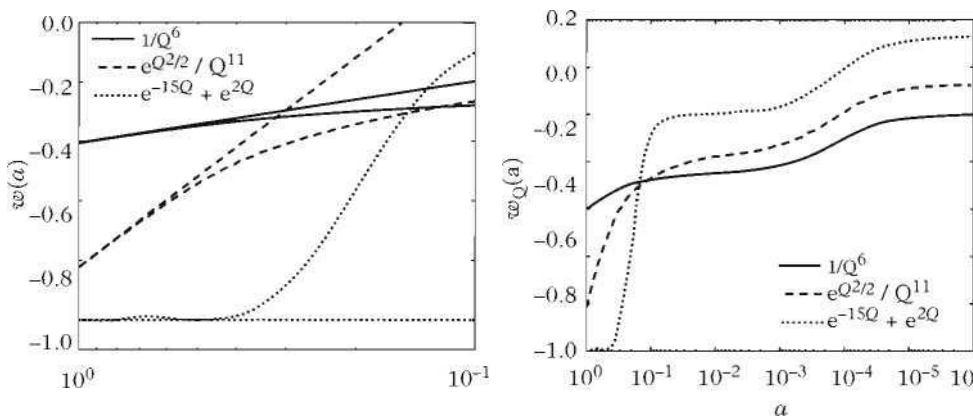


**Fig. 12.5** Evolution of the équation of state for various models of quintessence as a function of the redshift. (left): The équation of state of microphysical models is compared to the linear parameterization (12.77). (right): For larger redshifts, the équation of state of dark energy has a complex structure that is well represented by a parameterization of the type (12.81).

Various improvements have been proposed, such as equations of state of the form

$$w(z) = w_0 + \frac{w_1 z}{1 + z} \quad \text{or} \quad w(z) = w_0 - w_1 \log(1 + z), \quad (12.79)$$

as well as a direct parameterization of the energy density

$$\rho_X(z) = \sum \frac{A_i}{(1 + z)^i}. \quad (12.80)$$

Cette dernière, introduisant l'exponentielle de l'intégrale de l'équation d'état, peut être plus discriminante.

Les solutions numériques (voir Fig. 12.5) indiquent qu'une fonction introduisant différentes étapes, caractéristiques des différentes solutions de mise à l'échelle, peut offrir un bon paramétrage. L'un d'eux [45] introduit 7 paramètres : les équations de la solution d'état d'échelle dans les époques de rayonnement et de matière ( $w_r$  et  $w_m$ ), le redshift au moment où l'équation d'état commence à changer ( $a_m, a_r$ ), la durée des transitions ( $A_m, A_r$ ) et l'équation d'état aujourd'hui ( $w^\wedge$ ). Il prend la forme

$$w(a) = F_1 f_r(a) + F_2 f_m(a) + F_3, \quad (12,81)$$

où les fonctions  $f_i$  sont définies par

$$A(a) = 1 + \exp a, \quad (12,82)$$

les coefficients  $F_i$  étant déterminés en imposant que  $w(a)$  prenne les valeurs  $w^\wedge$  aujourd'hui et aux époques de la matière et du rayonnement.

### 12.2.6.3 La méthode « Statefinder »

Another approach [46] is to introduce parameters depending on higher-order derivatives of the scale factor and generalizing the deceleration parameter. It defines  $r$  and  $s$  as usual to

$$r = \frac{a \ddot{a}}{\dot{a}^3}, \quad s = \frac{\ddot{a}}{3(90-1/2)}, \quad (12.83)$$

Using the Friedmann equations, we obtain

$$r = 1 + \frac{w}{1+w}, \quad s = \frac{1}{3} \frac{1+w}{1+w^\wedge} \quad (12.84)$$

Bien que  $r$  et  $s$  ne soient pas indépendants,  $r$  dépend de  $w$ ,  $w^\wedge$  et  $w^\circ$ , alors que  $s$  ne dépend que de  $w$  et  $w^\wedge$ . En augmentant à trois le nombre de paramètres cosmologiques évalués aujourd'hui ( $H_0, q_0, r_0$ ), soit de manière équivalente ( $H_0, q_0, s_0$ ), on peut espérer mieux contraindre l'histoire récente de l'expansion de l'Univers. A noter que cette méthode repose uniquement sur l'expansion du facteur d'échelle et ne suppose donc que la validité de la description de l'Univers par un espace-temps de Friedmann-Lemaître. Le modèle  $\Lambda$ CDM correspond à  $(r_0, s_0) = (1, 0)$ .

### 12.2.6.4 Vers une formalisation post- $\Lambda$ CDM

Comme expliqué ci-dessus, l'étude de la dynamique de fond peut permettre de déterminer  $w(z)$ . De plus amples informations peuvent être obtenues auprès des structures à grande échelle. Alors qu'un formalisme général post- $\Lambda$ CDM n'a pas encore été conçu, les écarts par rapport à un  $\Lambda$ CDM pur peuvent être paramétrés sur des échelles sub-Hubble [13], en utilisant les notations du chapitre 5.

L'équation de Poisson peut être généralisée à

$$-k^2 \Delta = 4\pi G_N a^2 F(k, H') \rho_m \delta_m + \Delta_{de},$$

où  $\Delta_e$  caractérise le regroupement de l'énergie noire et  $F$  une possible modification à longue portée de la relativité générale.

Les deux potentiels gravitationnels peuvent être liés par

$$A(<bT) = n_{de},$$

où  $I_{de}$  représente une contrainte anisotrope effective. Le fait que  $1.7 > 1$  laissera une signature sur une lentille faible (voir chapitre 7).

Les équations de continuité et d'Euler peuvent être généralisées à

$$+ \Delta V_m = 0$$

et

$$C + W V_m = -\langle h + s_{de},$$

où  $S_{de}$  caractérise l'interaction de la matière ordinaire avec l'énergie sombre. Dans ce cadre généralisé le modèle  $\Lambda$ CDM est le point  $(F, I_{de}, A_{de}, S'_{de}) = (1, 0, 0, 0)$ .

### 12.2.7 Implications pour la formation de la structure à grande échelle

Contrairement à une constante cosmologique, une composante dynamique d'énergie sombre modifie les équations de perturbation dérivées du chapitre 5.

Dans le cas d'un champ de quintessence minimalement couplé (voir chapitre 10 pour le cas non minimalement couplé), les modifications des équations de perturbation reviennent à prendre en compte le tenseur énergie-impulsion (8.124) d'un champ scalaire dans les équations d'Einstein perturbées (5.117)-(5.120). Définir la perturbation invariante de jauge,  $\delta\Phi$ , comme pour l'inflaton (8.126), cela revient alors à ajouter une composante de matière supplémentaire avec les caractéristiques

$$6p\% = QSQ^N + PT\#?' - Q^2 \$, SP^N_Q = Q6Q^N - 6Q^N - Q^2 <b, dQ \quad dQ \\ p_Q(l + wQ)V_Q = Q\delta Q^N, \pi^A = 0,$$

ainsi que l'équation perturbée de Klein-Gordon (12.85)

$$\delta\ddot{Q}^N + 3H\delta\dot{Q}^N + \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{d^2V}{dQ^2}\right)\delta Q^N = 4\dot{Q}\dot{\Phi} - 2\frac{dV}{dQ}\Phi \quad (12.86)$$

Il n'y a donc aucune difficulté, du moins en principe, à ajouter un tel composant.

#### 12.2.7.1 Perturbations de grande longueur d'onde

Afin de déduire les conséquences physiques de ces nouveaux modes, il faut imposer des conditions initiales sur les fluctuations du champ scalaire aux échelles super-Hubble.

Dans la plupart des modèles de quintessence, la solution homogène était attirée vers une solution d'échelle,  $Q_{sc} \propto a(t)$ , de sorte que la différence entre la solution homogène et cette solution,  $\delta Q(t) = Q(t) - Q_{sc}(t)$  satisfait

$$\delta\ddot{Q} + 3H\delta\dot{Q} + \frac{d^2V}{dQ^2}\delta Q = 0 \quad (12.87)$$

Si le mécanisme attracteur est efficace, la solution de cette équation devrait rapidement se rapprocher de 0. Cette équation est similaire à l'équation perturbée de Klein-Gordon (12.86)

pour les modes super-Hubble ( $k/aH \rightarrow 0$ ) quand on néglige le terme potentiel. Ainsi les solutions de la partie homogène de (12.86) tendent vers 0. En prenant en compte les contributions des perturbations métriques, constantes pour les modes super-Hubble (Chapitre 5) et déterminées par les perturbations de la matière et du rayonnement au début temps,  $\delta Q^N$  est attiré vers une solution qui est une combinaison linéaire des perturbations métriques.

Les conditions initiales des perturbations ne sont pas importantes, à condition que la solution de mise à l'échelle soit atteinte suffisamment tôt. Les modes super-Hubble tendent vers une solution d'attracteur, qui fixe les conditions initiales des perturbations du champ à grande échelle. Cet attracteur est cependant transitoire puisque dès que le terme  $fc^2 < 5Q^N/a^2$  devient comparable aux autres termes alors cette solution n'existe plus pour les perturbations.

La figure 12.6 illustre cette propriété pour l'exemple d'un modèle quintessence avec un potentiel en loi de puissance inverse.

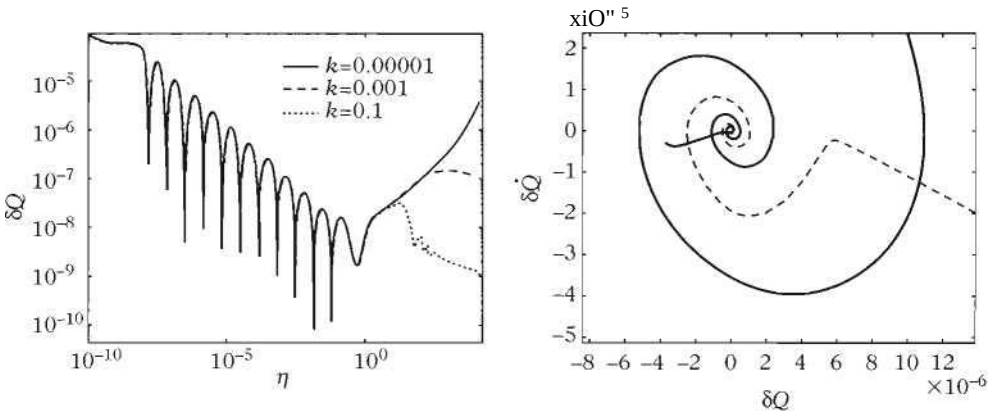


**Fig. 12.6** Evolution de la perturbation du champ de quintessence dans un modèle avec un potentiel en loi de puissance inverse. Le mode a atteint une solution d'échelle qu'il suit jusqu'à ce que le terme laplacien de (12.86) ne soit plus négligeable. (à gauche) : Evolution des différents modes en fonction du temps. Plus la longueur d'onde est courte, plus le mode sort tôt de la solution attractive. (à droite) : Portrait de phase représentant l'attraction vers un régime d'échelle pour les perturbations pour deux conditions initiales différentes. Le point attracteur est transitoire.

#### 12.2.7.2 Régime newtonien

La Quintessence n'interagit que gravitationnellement avec les autres composants de l'Univers et est sous-dominante pendant la majeure partie de l'histoire de l'Univers. Ses effets se font donc principalement sentir récemment, c'est-à-dire à faibles redshifts.

En régime newtonien, les fluctuations du champ de quintessence ne croissent que modérément puisque le terme en  $V'' > 0$  dans (12.86) joue le rôle d'une vitesse du son. Ainsi, la quintessence affecte la croissance du contraste de densité de matière principalement à travers la modification de l'évolution de l'Univers et donc de la fonction  $H(a)$  dans (5.21).



On peut montrer que de manière générique les modèles de quintessence avec un mécanisme attracteur ralentissent la croissance des perturbations d'environ 20 à 30 % (Fig. 12.7).

Ce retard dans la croissance a deux conséquences. D'une part, cela modifie la normalisation *globale* du spectre de puissance de la matière : soit le spectre est normalisé par rapport au fond micro-onde cosmique et  $\langle \sigma_8 \rangle$  dans un modèle de quintessence sera plus petit que celui de l' $\Lambda$ CDM, soit la normalisation est effectuée sur  $\langle \sigma_8 \rangle$ , auquel cas un modèle de quintessence nécessite des perturbations plus importantes au moment de la recombinaison. De plus, en supposant que toutes les quantifications soient normalisées par rapport au fond de micro-ondes cosmique, le retard dans la croissance des perturbations induit un retard dans le moment où un mode donné entre dans le régime non linéaire. Cela implique une modification de la forme du spectre non linéaire. Ces effets peuvent avoir une amplitude très importante (voir Fig. 12.7).

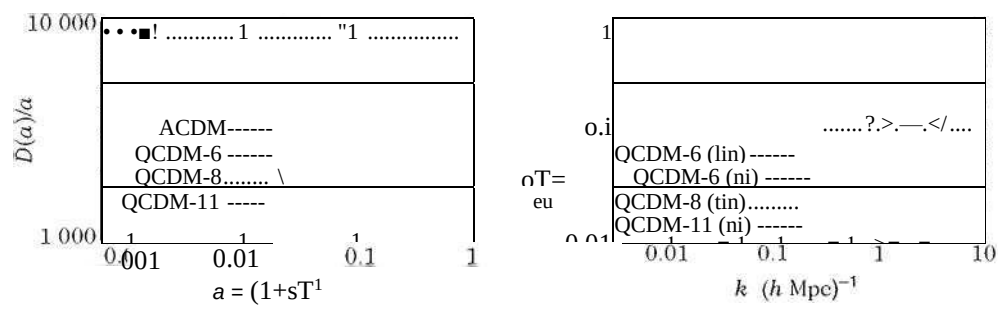


**Fig. 12.7** (left): Evolution of the ratio  $D/a$  between the growing-mode solution of the density perturbations, solution of (5.21), and the growing rate in an Einstein-de Sitter space as a function of the redshift for different models. Quintessence slows down the growth of perturbations compared to  $\Lambda$ CDM. (right): Ratio between the matter power spectrum of a quintessence model (inverse power law) and that of  $\Lambda$ CDM. While the delay in the growth only affects the global normalization in the linear régime, it modifies the shape of the spectrum in the non-linear régime. From Ref. [48].

### 12.2.7.3 Quelques signatures observationnelles

- **Fond cosmique de micro-ondes.** la quintessence n'a qu'un faible effet sur le fond cosmique des micro-ondes. En modifiant l'équation d'état du fluide cosmique aux petits redshifts, la quintessence modifie la relation entre la distance angulaire et les redshifts, induisant un décalage global dans la structure des pics acoustiques. Aux grandes échelles angulaires, l'équation de Poisson nous dit que dans le régime newtonien  $\sigma_8 < D(a)/a$ . Le retard dans la croissance des perturbations de densité se manifeste donc par une variation temporelle du potentiel gravitationnel à de petits redshifts. Cela modifie l'amplitude de l'effet Sachs-Wolfe intégré et le plateau du spectre de puissance des anisotropies du fond cosmique des micro-ondes.
- **Lentille gravitationnelle :** la lentille gravitationnelle est l'un des outils les plus puissants pour sonder la distribution tant en régime linéaire que non linéaire. La figure 12.8 illustre comment les modifications de la croissance des perturbations dans le spectre linéaire

peut affecter les observables cosmologiques. Des méthodes de *tomographie* basées sur la corrélation des effets de lentille gravitationnelle sur différents plans sources ont donc été suggérées comme prometteuses pour reconstruire l'équation d'état du fluide cosmique.

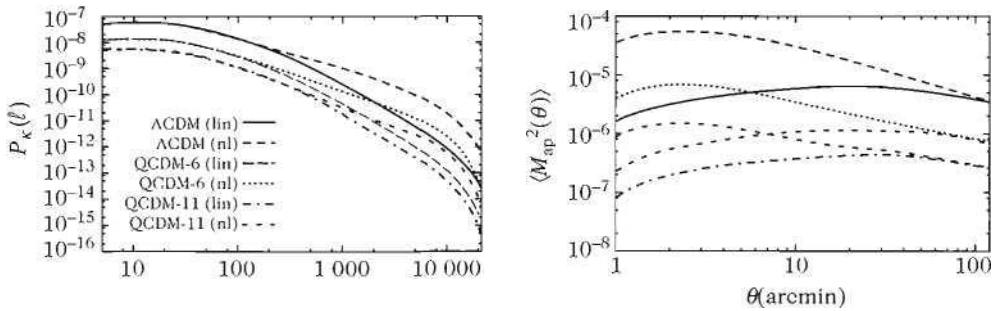


**Fig. 12.8** Influence of quintessence on the gravitational lensing's observables, (left): Power spectrum of the convergence for a  $\Lambda$ CDM model and two models of quintessence, normalized to the cosmic microwave background. (right): Variance of the aperture mass (see Chapter 7) for the same models. Effects of the order of 80% can appear. From Ref. [48].

## 12.3 Constantes variables

Les observations d'Astrophysica.1 ont récemment relancé le débat sur la nature des constantes fondamentales de la physique. Détecter toute variation d'une constante fondamentale serait, par exemple, et comme indiqué ci-dessus, un signal fort en direction de modèles de quintessence et une indication pour une nouvelle physique.

Toutes les références concernant cette section ainsi que des détails sur les méthodes d'observation peuvent être trouvées dans les Refs. [49,50] et nous renvoyons à [51] pour des considérations générales sur les constantes fondamentales.

Le but de cette brève section est de rappeler l'argument original proposé pour la première fois par Dirac et de montrer que tester la constance des constantes de la Nature est un test de la théorie de la relativité générale. Les contraintes sur la variation de la constante de structure fine et de la constante gravitationnelle sont ensuite résumées.

### 12.3.0.4 Argument de Dirac

La question de la constance des constantes de la physique a été soulevée pour la première fois par Dirac dans son « hypothèse des grands nombres » qui exprime l'idée que les très grands (ou très petits) nombres sans dimension ne peuvent pas être de purs nombres mathématiques. Dirac a remarqué que le rapport entre les forces gravitationnelles et électromagnétiques entre un proton et un électron,  $G m_p m_e / e^2 \sim 10^{-40}$ , est du même ordre de grandeur que l'âge de l'Univers en unités atomiques,  $e^2 \hbar / m_e c^3$ . ■ Si l'on interprète cette égalité non pas comme une coïncidence numérique mais comme le reflet d'une loi fondamentale de la physique, alors on peut postuler que cette égalité est toujours vraie. Cela a conduit Dirac à proposer que la constante gravitationnelle devait varier comme l'inverse du temps cosmique,  $G \propto 1/t$ .

L'argument de Dirac n'est pas une théorie en soi. La loi d'évolution de la constante gravitationnelle est postulée et aucune équation dynamique n'est proposée. Le cadre des théories tensori-scalaires (chapitre 10) est un exemple de cadre théorique cohérent permettant la formulation de cette idée de constante gravitationnelle variable.

De la même manière, toute variable constante peut être modélisée dans un formalisme lagrangien en introduisant une nouvelle variable dynamique remplaçant la constante donnée. Ce La Grangien fournira donc de nouvelles équations, qui incluent le fait, que cette constante est dynamique, ainsi qu'une équation d'évolution pour cette « constante ». Nous soulignons que puisque toute mesure physique revient à la comparaison de deux systèmes physiques, seule la variation de constantes adimensionnelles peut être mesurée. L'hypothèse de Dirac revient en fait à supposer que  $G m_e m_p / \hbar c$  varie.

### 12.3.0.5 Une épreuve fondamentale

Le principe d'équivalence d'Einstein contient l'hypothèse d'invariance de position locale (Chapitre 1) qui implique, sous sa forme faible, la constance de toutes les constantes non gravitationnelles. Tester la constance des constantes fondamentales fournit ainsi un test du principe d'équivalence d'Einstein et donc une des hypothèses de la relativité générale, réalisable aux échelles astrophysiques.

Insistons également sur le lien avec l'universalité de la chute libre. La masse de tout noyau dépend de nombreuses constantes, notamment des masses des constituants et des constantes de couplage, via les énergies de liaison,

$$m(A, Z) = Z m_p + (A - Z) m_n + E_s + E_{EM}, \quad (12.88)$$

où  $E_s$  et  $E_{EM}$  sont les énergies de liaison des interactions fortes et électromagnétiques. Les masses des nucléons peuvent alors être exprimées en termes de masse des quarks et d'énergies de liaison. Pour un corps macroscopique, l'énergie de liaison gravitationnelle doit être prise en compte afin que la masse de tout corps dépende des constantes de couplage et du rapport de masse des particules élémentaires. Si l'une de ces constantes, appelons-la génériquement  $a$ , varie, alors un corps se déplaçant avec une vitesse  $v$  par rapport au repère référencé où  $a$  ne dépend que du temps subit une accélération anormale

$$6a \frac{1}{m} \frac{d(nw)}{dt} \frac{du}{dt} \frac{d \ln m}{da} \frac{1}{\dot{a} v}. \quad (12.89)$$

Dans un cadre de référencé arbitraire, la valeur de  $a$  dépend du temps et de l'espace si bien que cette accélération prend la forme

$$\delta \vec{a} = \frac{d \ln m}{d\alpha} \left( \nabla \alpha + \frac{\dot{\alpha} \vec{v}}{c^2} \right). \quad (12.90)$$

Toute variation de  $a$  entraîne donc une déviation par rapport à la relativité générale et éventuellement une violation de l'universalité de la chute libre puisque  $m(a)$  dépend a priori de la composition chimique du corps considéré. Le paramètre  $r/\Lambda$ , défini en (1.134), caractérisant la violation de l'universalité de la chute libre est alors donné par pour deux corps d'épreuve en chute libre dans un champ gravitationnel externe, où les sensibilités  $f_i$  sont définies par (10.22).

$$\eta_{12} = \frac{f_2}{f_1} \simeq f_{\text{ext}} |f_1 - f_2|, \quad (12.91)$$

Pour mettre une contrainte, il faut connaître la forme de la fonction  $f_i(a)$ , où  $f$  est le ou les champs dictant l'évolution des constantes, ce qui n'est possible qu'une fois le modèle formulé. En considérant une théorie où seule la constante de structure fine varie, par exemple, en raison

d'un couplage de la forme  $|\mathbf{B}\mathbf{F}|(0)\mathbf{F}_{\text{Al}}/\mathbf{F}^{\text{A}}/$  dans le lagrangien, alors ci = La sensibilité de tout atome dépend de la contribution de la énergie de liaison électromagnétique et

$$f(A,Z) \sim \frac{1}{13} \frac{B_p + (A-Z)B_n \pm 98,25Z(Z-1)A^{-1/3} \text{ MeV}}{F_{\text{AmNL}}} \quad (12,92)$$

où  $B_n$  et  $B_p$  sont les contributions des énergies de liaison électromagnétique des neutrons et des protons ( $B_p = 0,63 \text{ MeV}$ ,  $B_n = -0,13 \text{ MeV}$ ). Le dernier terme est obtenu à partir de la formule de Bethe-Weizsäcker pour l'énergie de liaison d'un noyau. Ceci illustre la dépendance par rapport à la composition chimique.

En conclusion, toute théorie incluant des constantes dynamiques induit de manière générique une violation de l'universalité de la chute libre. L'amplitude de cette dernière est liée aux modifications de la pesanteur et au taux de variation des constantes. Compte tenu de la précision expérimentale de l'universalité de la chute libre, il est impératif que tout modèle de constante dynamique réussisse ce test.

#### 12.3.0.6 Contraintes sur la variation de la constante de structure fine

La variation de la constante de structure fine est contrainte par de nombreux systèmes physiques.

- *Contraintes du laboratoire.* Ces méthodes sont basées sur la comparaison de docks atomiques utilisant différentes transitions et différents noyaux. Diverses expériences ont été réalisées ( $^{133}\text{Cs}$  vs  $^{87}\text{Rb}$ ,  $^{133}\text{Cs}$  vs  $^{199}\text{Hg}^+$ ,  $^{133}\text{Cs}$  vs  $^{171}\text{Yb}^+$ , ...). Pour les noyaux alcalins, la transition des fines hyperfines peut être approchée par  $\nu \propto \alpha^2 (a/a_N)(m_e/m_p) R_y c F_{\text{re}} i(Z\kappa K)$ , où  $a$  est le moment magnétique nucléaire,  $\hbar/m_N$  le magnéton nucléaire,  $R_y$  la constante de Rydberg,  $c$  la vitesse de la lumière, et  $F_{\text{re}}$  la fonction prenant en compte les effets relativistes qui croissent rapidement avec  $Z$  ( $d \ln F_{\text{re}} / d \ln a \sim 0,74$  et  $0,30$  pour  $^{133}\text{Cs}$  et  $^{87}\text{Rb}$ , respectivement).

La comparaison, pendant 4 ans, de docks atomiques utilisant les transitions hyperfines du  $^{133}\text{Cs}$  et du  $^{87}\text{Rb}$  a montré que  $d \ln(i^{87}\text{Rb}/i^{133}\text{Cs})/dt = (0.2 \pm 7.0) \times 10^{-16} \text{ an}^{-1}$ , traduisant dans

$$\frac{d\alpha}{\alpha} = (-0,4 \pm 16) \times 10^{-16} \text{ ans}^{-1}, \quad (12,93)$$

en supposant que les moments magnétiques sont constants. La combinaison récente de plusieurs docks ( $\text{Rb}$ ,  $\text{Cs}$ ,  $\text{Hg}^+$ ,  $\text{Yb}^+$ ,  $\text{H}$ ) nous a permis d'atteindre les contraintes

$$\frac{d\alpha}{\alpha} = (-3,5 \pm 5,0) \times 10^{-16} \text{ ans}^{-1}. \quad (12,94)$$

- *Contraintes géochimiques.* Le phénomène Oklo, réacteur nucléaire naturel en fonctionnement il y a 2 milliards d'années au Gabon, permet de mesurer la section efficace de la réaction d'absorption  $^{149}\text{Sm} + n \rightarrow ^{150}\text{Sm} \pm 7$ . Cette absorption

a une résonance à  $E_r \sim 0,0973$  eV. En utilisant un modèle atomique du noyau du samarium, il a été déduit que l'énergie de résonance est très sensible aux petites variations de  $a$  ( $dE_r/da \sim 1$  MeV) de sorte que

$$(12.95)$$

La durée de vie des noyaux instables par *et* ou */?* la désintégration nous permet également de contraindre la variation de  $a$ . Par exemple, pour la désintégration  $\beta$ ,  $A \sim A(AE)^p$  ou  $G \wedge a^s$  où  $AE$  est l'énergie de désintégration et  $A$  est une fonction qui dépend doucement de  $a$ . Pour les noyaux à  $Z$  élevé avec une faible énergie de désintégration,  $p = 2 \pm VI - a^2 Z^2$ . La sensibilité à la constante de structure fine est  $s = p \ln AE/d \ln a$ . La désintégration du rhénium en osmium a une sensibilité  $s \sim -18\,000$ . La mesure de la durée de vie de ce noyau en laboratoire et dans les météorites permet de conclure

$$\frac{\Delta s}{un} = (8 \pm 16) \times 10^{-7}, \quad z \sim 0,45. \quad (12.96)$$

- *Contraintes astrophysiques.* La mesure des spectres d'absorption par les nuages intergalactiques peut être utilisée pour reconstruire la valeur de  $a$  jusqu'à des redshifts d'ordre 3.

La méthode des doublets alcalins utilise le fait que pour les doublets à structure fine de noyaux alcalins,  $5vfv$  ou  $e?$ . L'analyse de 15 systèmes d'absorption de Si IV a permis d'établir que

$$\frac{\Delta r}{un} = (0,15 \pm 0,43) \times 10^{-5}, \quad 1,59 < z < 2,92. \quad un \quad (12.97)$$

L'analyse [52] basée sur de nombreux multiplets avait initialement conduit à une détection  $\Delta a/a = (-0,54 \pm 0,12) \times 10^{-5}$  pour  $0,5 < z < 3$  à partir de 128 systèmes d'absorption. Cependant, de nombreux effets systématiques ont dû être étudiés. Différentes analyses réalisées indépendamment au VLT n'ont pas confirmé ce résultat [53]. Aujourd'hui, la contrainte est

$$\frac{\Delta O_i}{a} = (-0,01 \pm 0,15) \times 10^{-6}, \quad 0,4 < x < 2,3. \quad (12.98)$$

In a similar way, the analysis of the emission spectrum of O III of quasars and galaxies have established that

$$(12.99)$$

- *Contraintes cosmologiques.* Une variation de la constante de structure fine modifie la section de diffusion de Thompson et donc la dynamique de la recombinaison. L'analyse des données WMAP nous permet de conclure que

$$(12.100)$$

A noter qu'il existe des dégénérescences des paramètres cosmologiques, de sorte que des contraintes supérieures à 1% ne semblent pas réalistes dans un avenir proche.

La température de congélation de la nucléosynthèse primordiale implique de nombreuses constantes (Chapitre 4). Une variation de  $a$  affecte principalement la différence de masse entre le proton et le neutron et la valeur des barrières coulombiennes des différentes réactions nucléaires. La modélisation est donc difficile et pour le moment, la contrainte est

$$a = (6 \pm 4) \times 10^{-4}, \quad z \sim 10^{10}, \tag{12.101}$$

mais cette valeur est à prendre avec prudence. La difficulté réside dans la structure complexe de la QCD qui rend difficile la compréhension de la variation conjointe de diverses constantes (voir Réf. [55] pour un exemple).

Toutes ces contraintes sont résumées dans la figure 12.9.

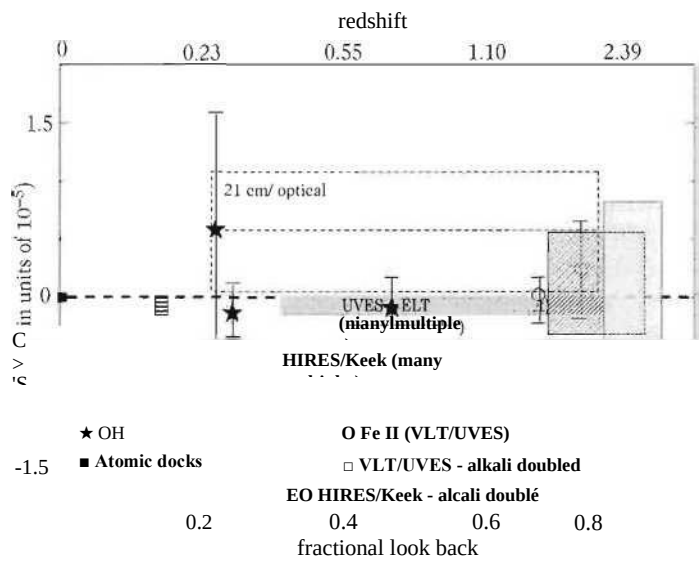


**Fig. 12.9** Résumé des contraintes de variation obtenues sur la variation de la constante de structure fine des docks atomiques ( $z = 0$ ), Oklo ( $z \sim 0,14$ ) et des spectres d'absorption des quasars en fonction du redshift. (Avec l'aimable autorisation de P. Petitjean).

12.3.0.7 Autres contraintes

L'observation des spectres de vibrorotation de l'hydrogène moléculaire permet de contraindre  $r/m_e/m_p$ . L'analyse de 83 systèmes conduit à la conclusion

$$r = (2,97 \pm 0,74) \times 10^{-5}, \tag{12.102}$$

à 1,5 cr. Cette valeur est à prendre avec prudence car le facteur limitant est la détermination des spectres en laboratoire. Sur la base de mesures récentes en laboratoire, cela a été amélioré [54] pour

$$— = (2,4 \pm 0,6) \times 10^{“ 5}, \quad (12,103)$$

en utilisant les mêmes données astrophysiques.

La constante gravitationnelle est contrainte par la nucléosynthèse primordiale et dans le système solaire, ce qui implique respectivement :

$$\frac{AG_M}{G_N} = 0,0106 > \text{à un redshift } z \sim 10^{10}. \quad (12,104)$$

$$\text{et} \quad \left| \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right| < 6 \times 10^{-12} \text{ ans}^{-1}, 0 \quad (12,105)$$

aujourd'hui.

### 12.3.0.8 Modèles théoriques

La plupart des modèles de l'Univers impliquant des dimensions supplémentaires prédisent des constantes dynamiques. C'est par exemple le cas de la théorie des cordes (chapitre 13) où le dilaton se couple directement à la matière. Par exemple, pour les chaînes hétérotiques, on obtient

et ça fait  $^2_M = U \} \exp(—20)$  pour la constante gravitationnelle et les couplages de Yang-Mills, tandis que pour les cordes de type I on obtient  $Mt = \exp(—20)$  et  $\ddot{g}^2_M = \exp(—</>)$ , où  $V_S$  est le volume des dimensions supplémentaires. Un tel couplage induit une variation de toutes les constantes de couplage.

D'un point de vue efficace, l'effet d'un tel dilaton peut être décrit par une action du type [25,56]

$$S = \int \frac{d^4x}{16\pi G} \sqrt{-g} \left[ R - 2(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{4} B(\phi) F^2 - \bar{\psi} D \psi + \dots \right]. \quad (12,106)$$

La masse de tout atome dépend de la fonction  $B(<p>)$ . Si la fonction  $B(</>)$  a un maximum, alors le champ scalaire est attiré vers ce maximum, qui est un minimum de la fonction  $0,(0)$ , définie par (10.22). Si  $— </>_m$  alors tous les effets

(violation en chute libre, paramètres post-newtoniens, variations constantes) sont proportionnels à  $(</>_0 - 0_m)^2$  - L'introduction de plusieurs fonctions  $Bi(<p>)$  dont les maxima ne coïncident pas conduit à des effets sur la violation de l'universalité de chute libre qui sont, en général, plus grandes que les contraintes expérimentales.

## 12.4 Topologie de l'Univers

### 12.4.1 Structures locales et mondiales

#### 12.4.1.1 Origine

Dans tous les développements précédents, l'Univers était décrit par une solution de Friedmann-Lemaître avec des sections spatiales localement hyperboliques, euclidiennes ou sphériques,

selon

sur le signe de la courbure. Nous avons implicitement supposé qu'il s'agissait là de leur structure *globale*. Toutes les équations que nous avons dérivées, et en particulier les équations d'Einstein, sont uniquement locales, permettant ainsi de déterminer la structure locale de l'Univers, c'est à dire sa *géométrie*, mais ne fournissant aucune information complète sur sa structure globale, c'est à dire sa *topologie*. La plupart de nos prédictions étaient donc insensibles à cette hypothèse mais cela ne veut pas dire qu'il ne faut pas essayer de déterminer comment vérifier cette hypothèse.

Les références [57, 58] proposent deux revues résumant les principaux enjeux de cette question.

#### 12.4.1.2 Avantages et inconvénients

Divers arguments ont été présentés pour justifier un tel choix de topologie, arguant qu'elle devrait être triviale, notamment basée sur des principes *d'économie* ou *de simplicité*. De plus, l'inflation prédit que l'Univers observable ne représente qu'une petite partie de l'Univers (voir chapitre 8). Si une structure topologique non triviale existait, elle n'aurait aucune chance d'être observable, à moins d'un réglage fin du nombre de plis électroniques. Néanmoins, il semble que la topologie soit capable de fournir des conditions initiales favorables dans les modèles d'inflation à basse énergie [59].

À son tour, on peut défendre l'existence d'une structure topologique en s'appuyant sur un principe *démocratique* selon lequel, en supposant que la théorie des cordes soit valide, il devrait y avoir plus de quatre dimensions, dont beaucoup sont compactes (voir chapitre 13). Ne peut-on alors supposer que *toutes* les dimensions sont compactes et rechercher un mécanisme dynamique pour expliquer pourquoi trois dimensions spatiales sont grandes par rapport aux autres [60] ?

Il existe également une préférence pour un espace de volume fini par rapport à un espace infini, soit en s'appuyant sur *le principe de Mach*, soit en posant des problèmes conceptuels liés à cet infini. Mais la seule variété de volumes finis simplement connectée est la 3-sphère. Ainsi, si la courbure n'est pas positive, une variété à volume fini ne peut être obtenue qu'avec une structure topologique non triviale.

Enfin, la cosmologie quantique apporte également des arguments en faveur d'un Univers à volumes finis [61] principalement parce que la probabilité d'apparition d'un Univers de constante cosmologique  $A$  et de volume  $V$  va comme  $P \propto \exp(-A V)$ .

Aucun de ces arguments ne peut à lui seul résoudre la question. Les propriétés topologiques de l'espace restent libres et actuellement indéterminées. Nous pouvons cependant tenter d'aborder cette question par l'observation. Pour cela il faut savoir quelles sont les structures acceptables (Section 12.4.2) puis déterminer leurs signatures possibles sur différents observables (Section 12.4.4). On peut alors espérer soit détecter une telle structure, soit exclure son existence à des échelles de la taille de l'Univers observable.

Il existe une autre motivation pour considérer ces Univers. Les variétés topologiques ne sont pas globalement isotropes et ont des directions privilégiées. Ils offrent un exemple concret, dans lequel on peut calculer l'amplitude de ces effets, et évaluer dans quelle mesure les observations peuvent signaler un écart par rapport à l'isotropie ou à l'homogénéité de l'Univers à grande échelle. De plus, puisque la plupart des modèles de l'Univers primordial prédisent une topologie triviale, l'observation d'une topologie non triviale conduirait à une révolution majeure dans notre perspective théorique.



### 12.4.2 Introduction mathématique

Dans la cosmologie relativiste, l'espace-temps est décrit par une variété à quatre dimensions,  $M$ , (Chapitre 1) qui peut être divisée comme  $A_4 = \mathbb{R} \times S_3$ , où les sections spatiales,  $S_3$ , sont des espaces tridimensionnels de courbure constante. (Chapitre 3). Localement, ces espaces ont la structure de la 3-sphère  $S^3$  si  $K > 0$ , de l'espace euclidien tridimensionnel  $E^3$ , si  $K = 0$ , ou de la 3-hyperboloïde  $H^3$  si  $K < 0$ . Les variétés  $S^3$ ,  $E^3$  et  $H^3$ , que nous appellerons génériquement  $X$ , sont appelés *variétés couvrantes universelles* et sont simplement des espaces connectés de même géométrie que  $E^3$ . D'une manière générale, on peut toujours exprimer  $E^3$  comme le quotient de l'espace de revêtement par un groupe  $F$

$$S_3 = X/F, \quad (12.107)$$

où  $F$ , le *groupe d'holonomie*, est un sous-groupe discret du groupe d'isométrie  $G$  de la variété couvrante universelle, qui agit librement et sans point fixe. On dénotera par  $|F|$  l'ordre de ce groupe, c'est à dire le nombre d'éléments indépendants qu'il contient. Les éléments du groupe holonomie sont des isointries et satisfont

$$\forall r, y \in S_3, \forall f \in F, \text{dist}[r, y] = \text{dist}[c/(x), g(y)]. \quad (12.108)$$

Si la distance d'un point à son image ne dépend pas de la position de ce point,

$$\forall x, y \in S_3, \text{dist}[x, c/(x)] = \text{dist}[y, c/(y)], \quad (12.109)$$

alors  $g$  est appelé une *traduction de Clifford*.

Classer des espaces topologiques tridimensionnels à courbure constante revient à classer ces sous-groupes  $F$ . Pour visualiser ces espaces, il convient de les décrire par un *polyèdre fondamental convexe*,  $P$ , possédant un nombre pair de faces. Les faces de ce polyèdre sont associées deux à deux grâce aux générateurs  $g$  du groupe d'holonomie. On peut montrer que connaître le groupe d'holonomie de  $E^3$  équivaut à connaître le polyèdre fondamental, et en particulier que  $T$  est isomorphe à  $7F_1(S_3)$ . Nous définissons également les rayons interne et externe  $r$  et  $r_+$ , respectivement, comme les rayons de la plus grande et de la plus petite sphère contenue dans et contenant le polyèdre fondamental.

A titre d'exemple, considérons le tore bidimensionnel (Fig. 12.10). Il peut être construit à partir d'un carré (polyèdre fondamental) dont les faces opposées sont identifiées. Les translations amenant une face à l'autre sont les génératrices du groupe d'holonomie qui est donc isomorphe au groupe des boucles sur le tore,  $7F_1(T^2) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  (voir chapitre 10).

### 12.4.3 Classification des variétés tridimensionnelles

#### 12.4.3.1 Espaces euclidiens

Le groupe d'isométrie de  $E^3$  est  $G = \mathbb{R}^3 \times \text{SO}(3)$ . Toute isométrie peut ainsi être décomposée comme le produit d'une rotation/réflexion,  $M$ , suivie d'une translation,  $T$ .

$$x \mapsto Mx + T. \quad (12.110)$$

On peut énumérer les 17 espaces topologiques en classant les matrices  $M$  et les traductions  $T$  [62].



**Fig. 12.10** (left): Illustration of the description of a topological manifold on the example of the two-dimensional torus,  $T^2$ , (right): This manifold can be described by a square with identified opposite faces (middle). In the universal covering space, the two translation generators of the holonomy group brings one copy of the fundamental polyhedron to a neighbouring copy.

- *Espaces compacts orientables* : il y a 6 espaces compacts et orientables. Leurs polyèdres fondamentaux sont présentés dans le panneau supérieur de la figure 12.11. Ils sont construits à partir du tore, qui est un espace couvrant tous ces espaces.
- **Tore** : le tore est le quotient du groupe  $E^3$  par le groupe engendré par trois traductions indépendantes. Son domaine fondamental est donc un parallélépipède. Par souci de simplicité, nous ne considérons que le *tore rectangulaire* généré par les trois traductions

$$T_1 = (L_x, 0, 0), T_2 = (0, L_y, 0), T_3 = (0, 0, L_z), \quad (12.111)$$

et le *tore hexagonal* défini par

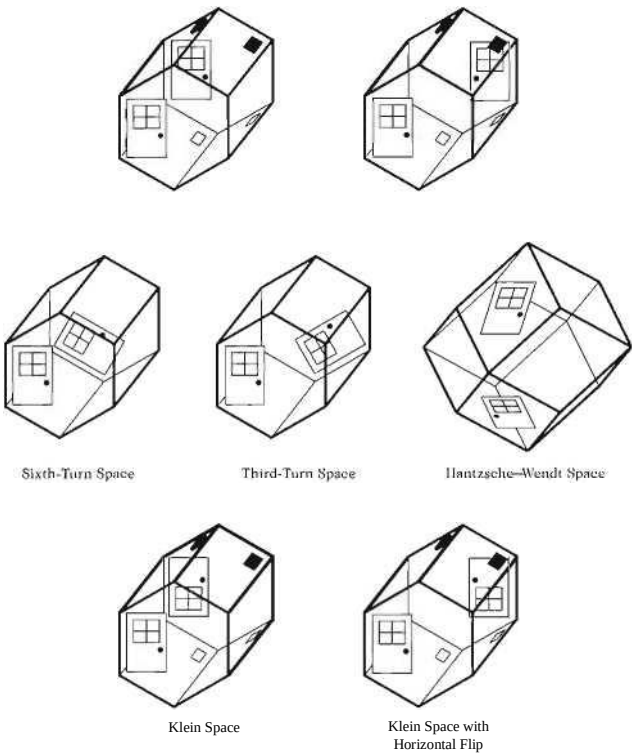
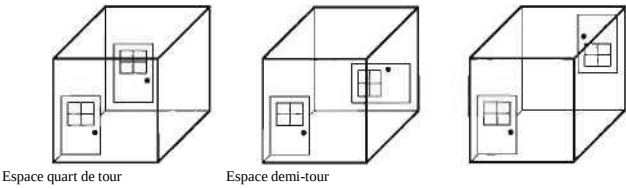
$$T_1 = (L_x, 0, 0), T_2 = (-L/2, \sqrt{3}L/2, 0), \\ T_3 = (-L/2, -\sqrt{3}L/2, 0), T_4 = (0, 0, L_z). \quad (12.112)$$

Son domaine fondamental est un prisme rectangulaire à base hexagonale. Trois des quatre traductions (12.112) ne sont pas indépendantes ( $T_1 + T_2 + T_3 = 0$ ) et en éliminant une de ces trois traductions on peut choisir un autre domaine fondamental.

- **Espaces de demi, troisième et sixième tours** : on peut définir trois espaces quotients en remplaçant la translation  $T_3$  du groupe (12.111) par qui représente un mouvement de tire-bouchon selon l'axe  $Oz$  par une rotation d'angle  $2\pi/n$ . Puisque  $g_n$  composé  $n$  fois avec lui-même se réduit à la traduction

$$g_n = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \cos 2\pi/n - y \sin 2\pi/n \\ y \cos 2\pi/n + x \sin 2\pi/n \\ z + L_z/n \end{pmatrix} \quad (12.113)$$

Tore S



Espace Klein  
avec Flip Vertical

Espace Klein  
avec Half-Turn

**Fig. 12.11** Polyèdres fondamentaux des espaces euclidiens compacts de dimension 3. Il existe 6 espaces orientables (en haut) et 4 espaces de Klein non orientables. Les faces doivent être identifiées en superposant les portes. De la Réf. [62](avec la permission d'Adam Weeks).

du vecteur T3,  $n$  copies de ces espaces forment un tore rectangulaire. La valeur de  $n$  n'est pas arbitraire et est limitée à

$$n \in \{2, 3, 6\}, \quad (12.114)$$

définissant ainsi les espaces de demi-tour, troisième et sixième tour, respectivement.

- **Hantzsche—Wendt** : enfin, un autre espace peut être construit à partir d'un losange. dodécaèdre circonscrit dans une boîte rectangulaire de taille  $(L_x/2, L_y/2, L_z/2)$ . Son groupe d'holonomie est généré par trois mouvements de demi-tour en tire-bouchon

$$g_i \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} (-1)^{\beta_i} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{\beta_i} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{\beta_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (12.115)$$

avec  $(\beta_i, A, 7) \in \{(1,1,0); (0,1,1); (1,0,1)\}$ . Il faut 8 exemplaires de cet espace pour former un tore rectangulaire.

- **Espaces compacts non orientables** : Il existe 4 espaces compacts non orientables. Leurs polyèdres fondamentaux sont présentés dans le panneau inférieur de la Fig. 12.11. Ils sont construits à partir de l'espace de Klein, qui est un espace de couverture pour tous ces espaces.

- **Espaces de Klein** : Ils sont générés par deux réflexions glissantes

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (12.116)$$

avec  $\epsilon = \pm 1$  et une translation selon l'axe

$Oz$ ,

$$T_3 = (0, 0, L_3). \quad (12.117)$$

- **Espaces quotients** : On peut générer trois espaces quotients de l'espace de Klein en remplaçant la translation (12.117) par la transformation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_z/2 \end{pmatrix} \quad (12.118)$$

$(\epsilon_1, \epsilon_2) = (-1, 1)$  et  $(\epsilon_1, \epsilon_2) = (1, -1)$  correspondant à un espace de Klein avec retournement respectivement horizontal et vertical, tandis que  $(\epsilon_1, \epsilon_2) = (-1, -1)$  correspond à un espace de Klein avec un demi-tour. Deux copies de ces espaces forment un espace de Klein (puisque  $y^2$  est la translation du vecteur  $T_3$ ).

- **Espaces cheminée** : ces espaces ont deux dimensions compactes et leurs polyèdres fondamentaux sont représentés dans le panneau supérieur de la Fig. 12.12.

**Espace cheminée** : comme le tore, l'espace cheminée est le quotient de  $E^3$  au groupe engendré par deux traductions indépendantes. Cet espace n'est donc pas compact et son domaine fondamental est une cheminée infinie à sections de parallélogramme. Par souci de simplicité, nous considérons uniquement la *cheminée rectangulaire* générée par les deux traductions

$$T_1 = (L_x, 0, 0), \quad T_2 = (0, L_y, 0). \quad (12.119)$$

- **Chimney with half-turn**: this space is generated by replacing the translation along  $T_2$  by

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_y/2 \end{pmatrix} \quad (12.120)$$

Deux exemplaires de cet espace reproduisent un simple espace cheminée.

- **Cheminée à bascule** : la translation parallèle à  $T \rightarrow$  peut être remplacée par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ L_y/2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (12.121)$$

$(E_1, E_2) = (1, -1)$  et  $(E_1, E_2) = (-1, 1)$  correspondant à un espace cheminée à retournement respectivement vertical et horizontal, tandis que  $(E_1, E_2) = (-1, -1)$  correspond à un espace de cheminée par un demi-tour et un retournement. Deux copies de ces espaces produisent un espace cheminée ( $g^2$  est la translation du vecteur  $T_2$ ).

- **Espaces dalles** : ces espaces n'ont qu'une seule dimension compacte et leurs polyèdres fondamentaux sont représentés dans le panneau inférieur de la Fig. 12.12.

- **Espace dalle** : cet espace est le quotient de  $E^3$  avec le groupe généré par une translation

$$T_i = (0, 0, L_i) \quad (12.122)$$

**Espace dalle avec retournement** : deux copies d'un tel espace produisent un espace dalle. On l'obtient en remplaçant la translation selon  $T$  par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_z/2 \end{pmatrix} \quad (12.123)$$

#### 12.4.3.2 Espaces sphériques

La 3-sphère peut être intégrée dans un espace euclidien à quatre dimensions. Présentation des coordonnées

$$x^0 = \text{confortable}, \quad X_i = \sin y \sin \theta \sin \phi, \quad x^2 = \sin y \sin \theta \cos \phi, \quad X_3 = \sin y \cos \theta, \quad (12.124)$$

avec  $0 < y < \pi$ ,  $0 < \theta < \pi$  et  $0 < \phi < 2\pi$ , il est décrit par la sous-variété

$$\delta^{\mu\nu} x^\mu x^\nu = X^2 + x^2 + x^2 = 1, \quad (12.125)$$

généraliser la définition d'une sphère ; notez qu'une intégration similaire nous permet de définir des  $n$ -sphères avec des dimensions arbitraires. La distance entre deux points de la 3-sphère est obtenue à partir du produit scalaire  $x^\mu y^\mu$  (notez qu'ici la métrique est  $\delta^{\mu\nu}$ ),

$$\text{dist}[x, y] = \arccos(x^\mu y_\mu). \quad (12.126)$$

Le volume, en unités de rayon de courbure, contenu dans une sphère de rayon  $y$  est

$$\text{Vol}(y) = 7r(2y - \sin 2y). \quad (12.127)$$

Une manière pratique de visualiser  $S^3$  est de considérer cet espace comme composé de deux boules de  $E^3$  dont les surfaces sont collées ensemble (Fig. 12.13). Chaque point de la surface de l'une de ces billes est identique à un point de la surface de l'autre bélière. Pour représenter un point de coordonnées dans l'espace tridimensionnel, on considère uniquement les trois

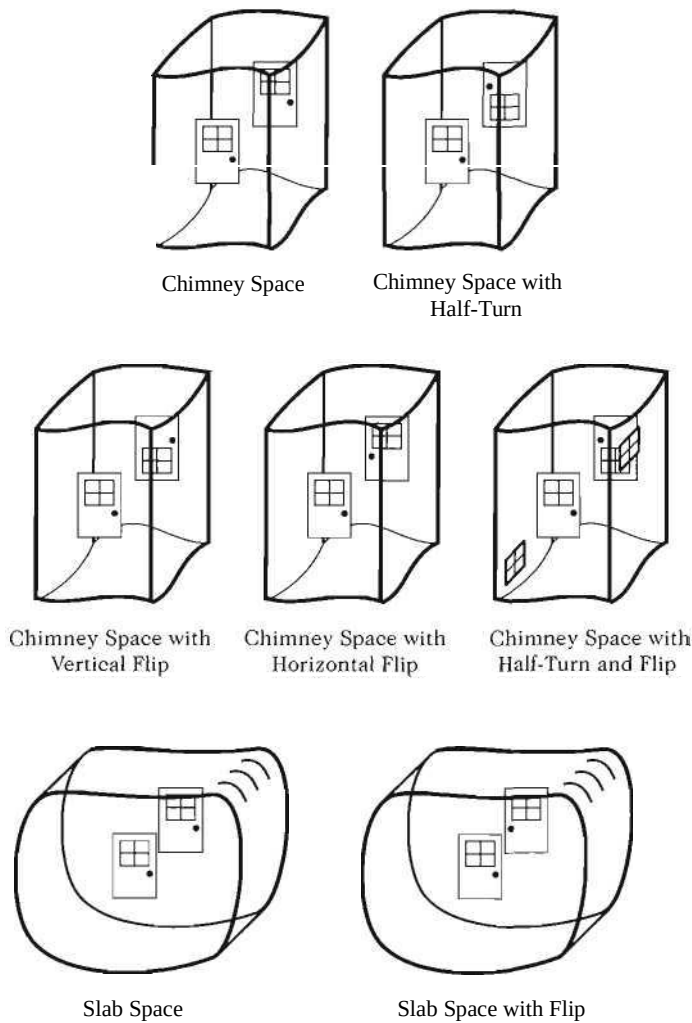


**Fig. 12.12** Polyèdres fondamentaux des espaces de cheminée (en haut) et des espaces de dalle (en bas), distinguant les espaces orientables (à gauche) et non orientables (à droite). Les visages doivent être identifiés pour que les portes correspondent. De la Réf. [62] (avec la permission d'Adam Weeks).

coordonnées  $(x, y, z)$  qui correspondent à un point à l'intérieur de la bélière. Or les deux points  $(x, y, z)$  et  $(\pi - x, \pi - y, \pi - z)$  correspondent à  $(\alpha, \beta, \gamma)$  et  $(-\alpha, -\beta, -\gamma)$ , expliquant pourquoi deux boules sont nécessaires, une pour  $x > 0$  et l'autre pour  $x < 0$ .

Le groupe d'isométrie de la 3-sphère est le groupe de rotation à quatre dimensions  $G = SO(4)$ . Notez que pour tout espace sphérique, le volume est donné par

$$\text{vol}(S^3/r) = \frac{\text{Vol}(S^3)}{|r|}, \quad (12.128)$$

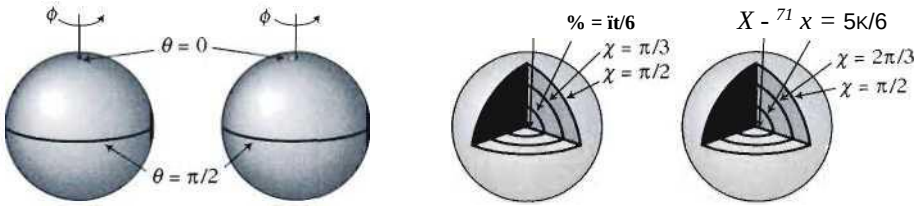


**Fig. 12.13** Représentation de  $S^3$  by two balls of  $R^3$  glued together. The coordinates  $\theta$  and  $\phi$  are the usual angular coordinates. The radial coordinate,  $y$ , runs from 0 at the centre of one of the balls ('north pôle') through  $7r/2$  at the ball's surface (spherical equator of  $S^3$ ) to  $7r$  at the centre of the second ball ('south pôle'). From Ref. [63],

et donc.  $S^3$  est le plus grand de tous les espaces sphériques : plus l'ordre du groupe est grand, plus l'espace est petit.

La classification des espaces sphériques repose sur la détermination des sous-groupes de  $SO(4)$ . Toute isométrie de  $SO(4)$  sans point fixe prend la forme

$$7V/(0, \langle / \rangle) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (12.129)$$

de sorte que tous les espaces sphériques tridimensionnels sont orientables. Les isométries  $M(0, \pm 0)$  sont des translations de Clifford que nous décrivons comme droite ( $\langle / \rangle = 0$ ) et gauche ( $\langle / \rangle = -0$ ). Toute matrice (12.129) peut être décomposée comme le produit d'une translation de Clifford à droite et à gauche comme

$$M(0, \langle / \rangle) = M(a, a) M(0, -0) = M(0, -0) a \quad (12.130)$$

avec  $a = (\# + \langle / \rangle)/2$  et  $0 - (0)$

On peut montrer [63] que  $SO(4)$  est isomorphe à  $5^3 \times S^3 / (\pm \{1, 1\})$  où  $5^3$  est le groupe de quaternions de longueur unité et 1 le quaternion identité (le groupe de l'unité les quaternions de longueur sont à la 3-sphère ce que le groupe de nombres complexes est au cercle). Le problème revient maintenant à la détermination de tous les sous-groupes de  $S^3$ , et cela peut être encore simplifié en remarquant qu'il existe un homomorphisme de  $S^3$  vers  $SO(3)$ , le groupe de rotation de la 2-sphère. Les sous-groupes finis de  $SO(3)$  sont connus :

- les groupes cycliques,  $Z_n$ , d'ordre  $n$ , générés par les rotations d'angle  $2\pi/n$  autour d'un axe arbitraire.
- les groupes dièdres,  $D_m$ , d'ordre  $2m$ , générés par les rotations d'angle  $\pi/m$  autour d'un axe arbitraire accompagnées d'un demi-tour autour d'un axe perpendiculaire.
- les tétraèdres,  $T$ , octaédriques,  $O$  et icosaèdres,  $I$ , groupes d'ordre respectif 12, 24 et 60 constitués de toutes les symétries préservant l'orientation du tétraèdre, de l'octaèdre et de l'icosaèdre.

Les sous-groupes de  $S^3$  sont déduits de cette classification, mais en remarquant que l'homomorphisme n'est pas un isomorphisme mais une relation 2-1. En conséquence, les sous-groupes de  $5^3$  sont

- les groupes cycliques,  $Z_n$ , d'ordre  $n$ .
- les groupes dièdres binaires,  $D_n^*$ , d'ordre  $4n$ .



- les binaires tétraédriques,  $T^*$ , octaédriques,  $O^*$  et icosaédriques,  $I^*$ , groupes d'ordre 24, 48 et 120, respectivement.

Les groupes dièdres sont les doubles couvertures des espaces que nous considérons.

Froin (12.130), les sous-groupes de  $SO(4)$  sont alors obtenus en combinant les deux sous-groupes  $R$  et  $L$ , de  $S^3$  comme

$$V = RxL, \quad (12.131)$$

un groupe agissant comme une traduction de Clifford à gauche ( $L$ ) et l'autre comme une traduction à droite ( $R$ ). Cette composition n'est en fait pas arbitraire et il existe quelques impossibilités car il faut s'assurer que  $F$  n'a pas de point fixe. On distingue donc :

- à *simple action*, obtenus en considérant l'action d'un seul groupe de  $S^3$ . Ils contiennent la lentille ( $Z_n$ ), le prisme tétraédrique ( $T^*$ ), l'octaédrique ( $O^*$ ) et des espaces dodécaédriques ( $I^*$ ), ces derniers étant plus connus sous le nom de groupe de Poincaré. Respectivement,  $n$ ,  $4m$ ,  $24$ ,  $48$  et  $120$  exemplaires de ces espaces sont nécessaires pour carreler  $S^3$ . Les domaines fondamentaux de ces espaces sont respectivement une lentille (Fig. 12.14), un prisme de  $2m$  de côtés, un octaèdre régulier, un cube tronqué et un dodécaèdre régulier.
- à *double action* sont obtenues en combinant l'action de l'un des groupes de  $<S^3$  avec le groupe cyclique  $Z_n$  à condition que  $n$  et l'ordre de ce groupe soient des nombres premiers relatifs. Cela génère des espaces de lentilles de la forme  $L(mn, q)$  dans le cas de deux groupes cycliques ( $Z_n$ , et  $Z_m$ ) et  $L(n, 1)$  dans le cas contraire.
- d'*actions liées* obtenues en combinant l'action de deux groupes mais en permettant uniquement à chaque élément  $r \in R$  de s'associer avec un sous-ensemble restreint d'éléments  $l \in L$  pour éviter les points fixes.

Les espaces lentilles,  $L(p, q)$ , introduits dans cette classification sont construits en identifiant la face inférieure d'un solide en forme de lentille avec sa face supérieure après rotation de  $2\pi q/p$  (Fig. 12.14). Pour cela,  $p$  et  $q$  doivent être des nombres premiers relatifs et  $0 < q < p$ . Les faces du cristallin sont localisées sur de grandes 2-sphères de  $S^3$ , en remplissant la moitié. Il faut  $p$  copies de cet espace pour carreler  $S^3$ . Notez qu'un seul groupe peut donner naissance à deux espaces de lentilles différents. Par exemple,  $Z_5$  génère  $L(5, 1)$  et  $L(b, 2)$ .

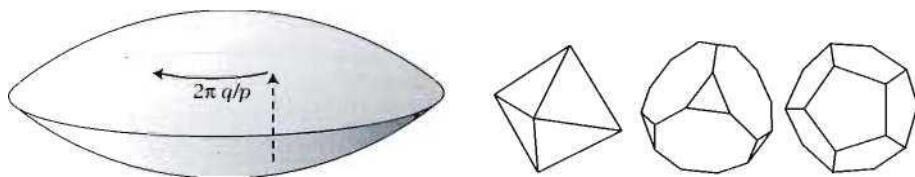


**Fig. 12.14** Domaines fondamentaux des espaces lentilles (à gauche) et des espaces binaires tétraédriques ( $T^*$ ), octaédriques ( $O^*$ ) et icosaédriques ( $I^*$ ). De la Réf. [63].

#### 12.4.3.3 Espaces hyperboliques

La classification des espaces hyperboliques est beaucoup plus difficile et n'est pas encore complètement connue. Le groupe d'isométrie de  $H^3$  est  $G = SL(2, \mathbb{C})/Z_2$ . Contrairement à ce qui se passe pour les espaces sphériques, le volume des espaces hyperboliques augmente avec la complexité du groupe d'holonomie. On peut montrer que le volume de ces variétés doit satisfaire la contrainte

$$\text{Vol}(S_3) > 0.166, \quad (12,132)$$

en unités du rayon de courbure. La classification des espaces connus, ainsi que leurs propriétés géométriques peuvent être obtenues à partir du logiciel disponible gratuitement SnapPea [64]. Le plus petit espace connu à l'heure actuelle est l'espace des Semaines dont le volume est de 0,94272.

#### 12.4.4 Signatures observationnelles

Le choix d'une topologie correspond à changer les conditions aux limites de l'ensemble des fonctions et des champs évoluant dans cet Univers.

Diverses tentatives visant à détecter et à contraindre la topologie de l'Univers ont été explorées, avec plus ou moins de succès.

##### 12.4.4.1 Catalogues de galaxies

Si la topologie a une échelle plus courte que celle de l'Univers observable, on peut espérer détecter plusieurs images d'un même objet astrophysique car il existe plusieurs géodésiques joignant cet objet à l'observateur.

Dans un premier temps, on a tenté, sans succès, de détecter les images topologiques de la Voie Lactée et des amas de Coma et d'Abell. Ceci a permis d'établir que  $r_+ > 15/z^{-1} \text{ Mpc}$ ,  $r_+ > 60/z^{-1} \text{ Mpc}$  et  $r_+ > 600b^{-1} \text{ Mpc}$ , respectivement, en supposant un espace euclidien. La principale difficulté de cette approche est que deux images topologiques d'un même objet ne correspondent pas nécessairement à la même phase d'évolution. Il faut donc reconnaître les objets dont la morphologie peut être différente. Outre l'évolution, rien ne garantit non plus que l'on observera les objets du même point de vue, ils pourront donc apparaître une fois de face, une fois de côté, etc. Les méthodes de reconnaissance directe ont ainsi été abandonnées.

Des méthodes statistiques ont ensuite été développées. Ils s'appuient sur la propriété que dans un catalogue contenant un grand nombre d'objets, les images topologiques d'un même objet sont liées par des holonomies qui sont des isométries. Certaines distances, associées aux tailles caractéristiques du polyèdre fondamental, devraient donc apparaître plus souvent que dans le même catalogue pour un Univers à topologie triviale. La *méthode cristallographique* étudie la répartition des séparations tridimensionnelles de toutes les paires d'objets dans un catalogue donné. En pratique, cette méthode n'est pas simple à mettre en œuvre. Premièrement, les observations donnent accès à une position angulaire et à un redshift mais il faut déterminer des distances tridimensionnelles, ce qui nécessite de connaître les paramètres cosmologiques avec une bonne précision. Deuxièmement, les objets ne sont pas strictement mobiles, mais se déplacent selon un mouvement propre, de sorte qu'ils sont décalés par rapport à la position de l'image topologique. Enfin, la méthode met principalement l'accent sur les traductions de Clifford (car tous les objets contenus dans le domaine fondamental introduisent la même distance).

Toutes ces considérations expliquent pourquoi ces méthodes n'ont pas réellement réussi à établir des contraintes fortes sur la topologie de l'Univers.

#### 12.4.4.2 Modes propres du Laplacien

Comme le montre en détail le chapitre 5, les équations d'évolution des perturbations cosmologiques se réduisent à un ensemble d'équations aux dérivées partielles introduisant uniquement un laplacien et des dérivées temporelles. Ce système est facilement résolu dans l'espace de Fourier.

#### 12.4.4.3 Formulation du problème

Lorsqu'on traite un espace avec une topologie non triviale, il faut s'assurer que les champs vivant dans cet espace satisfont aux conditions aux limites correctes. Toute fonction ou champ,  $f$  de  $X$  dans  $X$ , satisfaisant les conditions de périodicité

$$\langle t \rangle \circ g(x) = ip_C x', \forall x \in X \quad (12.133)$$

est appelé T-périodique. Une telle fonction peut être identifiée à une fonction de  $X/T$  dans  $X/r$ .

Une fonction T-périodique peut être développée en modes de Fourier dans une base de fonctions propres du Laplacien seulement si ces fonctions propres sont également T-périodiques. La tâche est donc de déterminer les fonctions satisfaisant

$$\Delta T_M = -(\lambda^2 - \kappa) T_M, \quad \forall s \in Y_{fc}, \text{ donc } 0 = Y_M. \quad (12.134)$$

La valeur propre  $-(\lambda^2 - \kappa)$  dépend uniquement du nombre d'onde  $k$  et  $s$  représente un indice (ou un ensemble d'indices) caractérisant les solutions du même espace propre. Le Laplacien  $\Delta$  est défini à partir de la métrique spatiale de courbure  $K$ .

Les solutions de l'équation de Helmholtz sont connues pour les espaces de recouvrement universels ( $T = \{\text{Id}\}$ ), voir la section B.5 de l'annexe B d'où nous utilisons les conventions. Nous pouvons ainsi étendre formellement les fonctions propres T-périodiques sur la base des fonctions propres de l'espace de couverture universel comme

$$T_{fc, s} = \sum_{Z=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \quad (12.135)$$

Pour chaque valeur de  $k$ , l'espace propre des fonctions propres T-périodiques est un sous-espace des fonctions propres (B.70). Le calcul des coefficients permet de calculer l'ensemble des observables cosmologiques dans un Univers à topologie non triviale.

#### 12.4.4.4 Espaces euclidiens

Les modes propres des 17 espaces euclidiens sont détaillés dans la Réf. [62], Ici, à titre d'exemple, nous ne considérerons que le tore rectangulaire. En coordonnées cartésiennes, les modes propres du Laplacien de  $E^3$  sont simplement des ondes planes,  $Q_{fe}(\mathbf{x}) \propto \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$ . Pour un tore rectangulaire (12.111), les nombres d'ondes sont quantifiés de manière à être donnés par

$$\mathbf{k} = 2\pi \left( \frac{n_x}{L_x} \mathbf{e}_x + \frac{n_y}{L_y} \mathbf{e}_y + \frac{n_z}{L_z} \mathbf{e}_z \right), \quad (12.136)$$

En utilisant (B.21), les ondes planes peuvent être exprimées en termes de modes propres en coordonnées sphériques (B.70) comme

$$w = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Q_{\ell m}(x'). \quad (12.137)$$

Nous en déduisons que les coefficients (12.135) sont donnés explicitement par

$$e_L = \quad (12.138)$$

où l'indice  $s$  peut être choisi comme  $k$  défini par (12.136), c'est à dire par le triplet  $(n, \ell, m)$ , associé au mode (12.136).

Pour les autres espaces, on peut simplement remarquer que l'action de chaque isométrie,  $g$ , définie par  $M$  et  $T$ , transforme une onde plane en une autre onde plane

$$\langle 2k(x) \rangle \sim e^{i k T} e^{i k M x} = e^{i k T} Q_{kM}(x). \quad (12.139)$$

Si  $n$  est le plus petit entier tel que  $k = kM^n$  alors (i) l'espace généré par  $\{Q_{kM^n}, \dots, Q_{kM^{n-1}}\}$  est invariant sous l'action de  $g$  et (ii) l'action de  $g$  fixe un invariant unique élément de la forme  $a_0 Q_{kM^n} + \dots + a_{n-1} Q_{kM} + a_n$  avec  $a_{j+1} = \exp(z f c A^{-1} P T) a_j$ . Connaissant  $(M, T)$  pour tous les espaces, on peut alors utiliser ces deux propriétés pour déterminer les modes des 17 espaces euclidiens.

#### 12.4.4.5 Espaces sphériques

Le cas des espaces sphériques est plus complexe, mais les modes de tous les espaces de lentilles et de prismes peuvent être déterminés analytiquement [65]. Sans entrer dans les détails, notez que le point important réside dans le choix d'un système de coordonnées qui respecte les symétries des transformations de  $T$ , et notamment des groupes cycliques. Il est utile de représenter la 3-sphère en coordonnées toroïdales (Fig. 12.15) définies par

$$x_0 = \cos y \cos \phi, \quad x_1 = \cos y \sin \phi, \quad x_2 = \sin y \cos \phi, \quad x_3 = \sin y \sin \phi, \quad (12.140)$$

avec  $0 < y < \pi/2$  et  $0 < \phi < 2\pi$ . Pour chaque valeur de  $y$ , les coordonnées  $(0, \phi)$  décrivent un tore, qui se réduit à un cercle pour  $y = 0$  et  $y = \pi/2$ . L'ensemble de tous ces tores remplit  $S^3$ .

Dans un cas plus général, les modes propres ne sont pas connus explicitement, mais peuvent être définis à partir de ceux de l'espace de recouvrement universel

$$T f c := |p| E^{\alpha} S_{-1}^{11} g e r \quad (12.141)$$

Par linéarité, cet élément est une solution de (12.134) ; il satisfait également à la condition (12.133). La difficulté réside dans l'extraction d'une base d'éléments indépendants de ces fonctions (voir Réf. 65] pour la construction explicite).

#### 12.4.4.6 Fond cosmique de micro-ondes

Le fond diffus cosmologique a été émis au même moment partout dans l'Univers, il contient donc des informations non locales. Puisqu'il s'agit de l'observation la plus ancienne à laquelle nous avons accès, c'est un outil idéal pour étudier la topologie de l'Univers.

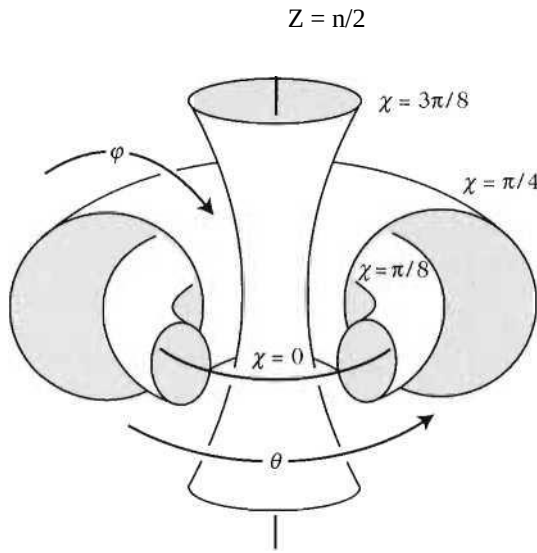


**Fig. 12.15** Représentation of  $S^3$  in toroidal coordinates. The 3-sphere is decomposed into slices of two-dimensional tori.

#### 12.4.4.7 Calcul des anisotropies du fond diffus cosmologique

Comme détaillé au chapitre 6, les fluctuations de température dans une direction  $n$  prennent la forme générale

$$\Delta T = \int d\chi \, r(\chi) \, P(\chi, \theta, \phi) \quad (12.142)$$

où  $F(\chi)$  est le spectre primordial,  $\epsilon_k$  une variable aléatoire gaussienne satisfaisant  $\langle \epsilon_k \epsilon_{k'} \rangle = \delta(k - k')$  et  $O_k$  un opérateur de convolution dépendant uniquement de  $k$  et des paramètres cosmologiques. En développant  $\Delta T$  comme dans (B.70) et la fluctuation de température dans les harmonies sphériques (B.18), nous obtenons

$$\Delta T_{\ell m} = i \int d\chi \, k^2 \, P(k, \chi) \, \hat{\epsilon}_{\ell m}(k), \quad (12.143)$$

with

$$G_\ell(k) = O_k[R_{\ell k}] \quad \text{and} \quad \hat{\epsilon}_{\ell m} = \int d^2 \hat{n} Y_{\ell m}^*(\hat{n}) \epsilon_{\hat{n}}. \quad (12.144)$$

Pour un Univers à topologie non triviale, toutes les relations de physique locale restent évidemment valables et seules les conditions aux limites ont été modifiées. La seule modification à apporter est donc d'effectuer la substitution  $Q(\mathbf{r}) \rightarrow T^*$ . En utilisant le développement (12.135) et en remarquant que l'opérateur  $O_k$  est linéaire, on obtient [en remplaçant la condition sur la variable aléatoire par  $\langle \epsilon_k \epsilon_{k'} \rangle = \delta(k - k')$ ]

$$\frac{(2\pi)^3}{\text{Vol}(E_3)} \quad (12.145)$$

Ainsi, si les coefficients  $\epsilon_{\ell m}^{sk}$  ont été déterminés, nous pouvons produire des cartes du fond cosmique des micro-ondes. Les  $\epsilon_{\ell m}^{sk}$  sont des champs gaussiens, car ce sont des combinaisons linéaires de champs gaussiens, et sont désormais corrélés. Leur matrice de corrélation est donnée par

$$C_f = \quad (12.146)$$

d'où on peut extraire le spectre angulaire

$$(2^{\wedge}+1)C_{\epsilon} = \epsilon c f^{\text{TM}}. \quad (12.147)$$

#### 12.4.4.8 Signature

Une topologie non triviale possède trois signatures principales sur les anisotropies du fond diffus cosmologique.

- *Présence de corrélations* : tous les photons du fond diffus cosmologique sont émis au moment du découplage sur la dernière surface de diffusion. Tous ces photons proviennent d'une 2-sphère dont nous occupons le centre. De la même manière qu'un disque de papier enroulé autour d'un cylindre de rayon plus petit se rétablira, la surface de la dernière diffusion « s'enroule » autour de l'Univers et se coupe. Cette intersection est un cercle qui apparaît deux fois sur la sphère de dernière diffusion. Ces deux cercles sont physiquement identiques, de sorte que les fluctuations de température le long de ces cercles doivent être identiques. Cette méthode *des cercles dans le ciel* [66] est la signature la plus directe de l'existence d'une topologie non triviale.

La figure 12.16 illustre l'existence de ces corrélations dans le cas du tore et décrit la reconstruction du polyèdre fondamental.

Cette corrélation serait parfaite si la température était une fonction scalaire sur la sphère. Cependant, ce n'est pas le cas puisque l'effet Doppler et les effets Sachs-Wolfe intégrés sont tous deux des bruits pour cette méthode.

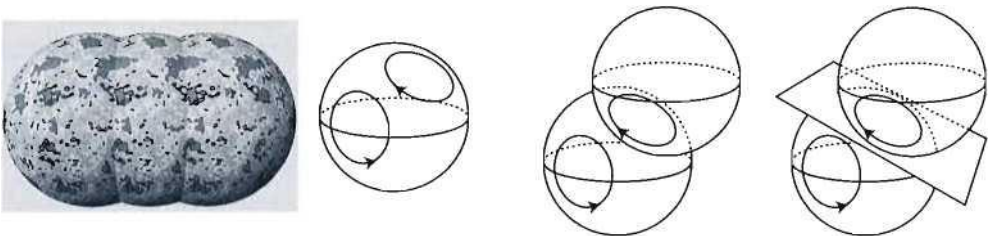


**Fig. 12.16** Simulation d'une carte de fond cosmique micro-onde pour un univers toroïdal. (à gauche) : Nous avons représenté la surface de dernière diffusion vue de l'extérieur, ainsi que deux exemplaires par une translation du groupe d'holonomie. Ces deux sphères se coupent sur un cercle le long duquel les anisotropies sont identiques. (à droite) : Détecter une paire de cercles permet de connaître la position de deux copies de la surface de dernière diffusion et de reconstruire la position d'une des faces du polyèdre fondamental.

- *Violation de l'isotropie statistique* : la matrice de corrélation (12.146) n'est pas invariante sous rotations donc elle ne se réduit pas à  $C(5wSmm')$ , comme dans le cas d'un

l'isotropie connecte simplement l'Univers. La présence d'une corrélation entre différents  $\ell$  et entre différents  $m$  indique une violation de l'isotropie globale. La figure 12.17 représente la matrice de corrélation pour un Univers dont la topologie est celle d'un tore cubique. Il est intéressant de noter qu'il subsiste une signature de la topologie même si son échelle caractéristique est plus grande que la taille de l' Univers observable. La difficulté réside dans le développement d'une méthode robuste capable de mettre en valeur ces corrélations, de manière significative (afin que la variance cosmique ne gâche pas le signal). En effet, les observations ne sont pas strictement isotropes à cause d'effets de masque (sortie du plan galactique,...) et les émissions de premier plan n'ont aucune raison d'être isotropes.

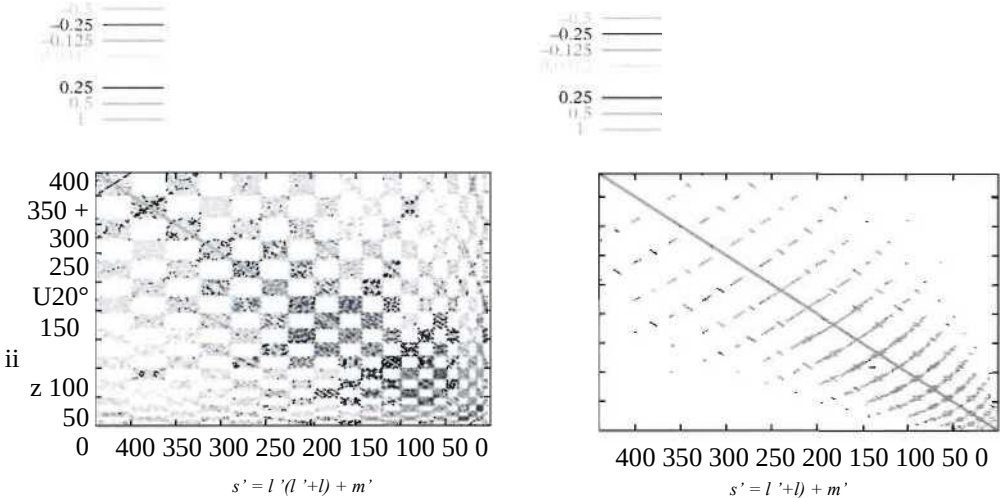


**Fig. 12.17** Amplitude de la fonction de corrélation normalisée  $C^{mm}$  représentée en fonction de  $s = \ell(\ell + 1) + m^2$  pour un tore cubique. Le fait que cette fonction ne soit pas diagonale reflète l'écart par rapport à l'isotropie globale. ( à gauche ) : Tore de taille  $L = 2$  et (à droite) : Tore de taille  $L = 6,5$  en unités où le diamètre de la dernière surface de diffusion est de 6,23.

*Modification du spectre de puissance angulaire* : le spectre de puissance angulaire, obtenu en faisant la moyenne de la fonction de corrélation, perd une grande partie de l'information topologique. Comme le montre la figure 12.18, la topologie induit une perte de puissance sur de grandes échelles angulaires, principalement parce que les modes de grande longueur d'onde sont plus affectés. La recherche de ces effets n'est cependant pas robuste car elle doit faire une hypothèse sur la forme du spectre primordial et ils affectent principalement les petits multipôles, pour lesquels la variance cosmique est grande, de sorte que la perte de puissance n'est généralement pas statistiquement significatif. En outre, cela est particulièrement important pour les très grandes échelles angulaires, où la variance cosmique est grande.

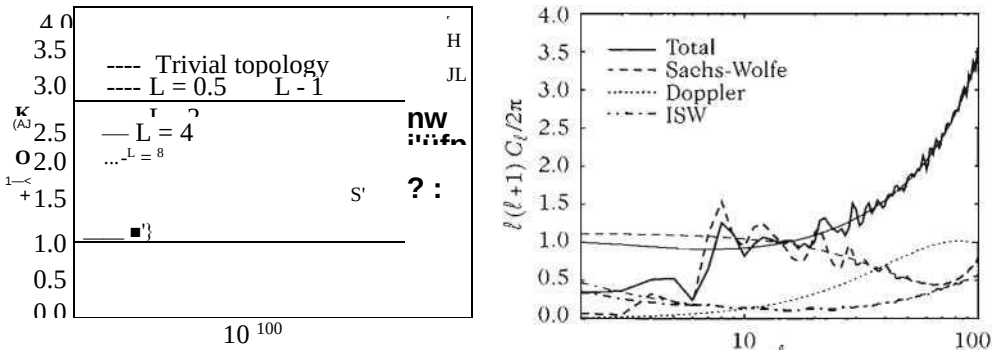


**Fig. 12.18** (left): Angular power spectrum for cubic torus of different sizes (in units of Hubble radius. For these models the radius of the observable Universe is 3.17 in these units). (right): The topology mainly affects the Sachs-Wolfe term that dominates at large angular scales.

#### 12.4.4.9 Candidats et contraintes

Les observations du satellite WMAP indiquent que l'Univers est presque plat (Chapitre 4). Ces observations montrent également que le quadripôle est plus petit que prévu et qu'il y a une perte de puissance significative sur des échelles angulaires supérieures à  $60^\circ$ . Ceci, à l'époque, ravive l'intérêt pour les espaces topologiques.

A noter que toutes les caractéristiques topologiques sont exprimées en unités de rayon de courbure. Pour un Univers strictement plat, il n'existe pas d'échelle liée à la courbure et il est difficile de comprendre pourquoi l'échelle topologique devrait précisément coïncider avec la taille de l'Univers observable. Pour les espaces sphériques, en revanche, c'est l'échelle de courbure qui fixe les unités et l'Univers est toujours plus petit que la 3-sphère, d'où l'on peut conclure qu'une topologie sphérique est génériquement observable. Notons qu'une courbure positive observable aujourd'hui est également difficile à expliquer dans le cadre inflationniste.

On peut aussi montrer que les espaces topologiques expliquent le quadripôle observé par WMAP s'ils sont « bien proportionnés », c'est à dire si leurs dimensions sont toutes du même ordre de grandeur. C'est le cas de l'espace Poincaré qui offre un excellent accord avec les observations si  $Q_0 \sim 1-013$ . Ce modèle est convaincant car il n'ajoute aucun nouveau paramètre et prédit une courbure compatible avec les contraintes (c'est le seul paramètre qui contrôle la taille de l'Univers). Il prédit également l'existence de 6 paires de cercles antipodaux de rayon angulaire  $35^\circ$  qui devraient être identifiés avec une torsion de  $7\pi/5$ .

La recherche de ces cercles n'a abouti à aucun succès [67]. L'analyse actuelle indique qu'il n'y a pas de paires de cercles corrélés avec un rayon angulaire supérieur à  $25^\circ$  dans les données WMAP, excluant donc l'espace de Poincaré. Compte tenu des contraintes sur les paramètres cosmologiques, cela implique que la taille de l'Univers doit être supérieure à 24 Gpc, alors que la taille de l'Univers observable est d'environ 26,5 Gpc.





# Les références

- [1] K. OLIVE, « Inflation », *Phys. Rep.* **190**, 307, 1990.
- [2] D. LYTH et A. RIOTTO, « Modèles de physique des particules de l'inflation », *Phys. Rapport* **314**, 1, 1999.
- [3] C. COLEMAN et E. WEINBERG, « Les corrections radiatives comme origine de la rupture spontanée de symétrie », *Phys. Rév.D* **7**, 1888, 1973.
- [4] T. BRUNIER, F. BERNARDEAU et J.-P. UZAN, 'Corrections radiatives des masses scalaires dans l'espace de Sitter', *Phys. Rév. D* **71**, 063529, 2005.
- [5] J. ROCHER et M. SAKELLARIADOU, 'Théories supersymétriques grandes unifiées et cosmologie', *JCAP* **0503**, 004, 2005.
- [6] L. POGOSIAN, M. WYMAN et I. WASSERMAN, 'Contraintes d'observation sur les cordes cosmiques : analyse bayésienne dans un espace de paramètres tridimensionnel', *JCAP* **09**, 008, 2004.
- [7] R. JEANNEROT, J. ROCHER et M. SAKELLARIADOU, « DANS QUELLE MESURE la formation des cordes cosmiques est-elle générique dans les théories supersymétriques grandes unifiées », *Phys. Rév. D* **68**, 103514, 2003.
- [8] P. BINETRUY, G. DVALI, R. KALLOSH et A. VAN PROEYEN, « Termes de Fayet-Iliopoulos en supergravité et cosmologie », *Classe. Gravité quantique*. **21**, 3137, 2004.
- [9] S. WEINBERG, « Le problème de la constante cosmologique », *Rev. Mod. Phys.* **61**, 1, 1989.
- [10] PJE PEEBLES et B. RATRA, « La constante cosmologique et l'énergie sombre », *Rev. Mod. Phys.* **75**, 559, 2003.
- [11] S. CARROLL, « La constante cosmologique », *Liv. Rév. Relativité* **4**, 1, 2001.
- [12] YB ZEL'DOVICH, *SOV. Phys. Usp.* **11**, 381, 1988.
- [13] J.-P. UZAN, « L'accélération de l'Univers et la physique qui la sous-tend », *Gén. Relat. Grav.* **39**, 307, 2007.
- [14] J.-P. UZAN, N. AGHANIM et Y. MELLIER, « La relation de réciprocité à partir des observations de clusters aux rayons X et SZ », *Phys. Rév. D* **70**, 083533, 2004.
- [15] J.-P. UZAN et F. BERNARDEAU, « Lentilles aux échelles cosmologiques : un test de gravité dimensionnelle supérieure », *Phys. Rév. D* **64**, 083004, 2001.
- [16] F. BERNARDEAU, *Contraintes sur la gravité de dimension supérieure à partir de la fonction de corrélation à 3 points de cisaillement cosmique*, [astro-ph/0409224].
- [17] B. RATRA et PJE PEEBLES, « Conséquences cosmologiques d'un champ scalaire homogène roulant », *Phys. Rév.D* **37**, 3406, 1988.
- [18] C. WETTERICH, « Cosmologie et devenir de la symétrie de dilatation », *Nucl. Phys. B* **302**, 668, 1988.
- [19] P. BINETRUY, 'Modèles de rupture de supersymétrie dynamique et quintessences', *Phys. Rév. D* **60**, 063502, 1999.
- [20] A. ALBRECHT et C. SKORDIS, « Phénoménologie d'un univers réaliste en accélération - utilisant uniquement la physique à l'échelle de Planck », *Phys. Le révérend Lett.* **84**, 2076, 2000.

- [21] P. BRAX et J. MARTIN, « Quintessence et supergravité », *Phys. Lett. B* **468**, 40, 1999.
- [22] J.-P. UZAN, « Solutions de mise à l'échelle cosmologique de champs scalaires non couplés de manière minimale », *Phys. Rev. D* **59**, 123510, 1999.
- [23] N. BARTOLO et M. PIETRONI, « Gravité tensorielle et quintessence », *Phys. Rev. D* **61**, 023518, 2000.
- [24] M. GASPERINI, F. PIAZZA et G. VENEZIANO, « Quintessence comme dilatateur en fuite », *Phys. Le Rév. D* **65**, 023528,
- [25] T. DAMOUR, F. PIAZZA et G. VENEZIANO, « Violations du principe d'équivalence dans un scénario d'emballlement du dilaton », *Phys. Le Rév. D* **66**, 081601,
- [26] , Google Scholar Crossref, CAS 20. T. DAMOUR, G. GIBBONS et C. Gundlach, *Phys. Le Rév. Lett. Rév.* **64**, 123,
- [27] J. KHOURY et A. VELTMAN, « Champs de caméléons : des surprises en attente pour les tests de gravité dans l'espace », *Phys. Le révérend Lett.* **93**, 171104, 2004.
- [28] M. PELOSO et E. POPPITZ, « Quintessence des modules de forme », *Phys. Rev. D* **68**, 125009, 2003.
- [29] M. BUCHER et D. SPERGER, « La matière noire est-elle un solide ? », *Phys. Rev. D* **60**, 043505, 1999.
- [30] T. CHIBA, T. OKABE et M. YAMAGUCHI, *Phys. Le Rév. D* **62**, 023511,
- [31] C. ARMENDÀRIZ-PICÓN, V. MUKHANOV et P. STEINHARDT, *Phys. Le Rév. D* **63**, 103510,
- [32] C. C. ARMENDARIZ-PICÓN, T. DAMOUR et V. MUKHANOV, 'k-Inflation', *Phys. Lett. B* **458**, 209,
- [33] J. GARRIGA et V. MUKHNAOV, « Perturbations dans la k-inflation », *Phys. Lett. B* **458**, 219, 1999.
- [34] M. MALQUARTI *et al.*, « Une nouvelle vision de la k-essence », *Phys. Rev. D* **67**, 123503, 2003.
- [35] A. SEN, « Tachyon roulant », *JHEP* **0204**, 048, 2002.
- [36] A. KAMENSHCHIK, U. MOSCHELLA et V. PASQUIER, 'Au alternative à la quintessence' *Phys. Lett. B* **511**, 265, 2001.
- [37] N. ARKANI-HAMED *et al.*, « Une petite constante cosmologique issue d'une grande dimension supplémentaire », *Phys. Lett. B* **480**, 193, 2000.
- [38] R. GREGORY, A. RUBAKOV et S. SIBIRYAKOV, « Ouvrir des dimensions supplémentaires à des échelles ultra-larges », *Phys. Le révérend Lett.* **84**, 5928, 2000.
- [39] C. DEFFAYET, G. DVALI et G. GABADADZE, « Univers accéléré suite à une fuite gravitationnelle », *Phys. Rev. D* **65**, 044023, 2002.
- [40] T. DAMOUR, I. KOGAN et A. PAPAZOGLU, 'Bigravité non linéaire et accélération cosmique', *Phys. Rev. D* **66**, 104025, 2002.
- [41] B. CARTER, « Le principe anthropique et ses implications pour l'évolution biologique », *Phil. Trans. R. Soc. Londres. A* **310**, 347, 1983.
- [42] GFR ELLIS, « Cosmologie relativiste : sa nature, ses objectifs et ses problèmes », dans « Relativité générale et gravitation », B. Bertotti *et al.* (éd.), Reidel, 1984 ; N. ZOTOV et W. STOEGER, « Moyenne des équations d'Einstein », *Classe. Quant. Grav.* **9**, 1023, 1992.
- [43] GFR ELLIS et T. BUCHERT, « L'Univers vu à différentes échelles », *Phys. Lett. A* **347**, 38, 2005.

- [44] J. GOODMAN, « Le géocentrisme réexaminé », *Phys. Rév. D* **52**, 1821, 1995 ; RR CALDWELL et A. STEBBINS, « Un test du principe copernicien », *Phys. Le révérend Lett.* **100**, 191302, 2008 ; J.-P. UZAN, C. CLARKSON et GFR ELLIS, « La dérive temporelle du redshift cosmologique comme test du principe copernicien », *Phys. Le révérend Lett.* **100**, 191303, 2008.
- [45] PS CORASANITI et E. COPELAND, « Une approche modèle indépendante de l'équation d'état de l'énergie noire », *Phys. Rév. D* **65**, 043004, 2002.
- [46] V. SAHNI et *al.*, 'Satefinder - un nouveau diagnostic géométrique de l'énergie noire', *JETP Lett.* **77**, 201, 2003.
- [47] A. RIAZUELO et J.-P. UZAN, 'Observations cosmologiques en quintes scalaires-tenseurs', *Phys. Rév. D* **66**, 023525, 2002.
- [48] C. SCHIMD, J.-P. UZAN et A. RIAZUELO, « Lentille faible dans les théories scalaires-tensorielles de la gravité », *Phys. Rév. D* **71**, 083512, 2005.
- [49] JP UZAN, « Les constantes fondamentales et leur variation : statut observationnel et théorique », *Rev. Mod. Phys.* **75**, 403, 2003.
- [50] J.-P. UZAN, 'Variation des constantes dans l'Univers tardif et primitif', *AIP Conf. Actes* **736**, 3, 2004.
- [51] J.-P. UZAN et R. LEHOUCQ, *Les constantes fondamentales*, Belin, 2005 ; J.-P. UZAN et B. LECLERCQ, *Notre Univers et les lois de la physique ; Variation des constantes fondamentales*, Praxis, 2008.
- [52] JK WEBB et *al.*, « D'autres preuves de l'évolution cosmologique de la constante de structure fine », *Phys. Le révérend Lett.* **87**, 091301, 2001.
- [53] R. SRIANAND et *al.*, « Limites de la variation temporelle de la constante de structure fine électromagnétique dans la limite de basse énergie à partir des raies d'absorption dans les spectres des quasars distants », *Phys. Le révérend Lett.* **92**, 121302, 2004.
- [54] E. REINHOLD et *al.*, « Indication d'une variation cosmologique du rapport de masse proton-électron basée sur la mesure en laboratoire et la réanalyse des spectres H2 », *Phys. Le révérend Lett.* **96**, 151101, 2006.
- [55] A. Coc et *al.*, « Couplée ! variations des couplages fondamentaux et nucléosynthèse primordiale', *Phys. Rév. D* **76**, 023511, 2007.
- [56] T. DAMOUR et A. POLYAKOV, « Le dilaton des cordes et le principe du moindre couplage », *Nucl. Phys. B* **423**, 532, 1994.
- [57] M. LACHIÈZE-REY et J.-P. LUMINET, 'Topologie cosmique', *Phys. Rep.* **254**, 135, 1995.
- [58] J. LEVIN, « Topologie et fond micro-ondes », *Phys. Rapport* **365**, 251, 2002.
- [59] A. LINDE, 'Création d'un univers inflationniste topologiquement non trivial compact', *JCAP* **0410**, 004, 2004.
- [60] R. BRANDENBERGER et C. VAFA, « Superstring au début de l'Univers », *Nucl. Phys. B* **316**, 391, 1989.
- [61] YB ZELDOVICH et AA STAROBINSKY, 'Création quantique d'un univers à topologie non triviale', *Sov. Astrone. Lett.* **10**, 15, 1984.
- [62] A. RIAZUELO et *al.*, « Anisotropies du fond cosmique des micro-ondes dans les espaces fiduciaires multiconnectés », *Phys. Rév. D* **69**, 103518, 2004.
- [63] E. GAUSMANN et *al.*, 'Lentilles topologiques dans les espaces sphériques', *Class. Quant. Grav.* **18**, 5155, 2001.

- [64] SnapPea : <http://www.geometrygames.org/SnapPea/> .
- [65] R. LEHOUCQ, J.-P. UZAN et J. WEEKS, « Modes propres des espaces de lentilles et de prismes », *Kodai Math. J.* **26**, 119, 2003.
- [66] NJ CORNISH, D. SPERGEL et G. STARKMANN, « Cercles dans le ciel : découverte de la topologie avec le rayonnement de fond des micro-ondes », *Classe. Quant. Grav.* **15**, 2657, 1998.
- [671] N. CORNISH *et al.*, « Contraindre la topologie de l'Univers ». *Phys. Le révérend Lett.* **92**, 201302, 2004.

# 13

## Sujets avancés

---

La cosmologie est probablement le seul domaine dans lequel les effets de la physique des très hautes énergies peuvent avoir un impact important, voire être potentiellement détectables. À ce jour, la théorie la plus prometteuse est la théorie des supercordes qui implique, entre autres, l'existence de dimensions supplémentaires.

Nous commençons par passer en revue les conséquences des dimensions supplémentaires pour la physique ordinaire en nous concentrant sur la théorie de Kaluza-Klein dans la section 13.1, avant de décrire les principaux aspects de la théorie des cordes dans la section 13.2. Nous abordons ensuite deux thèmes importants motivés par la phénoménologie de cette théorie, à savoir les modèles *braneworld* dans la section 13.3, et l'approche de la singularité initiale et des univers rebondissants dans la section 13.4, y compris le scénario pré-Big Bang.

Il convient de noter que ce n'est que récemment [1] qu'un mécanisme a été développé pour stabiliser le vide dans la théorie des cordes. En conséquence, la plupart des modèles évoqués précédemment souffraient d'instabilités qui les rendaient incohérents. Cependant, ils peuvent toujours servir à des fins pédagogiques. Nous conseillons cependant fortement les Réf. [2-4] pour des lectures plus approfondies, axées sur la recherche.

### 13.1 Dimensions supplémentaires : théorie de Kaluza-Klein

L'espace dans lequel nous vivons est tridimensionnel, et on peut se demander pourquoi. Cette question remonte au moins à Kepler (dont la réponse s'appuyait sur la Trinité), mais ce n'est qu'au début du XXe siècle que des réponses scientifiques purent être proposées, notamment avec les travaux de Nordström, puis avec ceux de Kaluza et Klein. Postulant l'existence d'une cinquième dimension, ils ont découvert que, contrairement aux attentes naïves, cette hypothèse peut être rendue compatible avec les lois de la physique telles que nous les connaissons. En considérant uniquement la gravité, a priori seule capable de traiter la géométrie de l'espace-temps, ils ont récupéré la relativité générale dans l'espace-temps habituel à quatre dimensions, ainsi qu'un champ vectoriel que l'on peut tenter d'identifier avec le potentiel vectoriel de l'électromagnétisme et un champ vectoriel. champ scalaire, qui serait responsable d'une nouvelle interaction.

#### 13.1.1 Relativité générale en dimensions $D$

La théorie de la relativité générale n'est pas spécifique aux espaces-temps à quatre dimensions, et rien de présenté dans le chapitre 1 ne dépend explicitement de la dimension. Nous pouvons étendre toute la théorie aux dimensions  $D$  sans coût supplémentaire, bien que nous limitons notre attention aux dimensions extra-spatiales : l'introduction de nouvelles dimensions temporelles est théoriquement possible, mais conduit rapidement à des paradoxes jumeaux et à l'existence de courbes fermées de type temps, donc

nous n'envisagerons pas davantage cette possibilité. Nous allons maintenant considérer un Univers vide de dimension arbitraire, de sorte que le membre droit des équations d'Einstein disparaît. La théorie est ainsi décrite par l'action d'Einstein-Hilbert en dimensions  $D$

où  $g_{AB}$  est la métrique en dimensions  $D$ , avec signature  $(-, +, \dots, +)$ ;  $R$  est le scalaire de Ricci associé à cette métrique et  $K_D$  est la généralisation  $D$ -dimensionnelle de  $K = 8\pi G_N$ , à savoir

$$(D-2)\Omega^{[D-2]}G_D \quad \text{with} \quad \Omega^{[D-1]} = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)}, \quad (13.2)$$

<sup>1</sup> being the surface of a  $(D-1)$ -dimensional sphere. In agreement with the rest of the book, we denote the real Newton constant in 4 dimensions by its usual symbol, to wit we set  $G_{ri} = GN$ .

The field equations of this theory are those derived in chapter 1 for the vacuum, simply generalised to dimensions  $D$ , to wit

$$G_{AB} = 0 \quad (13.3)$$

with indices  $A, B = 0, \dots, D-1$  and  $G_{AB}$  the Einstein tensor constructed from the bidimensional metric  $g_{AB}$ .

#### 13.1.1.1 4 + 1 decomposition

We now limit ourselves to the specific case  $D = 5$ ,

$$\bar{S} = \frac{1}{12\Lambda G}; \quad (13-4)$$

where we denote by a bar quantities in 5 dimensions to distinguish them from analogous quantities without a bar in 4 dimensions. The objective is to determine the independent components of the metric, which are 15 in five dimensions.

Just as we perform a S-VT decomposition of cosmological perturbations in scalar, vector and tensor modes, we can proceed here to a decomposition into a symmetric tensorial part  $g^{\wedge}$ , which will essentially reduce to the quadridimensional metric, 10 independent components, a vectorial part  $A_a$ , with four components that we wish to identify as the electromagnetic field, and finally a scalar part,  $\langle \epsilon \rangle$ , to complete the determination of the number of degrees of freedom ( $15 = 10 + 4 + 1$ ). The total metric is thus written in the form where the different components depend a priori on the usual spatio-temporal coordinates  $x^a$  and the extra dimension  $y$ .

$$g_{\mu\nu} + \frac{1}{M^2} \phi^2 A_\mu A_\nu - \frac{1}{M} \phi^2 A_\mu \quad (13.5)$$

$$\frac{1}{M} \phi$$

in the extra dimension  $y$ . The constant  $M$  has dimensions of mass, so that  $A_a$  also has dimensions of mass, so that the scalar field  $\phi$  is dimensionless. Finally, the Latin indices vary in the space-time set of 5 dimensions,  $A, B = 0, \dots, 4$ , the Greek indices cover the space-time of 4 dimensions,  $\alpha, \beta = 0, \dots, 3$ .

savoir  $/r, i' = 0, \blacksquare \blacksquare \blacksquare, 3$ .

### 13.1.1.2 Conditions des cylindres

Un point crucial de la théorie de Kaluza est ce qu'on appelle la condition du cylindre. Cette condition, dont Klein comprit plus tard le sens, définit la compactification sur un cercle. Elle peut être formulée ainsi : on suppose que rien ne peut dépendre de la cinquième dimension, autrement dit que la coordonnée  $y$  peut être ignorée, c'est-à-dire  $d_y = 0$  quelle que soit la quantité sur laquelle elle agit. Il s'agit d'une condition très forte, qui sera justifiée dans la suite, une fois la cinquième dimension compactifiée.<sup>1</sup> Cela implique simplement que l'échelle de compactification, c'est-à-dire le rayon de la cinquième dimension, est très petite par rapport à toutes les autres longueurs caractéristiques. Cela implique que pour être sensible aux variations dans la cinquième dimension, nous devons avoir affaire à des énergies très élevées.

### 13.1.2 Équations projetées en quatre dimensions

Le déterminant de la métrique (13.5) donne la métrique inverse

$$g^{AB}$$

De plus, en utilisant la condition du cylindre et la définition (1.35) des symboles de Christoffel, on trouve

$$\Gamma^4_{44} =$$

$$\Gamma^4_{44} =$$

$$\Gamma^4_{44}$$

$$\Gamma^4_{44}$$

$$\Gamma^4_{44} =$$

<sup>x</sup> Le sous-espace formé par certaines dimensions peut être compact, au sens topologique. Dans ce cas, les dimensions en question sont dites elles-mêmes compactes.

où nous définissons  $F^{\wedge} = -d_v A_{IL}$ .

Passons à autre chose et considérons le tenseur de Ricci

$$R^{\wedge}_{AB} = \frac{1}{2} (F^{\wedge}_{AB} - F^{\wedge}_{BA}) = \frac{1}{2} (F^{\wedge}_{AB} - F^{\wedge}_{BA})$$



qui varie en vertu des équations d'Einstein (13.3). Compte tenu de la définition du  $D \llcorner p$  d'Alembertien, la composante

(13.6)

conduit à l'équation du mouvement

(13-7)

Il s'agit d'une équation de Klein-Gordon pour un champ scalaire sans masse 0 couplé à un champ électromagnétique. La composante mixte,  $R^\wedge$ , en revanche, peut s'écrire

(13.8)

ce qui implique, compte tenu de (13.7),

(13.9)

Cette équation se réduit aux équations de Maxwell dans le vide à condition que le champ scalaire soit constant. Finalement, la partie purement en 4 dimensions s'écrit

$$R_{pv} - R_{pv} \sim \frac{1}{2} p^\wedge v^4 \sim \frac{1}{2} u F + j V f \quad \text{"H"} \quad \blacksquare \quad (13.10)$$

où les deux dernières tenures s'annulent dès que (13.7) et (13.9) sont satisfaites. Les équations d'Einstein (13.3) peuvent être utilisées pour réécrire (13.10) sous la forme

En utilisant (13.7) pour exprimer une partie des terni dans  $\square \llcorner \rangle$  dans  $R$ , nous obtenons les équations d'Einstein quadridimensionnelles modifiées

(13.11)

où  $T^{\wedge ec} \wedge = F^a F_{va} - \wedge F_a (j F^{al3})$  est le tenseur énergie-impulsion du champ électromagnétique [voir (1.84)].

Toutes ces équations peuvent également être obtenues à partir de la variation de l'action (13.4), qui peut désormais être réécrite sous la forme d'une intégrale intégrale à quatre dimensions.

$$S = \frac{1}{16\pi G_N} \int d^4x \sqrt{-g} \phi \left( R - \frac{\phi^2}{4M^2} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right), \quad (13.12)$$

where we have set

$$37\pi G_5$$

W ?

et factorisé le volume fini de la cinquième dimension,  $V_5 = \int d^5x$ . Dans ce cadre, la constante de Newton trouve donc une signification géométrique. Nous verrons plus loin que cette relation a été proposée pour fournir un cadre expliquant la problématique de hiérarchie, c'est pourquoi l'échelle de gravité est tellement plus élevée que toutes les autres échelles d'énergie de la physique des particules. On voit par ailleurs que l'action (13.12) ne comporte aucun terme impliquant  $\phi$  seul, du fait que le terme correspondant dans  $R$  est

qui, en tenant compte du déterminant de la métrique, devient proportionnel à  $\phi^4$ . Il s'agit donc d'une dérivée totale qui ne contribue pas à la dynamique.

### 13.1.3 Dilaton et Einstein – théorie de Maxwell

De nombreuses conséquences génériques de la théorie des cordes peuvent être tirées des équations précédentes. Premièrement, si le champ électromagnétique  $A_\mu$  est fixé à zéro, ce qui est une solution des équations de champ, alors on retrouve une théorie du tenseur scalaire du type (10.1) sans potentiel dans la paramétrisation de Brans-Dicke (10.2), à condition de poser  $\phi \sim p^{-1}$  et  $\partial_\mu \phi = 0$ . Il suffit alors de coupler minimalement cette action à la matière pour retrouver exactement tous les résultats de la section 10.1 du chapitre 10. Dans le cadre de la théorie des cordes, on écrit le champ scalaire  $\phi$  sous la forme

$$(13.13)$$

Le nouveau champ scalaire  $\phi$  a la bonne dimension de masse et est appelé *dilaton*. Dans ce contexte, le cadre de Jordan est appelé le cadre de cordes.

La configuration pour laquelle  $\phi$  est constant n'est pas une solution des équations de champ. Il n'est donc pas possible de récupérer la théorie d'Einstein-Maxwell décrivant la gravité et l'électromagnétisme de manière unifiée, malgré l'espoir initial d'Einstein et Kaluza. Cela dit, si nous exigeons cela en premier. Le terme du membre droit de (13.11) est exactement le même que celui de la relativité générale, on trouve qu'il faut définir une constante gravitationnelle effective  $G_{\text{eff}}$ , qui dépendra notamment du temps dans un cadre cosmologique, où  $\phi$  est une fonction du temps

$$G_{\text{eff}} = \frac{1}{16\pi G_N \phi^2}$$

Il est intéressant de noter que cette constante est indépendante de la constante gravitationnelle à cinq dimensions  $G_5$ . Notez que, comme expliqué en détail au chapitre 10 [(10.18) et (10.19)], ce

La constante n'est pas celle que l'on mesurerait dans une expérience de type Cavendish : pour une telle mesure, il faudrait considérer la matière réelle, que nous n'avons pas encore incluse. La définition des champs électrique et magnétique, respectivement  $E$  et  $B$ , associés au potentiel vectoriel  $A^\wedge$ , (13.7) peut être réécrite sous la forme où une dépendance devrait apparaître dans le membre de droite de la masse de Planck ; nous l'avons ici simplement remplacé par la valeur numérique actuellement mesurée pour cette masse, c'est-à-dire que nous avons posé  $G_{\text{eff}} = M_{\text{eff}}^{-2}$  et rapporté cette valeur pour  $\langle f \rangle$ , à savoir  $\langle f \rangle \sim AM_{\text{eff}}/M_{\text{P}}$ , dans (13.7). On constate alors que pour la plupart des situations habituelles pour lesquelles les champs électriques et magnétiques ont une très faible amplitude par rapport à la masse de Planck actuellement mesurée, le terme de droite est très petit, et d'autant plus que l'échelle de masse de la cinquième dimension est petite par rapport à la masse de Planck. Par conséquent, traiter  $\langle f \rangle$  comme constante peut être une bonne approximation, et on retrouve la théorie d'Einstein-Maxwell. Notez cependant qu'un tel dilaton impliquera une variation de la constante de structure fine et est généralement exclu par les tests du principe d'équivalence [5] (voir la section 12.3 du chapitre 12).

$$\square\phi \sim 16\pi^{3/2} \left( \frac{M}{M_{\text{P}}} \right) \frac{E^2 - B^2}{M_{\text{P}}^2}, \quad (13.14)$$

### 13.1.4 Cadre Einstein

Il y a une subtilité [6] concernant l'action (13.12) qui vient du fait qu'elle ne semble pas contenir de terme cinétique explicite pour le champ scalaire  $\phi$ , bien qu'elle soit parfois écrite, en raccourci, dans des articles de synthèse sur ce sujet [7]. Cependant, comme  $\phi$  est soumis à (13.7), il s'agit bien d'une variable dynamique. Cet apparent paradoxe se résout facilement en constatant que la dynamique est en fait présente, comme expliqué au chapitre 10. Encore une fois, pour voir cela, regardons la variation par rapport à (13.12). Cela donne une relation entre  $R$ ,  $\langle p \rangle$  et  $F_a p F^a$ , alors que celle par rapport à la métrique donne en fonction de  $\langle j \rangle$ . En prenant la trace de cette dernière équation et en appliquant la contrainte entre  $\phi$  et  $R$ , on retrouve précisément (13.7).

Ce point devient immédiatement transparent dès lors qu'on diagonalise les degrés de liberté en passant au référentiel d'Einstein. En dimensions  $D$ , sous la transformation 'conforme'  $g^*_{AB} = \Omega^2 g_{AB}$ , nous avons  $\zeta \sim \Omega^D y/g$ , et (10.76) indique que le terme de courbure est modifié selon  $= \zeta l^{D-2} y/\Omega^2 R + \dots$

■ En compactant à  $D - 1$  dimensions avec  $(D - 1) + 1$  décomposition similaire à (13.5) pour  $g_{AB}$ , on a que  $y/g^* = \langle t \rangle y/g$ . Par conséquent, l'action pure d'Einstein-Hilbert pour les variables « étoilées » a un terme géométrique qui est  $y/g \langle p \rangle \zeta t^{D-2} R y/g \langle \phi \rangle r^{D-2} R$ , d'où découle la dernière étape (13.10).

En se limitant maintenant à nouveau à  $D = 4$  et en exigeant que la relativité générale soit valable dans ces 4 dimensions, nous voyons que nous devons définir  $G = \wedge^{-1} \wedge^{-2} \sim D \wedge^{-1} = \zeta!^{-1/2}$ . En regroupant les expressions précédentes, on trouve alors

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{12\pi^2 \bar{G}_5} \int d^5 x \sqrt{-\bar{g}}^* \bar{R}^* \\
&= \frac{1}{16\pi G_N} \int d^4 x \sqrt{-g} \left( R - \frac{\phi^2}{4M^2} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - \frac{3}{2} g^{\mu\nu} \frac{\nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi}{\phi^2} \right), \\
&= \int d^4 x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{16\pi G_N} \left[ R - \frac{\phi^2(\varphi)}{4M^2} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right] - \frac{1}{2} \nabla_\mu \varphi \nabla^\mu \varphi \right\}, \quad (13.15)
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé la définition (13.13) pour  $ip$ . Il est alors évident que le champ se comporte comme un champ scalaire canonique.

### 13.1.5 Compactification

La modification fondamentale apportée par Klein à ce qui précède a été de comprendre que la condition du cylindre était justifiée tant que l'on considérait la cinquième dimension comme topologiquement compacte avec la topologie d'un cercle. Dans ce cas, tous les champs définis dans cet espace, c'est-à-dire la métrique quadridimensionnelle  $g^\wedge$ , le potentiel vectoriel  $A_\alpha$  et le dilaton  $\phi$ , ainsi que tous les champs de matière supplémentaires que la théorie devrait décrire, sont des fonctions périodiques de la dimension supplémentaire et peut donc être étendu aux modes de Fourier. Le rayon  $R$  de cette dimension s'avère alors être naturellement  $R \sim \ell_P$ , et on comprend pourquoi on ne voit pas de variations dans le cercle : pour un  $M$  assez grand, son rayon est trop petit pour être observable. Pour être sensible à la cinquième dimension, les énergies mises en jeu doivent être comparables à  $M$ , afin que tous les effets soient inobservables si le rayon est suffisamment petit.

Illustrons cela par l'exemple d'un véritable champ scalaire sans masse  $\varphi$  en cinq dimensions. Son action dans le cerveau d'Einstein est simplement

$$S = \int d^5 x \sqrt{-g} \left( -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi \right), \quad (13.16)$$

et on élargit ce champ en séries de Fourier, en désignant toujours par  $y$  la coordonnée dans la cinquième dimension. Nous écrivons ainsi

$$S(\varphi(x, y)) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int d^4 x \sqrt{-g} \left( -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi \right), \quad \text{avec } \varphi(x, y) = \sum_n a_n e^{in y}, \quad (13.17)$$

puis développer (13.16) en supposant explicitement que  $\partial_y \langle j \rangle = 0 = dy A^\wedge$ , c'est-à-dire que nous ne nous intéressons qu'aux modes zéro de  $\langle j \rangle$  et  $A^\wedge$ . En utilisant l'équation unidimensionnelle (B.57) pour intégrer selon  $y$ , c'est à dire en utilisant  $\int_{-\infty}^{+\infty} dy \delta(y - y') = \delta(y - y')$ , on trouve alors

$$S = \int d^4 x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - \frac{n^2 M^2}{2\phi^2} |\varphi|^2 \right\}. \quad (13.18)$$

Il ne reste plus qu'à changer la normalisation des champs scalaires par  $\varphi_n = y/M \hat{\varphi}_n$  pour obtenir l'action pour un champ canonique réel sans masse  $\hat{\varphi}_0$  et une infinité de champs canoniques complexes  $\varphi_n$  de masses  $m_n = nM$ , qui dépendent explicitement de la valeur du dilaton à la position et à l'instant pour lesquels on les évalue.

En considérant maintenant le terme 'électromagnétique' dans l'action (13.15), nous voyons que le dilaton peut être absorbé dans une nouvelle normalisation du champ de jauge en fixant  $A_{\text{lec}} = \langle t \rangle A_p$ , d'où l'on récupère exactement le terme de Maxwell et les corrections de couplage entre le dilaton et le champ électromagnétique. Du point de vue des champs scalaires de (13.18), cela conduit à des termes cinétiques de la forme  $\langle g_M - i n A^e \wedge e^c / \langle \rangle \rangle a_n$ , autrement dit des champs chargés de charges  $e_n = n / \langle j \rangle$ . Il est intéressant de noter que non seulement ces charges sont automatiquement quantifiées, mais là encore elles dépendent de la valeur du dilaton. En conséquence, en supposant que le premier mode de Kaluza-Klein a une charge unitaire, le couplage électromagnétique constante est et on obtient la bonne valeur  $\alpha_j$ ,  $\sim 137$ , à condition que la valeur du dilaton soit d'ordre  $\langle j \rangle \sim 10^{-2} M_p$ , compatible avec l'échelle des cordes. Si le dilaton a une dynamique cette relation pourrait induire une variation de la constante de structure fine, qui est fortement contrainte (Section 12.3 du Chapitre 12).

$$\alpha_{EM} = \frac{e_1^2}{4\pi} = \frac{1}{4\pi} \exp \left( -\frac{4\pi}{\sqrt{3}M_p} \varphi \right), \quad (13.19)$$

## 13.2 Quelques mots sur la théorie des cordes

La théorie des cordes repose sur le principe que les objets fondamentaux ne sont plus des particules ponctuelles mais des objets unidimensionnels, des cordes, avec une longueur caractéristique très petite par rapport aux échelles caractéristiques impliquées dans les expériences réalisées jusqu'à présent (et une épaisseur disparaissante). En bonne approximation, ils apparaissent donc ponctuellement dans toutes ces expériences. On peut trouver de nombreux excellents ouvrages de référence [8] sur ce sujet à la mode, ainsi que de nombreux sites Web régulièrement mis à jour [9], c'est pourquoi nous fournirons ci-dessous simplement un résumé des caractéristiques les plus importantes pour la cosmologie.

### 13.2.1 Des particules aux cordes

#### 13.2.1.1 Action classique

La ligne d'univers d'une particule est donnée par le principe de moindre action, selon lequel l'action doit être minimisée, à savoir, dans l'espace-temps de Minkowski,

$$\text{Donc } S = -m \int dr^\mu r_\mu = -m \int \sqrt{1 - v^2} dt,$$

où  $T$  est le temps propre de la particule,  $m$  sa masse et  $v = dx/dt$ . Cette action peut être généralisée au cas où l'objet fondamental n'est pas une particule ponctuelle, de dimension spatiale nulle, mais une « surface » de dimension spatiale  $p$ , que nous appelons une  $p$ -brane. Si  $T_p$  est la tension uniforme de cette  $p$ -brane, l'action ci-dessus est généralisée en

$$S_p \sim T_p \int \sqrt{-\det g} \quad (13.20)$$

où  $a = 1, \dots, p+1$  sont des coordonnées le long de la  $p$ -brane, et le déterminant est celui de la matrice  $(p+1) \times (p+1)$  dont les lignes et les colonnes sont étiquetées par  $a$  et  $b$ .

Dans le cas où  $p = 0$ , on identifie la tension sur la masse de la particule,  $T_0 = m$ , et on récupère l'action d'une particule ponctuelle. Considérons maintenant, pour être précis, le cas particulier d'une corde, autrement dit d'une 1-brane, de tension  $T_1 = T$ . L'équation (13.20) se réécrit sous la forme

$$S = -T \int d\tau \int d\sigma \sqrt{-\det g_{\alpha\beta}} \quad (13.21)$$

où  $\tau$  et  $\sigma$  forment un ensemble de coordonnées, respectivement temporelles et spatiales, le long de la chaîne. L'action (13.21), qui est l'action Nambu-Goto, s'écrit plus facilement sous la forme

$$S = -T \int d\tau \int d\sigma \sqrt{-\det g_{\alpha\beta}} \quad (13.22)$$

où  $g_{\alpha\beta}$  est la métrique induite sur la feuille du monde de chaînes (voir la section 8.4.5 du chapitre 8).

Une autre façon d'envisager la dynamique d'une corde est de considérer les éléments métriques bidimensionnels le long de la corde comme des variables indépendantes, qui seront déterminées plus tard comme solutions des équations de mouvement. Dans ce cas, initialement on n'a plus la définition de (13.22), et l'action se réduit à l'action de Polyakov

$$S = -\frac{T}{2} \int d\tau \int d\sigma g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \quad (13.23)$$

On dispose alors, en plus des équations initiales du mouvement, d'une contrainte qui permet de fixer la métrique des cordes. Cette contrainte s'obtient en faisant varier l'action (13.23) par rapport à  $h_{ab}$ , et on trouve

$$T_{ab} = 0. \quad (13.24)$$

On écrit souvent la tension des cordes  $T$  sous la forme

$$T = \frac{1}{2\pi\ell_s^2} = \frac{1}{2\pi\alpha'}, \quad (13.25)$$

où  $\alpha'$  est appelée la pente universelle de Regge, et  $\ell_s$  la longueur caractéristique des cordes fondamentales.

### 13.2.1.2 Symétries et dimensions

Les actions décrivant les trajectoires des cordes sont invariantes par paramétrage, c'est à dire en variante sous transformations de coordonnées générales sur la feuille de mots, tout comme en relativité générale. Autrement dit, remplacer le système de coordonnées  $\{x^\mu\}$  par un autre,  $\{y^\mu\}$ , fonctions arbitraires de  $x^\mu$ , on retrouvera la même action, exprimée en fonction de  $y^\mu$ . Pour

une chaîne,  $h_{ab}$  n'a que trois composantes indépendantes, de sorte qu'on peut fixer

deux d'entre eux et expriment finalement tout en termes d'un degré unique de liberté. Un paramétrage pratique est celui pour lequel nous choisissons la jauge conformément fiat

$$h_{ab} = e'^{\alpha} \eta_{\alpha\beta} e'^{\beta}, \quad (13.26)$$

où  $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1)$  est la métrique de Minkowski bidimensionnelle.

De plus, sous la forme de Polyakov, l'action a une invariance complémentaire dite conforme : (13.23) est inchangée si l'on remplace les éléments de la métrique de chaîne  $h_{ab}$  par  $f(a, r)h_{ab}$ , c'est à dire si l'on effectue une transformation conforme de la métrique bidimensionnelle, tout en gardant les coordonnées de chaîne  $x^{\alpha} - \tau$  fixes. Cette symétrie n'est présente que pour le cas d'une corde et on s'attend donc dans ce cas à ce que la fonction  $\langle p \rangle$  de (13.26) ne soit plus physiquement pertinente. Classiquement, c'est le cas puisque si l'on évalue l'action de Polyakov dans une jauge conformément fiat, on trouve simplement

$$S_P = \frac{T}{2} \int d^2\xi \eta^{\alpha\beta} \eta_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\sigma},$$

qui décrit la dynamique des champs scalaires  $D$  ( $p = 0, \dots, D-1$ ) lorsque l'espace dans lequel évoluent les cordes est  $D$ -dimensionnel.

Jusqu'à présent, la généralisation des particules ponctuelles au cas des cordes est presque triviale. La situation change dès que les effets quantiques sont pris en compte. En écrivant les générateurs du groupe de Lorentz en dimensions  $D$ , on trouve que les relations de commutation entre ces générateurs produisent une *anomalie quantique*, de sorte que l'invariance de Lorentz ne peut être respectée. Cette anomalie existe pour n'importe quelle dimension de l'espace-temps, mais disparaît à l'identique si  $D = 26$ . La théorie basée sur ces soi-disant « cordes bosoniques » semble donc n'être physiquement cohérente qu'en 26 dimensions.

### 13.2.2 Supercordes

La théorie des cordes prédit que l'espace-temps devrait avoir 26 dimensions. C'est la première fois que le nombre de dimensions n'est pas fixé arbitrairement mais est imposé par l'exigence de cohérence mathématique de la théorie. De ce point de vue, c'est une réussite de la théorie des cordes. Malheureusement, ce n'est qu'une réussite partielle puisque la valeur  $D = 26$  ne correspond pas à la valeur observée  $D = 4$ . De plus, on constate qu'une telle théorie est instable puisque certains modes d'excitation des cordes ont une masse carrée négative : ils sont tachyons.

Une façon de résoudre ce problème de stabilité est de modifier la théorie précédente pour inclure les fermions, et pas seulement décrire les états bosoniques ( $\psi^{\mu}$ ). Pour ce faire, et pour que la théorie ait un sens, il s'avère qu'il faut aussi imposer une supersymétrie entre fermions et bosons. Cela vient du fait que les énergies du point zéro des bosons et des fermions sont exactement égales jusqu'à leurs signes, de sorte que leur somme s'annule de manière identique (chapitre 10), et le mode tachyonique disparaît du spectre d'excitation de la théorie. Son action effective bidimensionnelle est donnée par la version supersymétrique de l'action de Polyakov, contenant donc des champs bosoniques  $D$  et autant de champs fermioniques, à savoir

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\xi \eta_{\mu\nu} \left( \eta^{ab} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \xi^a} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \xi^b} + i \bar{\psi}^{\mu} \gamma^a \frac{\partial}{\partial \xi^a} \psi^{\nu} \right), \quad (13.27)$$

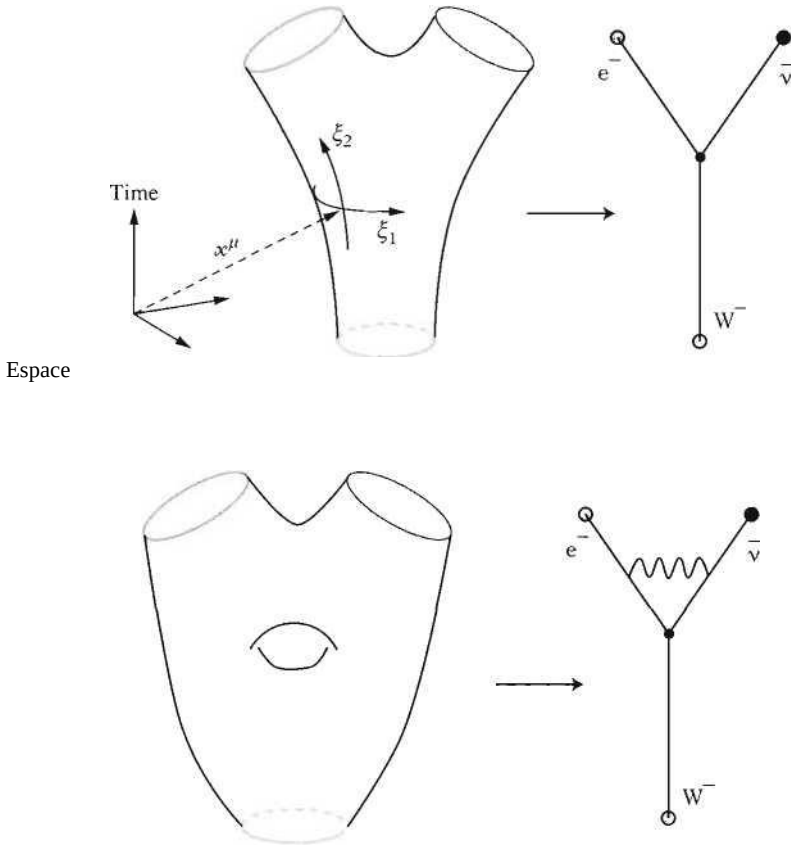


**Fig. 13.1** Les feuilles du monde des cordes peuvent être comprises comme des agrandissements des lignes du monde des particules ponctuelles, les boucles dans les interactions apparaissent alors comme des trous dans la topologie de la surface décrite par les trajectoires des cordes. C'est ainsi que la physique des particules ordinaire est considérée comme une approximation à faible énergie de la théorie des cordes. Nous voyons également comment l'un des problèmes de la théorie des champs, à savoir l'existence de points d'interaction (sommets) dans les interactions de particules ponctuelles qui produisent des difficultés techniques (divergences à renormaliser), n'est pas présent dans une description de chaîne.

où les degrés de liberté sont fermioniques, et les matrices  $\gamma^a$  sont des matrices  $2 \times 2$  satisfaisant  $\{\gamma^a, \gamma^b\} = -2\eta^{ab}$ .

La théorie résultante est maintenant appelée théorie *des supercordes*, dont elle se révèle physiquement cohérente uniquement dans  $D = 10$  dimensions (par le même signe d'anomalie de Lorentz). C'est un peu mieux, mais nous comprenons que cela nécessite tout de même six dimensions supplémentaires compactes. Les effets Kaluza-Klein décrits précédemment sont alors attendus comme une conséquence générique des théories des supercordes.

### 13.2.2.1 La gravité quantique

Une conséquence générique des théories des cordes et des supercordes est liée à l'existence d'un

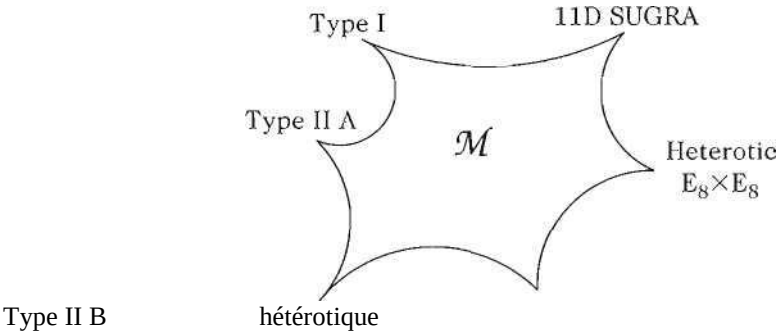


état spécifique dans l'ensemble des excitations possibles de la corde. On constate que dans toutes ces théories, il existe un degré de liberté de spin 2 sans masse que l'on identifie naturellement au graviton, ainsi qu'un scalaire. En d'autres termes, les théories des cordes incluent toutes une théorie scalartensorielle de la gravitation, qui est en outre cohérente au niveau quantique. Ceci explique pourquoi ces théories sont considérées comme de bons candidats pour la gravité quantique. C'est en effet, à ce jour, le seul moyen de calculer sans aucune divergence l'interaction de diffusion entre deux gravitons, un processus qui appartient encore au domaine largement méconnu de la gravité quantique. Ce calcul est rendu possible par le fait que l'interaction est réalisée par l'échange de cordes, ce qui, comme le montre la Fig. 13.1, conduit a priori à moins de divergences à renormaliser que les interactions point-particule.

### 13.2.2.2 Cinq (plus une) théories possibles

Les chaînes peuvent exister sous différentes formes possibles, ce qui conduit à différentes théories possibles. En fait, seuls cinq d'entre eux sont cohérents, auxquels il faut ajouter, pour des raisons techniques, la supergravité en 11 dimensions (ce n'est que dans ce cas que la supergravité peut être rendue cohérente au niveau quantique). On obtient ainsi un total de six théories.

Il a été montré qu'il existe des relations entre ces théories possibles des cordes, et que par conséquent elles ne sont pas indépendantes. On a alors supposé qu'elles pourraient provenir d'une seule théorie, appelée théorie A4 : on s'attend à ce que les cinq théories des cordes à 10 dimensions ainsi que la supergravité à 11 dimensions ne soient que des limites différentes, dans des régimes différents, de cette hypothétique A4. -théorie. Nous résumons habituellement cet ensemble de théories avec le diagramme en forme d'étoile de la figure 13.2.



AINSI(32)

**Fig. 13.2 La théorie A4 est supposée être la théorie « ultime » des interactions fondamentales, à partir de laquelle** sont dérivées les 5 théories des cordes mathématiquement cohérentes, en 10 dimensions, ainsi que la supergravité en 11 dimensions. Il existe en effet suffisamment de relations de dualité entre ces différentes théories pour soutenir qu'elles devraient être unifiées en une théorie unique, dont elles occuperaient des limites différentes dans l'espace des paramètres.

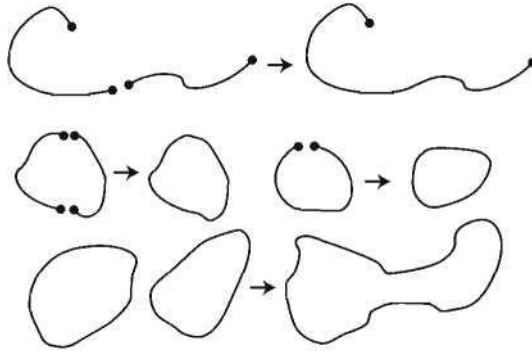


**Fig. 13.3** Interactions de chaînes ouvertes et fermées. Nous voyons que les chaînes ouvertes peuvent produire des boucles, alors que les chaînes fermées restent fermées.

### 13.2.3 Cordes ouvertes et fermées

Les ficelles peuvent être de deux types, soit ouvertes, avec des extrémités libres, soit fermées sous forme de boucles. Les interactions entre les extrémités d'une chaîne ouverte sont telles que lorsque deux extrémités se rencontrent, elles se rejoignent pour former une chaîne plus longue. On voit alors que dans certains cas, illustrés sur la figure 13.3, les cordes ouvertes peuvent former des cordes fermées, de sorte qu'une théorie des cordes ouvertes doit également être capable de décrire des cordes fermées, alors qu'une théorie des cordes contenant uniquement des cordes fermées peut être cohérente par elle-même. Il a été constaté qu'il n'existe qu'une seule théorie possible de cordes supersymétriques ouvertes, appelée type I, et deux théories de cordes fermées, appelées types IIA et IIB. De plus, il existe deux théories des cordes fermées dans lesquelles des états supersymétriques et non supersymétriques sont présents ; celles-ci ont été appelées cordes « hétérotiques ». En d'autres termes, parmi les cinq théories des cordes mathématiquement cohérentes, une seule contient des cordes ouvertes, tandis que les quatre autres décrivent exclusivement des boucles.

#### 13.2.3.1 Tapez I

Les excitations de plus basse énergie des théories des cordes peuvent être décrites par une théorie des champs avec un spectre de particules fixe, en a. espace-temps à dix dimensions. Pour les cordes ouvertes de la théorie de type I, on obtient d'abord le graviton, ainsi qu'un ensemble de champs de jauge dont on peut montrer qu'ils forment une représentation de la symétrie  $SO(32)$ , ainsi que des fermions, se transformant de manière non triviale avec par rapport aux transformations de  $SO(32)$ . Ces fermions ont une chiralité définie, de sorte que la théorie de type I ne conserve pas la parité, comme elle le devrait pour reproduire les propriétés du modèle standard électrofaible. Toutes ces particules sont sans masse, ce qui peut être interprété comme un effet de très haute énergie, sachant qu'aux basses énergies, tout comme pour les théories à rupture spontanée de symétrie, on s'attend à retrouver des masses non évanouissantes.

On peut se poser la question des conditions aux limites pour les extrémités des cordes. En exigeant que l'invariance de Lorentz soit respectée dans les dimensions  $D$ , ces conditions aux limites devraient alors être compatibles avec le fait que ces extrémités de cordes peuvent être n'importe où, puisque la restriction à certains endroits produirait des régions préférées. Les conditions qui respectent l'invariance de Lorentz sont appelées conditions de Neumann, suivant la nomenclature standard des équations différentielles. Lorsque les extrémités des chaînes

sont fixées dans certaines régions spécifiques, nous appliquons alors les conditions aux limites dites de Dirichlet. Malgré la rupture de l'invariance de Lorentz, ces conditions sont tout à fait raisonnables dès lors que l'on considère les états des particules, puisque seul le vide est censé respecter cette invariance.

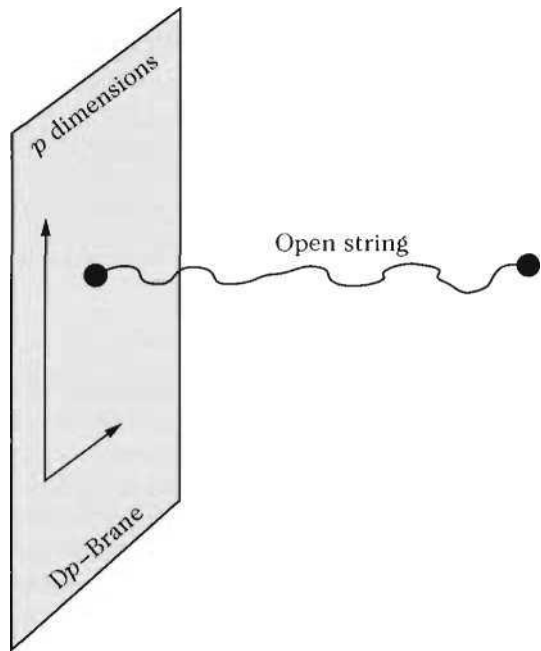


**Fig. 13.4** Dp-brane formée par l'ensemble des points des extrémités d'une corde ouverte avec des coordonnées  $\theta - p$  satisfaisant les conditions aux limites de Dirichlet.

Les équations de mouvement obtenues en faisant varier l'action (13.22) sont simplement

$$= p, \tag{13.28}$$

et la contrainte (13.24) devient alors

$$xx' = Q, x^2 + x'^2 = 0 \qquad \implies (i \pm x')^2 = 0. \tag{13.29}$$

Pour une chaîne avec un paramètre de type espace  $\sigma$  variant par convention entre 0 et  $2\pi$ , les conditions de Neumann et Dirichlet deviennent

$$\text{Condition de Neumann : } \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} = 0 \text{ pour } \sigma = 0, 2\pi. \tag{13h30}$$

et

$$\text{Condition de Dirichlet : } \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} = 0 \text{ pour } \sigma = 0, 2\pi. \tag{13.31}$$

On voit que cette dernière condition peut être intégrée, définissant l'emplacement précis de l'espace où se situe l'extrémité.

On peut, par exemple, imposer que l'extrémité de la corde soit fixée en un point de l'espace



bosoniques, disons les bons moteurs pour fixer les idées, et c'est ce qui réalise la corde hétérotique, soulevant immédiatement une difficulté technique. Nous avons vu que la corde bosonique n'était cohérente qu'en 26 dimensions, alors qu'une corde supersymétrique n'a de sens qu'en 10 dimensions, il n'est donc pas évident de connaître la dimension nécessaire de l'espace pour la corde hétérotique, qui est un mélange de les deux, pour être mathématiquement cohérents. La solution est de prendre la théorie bosonique, donc en 26 dimensions, et d'en compactifier 16 à la Kaluza-Klein. La théorie qui en résulte est alors supersymétrique en 10 dimensions, les modes gauche trouvant leur origine dans les 26 dimensions, introduisant des degrés de liberté supplémentaires : ce sont les bosons de jauge. Il n'existe que deux possibilités topologiques cohérentes pour compactifier les 16 dimensions supplémentaires conduisant à deux groupes de jauge différents :  $SO(32)$ , comme dans le cas des chaînes ouvertes de type I, ou  $E_8 \times E_8$ , qui sont tous deux de rang 16, c'est-à-dire le nombre de chaînes compactées. dimensions et disposent de 496 générateurs (voir tableau 2.2). Aucune de ces deux théories ne respecte la parité.

#### 13.2.3.4 *SUGRA en 11 dimensions*

Bien qu'il ne s'agisse pas à proprement parler d'une théorie des cordes, nous avons vu que la supergravité à 11 dimensions apparaît naturellement dans le cadre évoqué ci-dessus. Dans certains régimes, discutés plus loin (Section 13.3.1), une constante de couplage peut en fait dépendre de la distance entre deux espaces à 10 dimensions. Seule la gravité, parce qu'elle est supersymétrique, peut se propager à travers la onzième dimension, tandis que tous les autres champs sont limités à l'un des espaces à dix dimensions. Il est intéressant de noter que, par coïncidence, la supergravité n'a de sens qu'au niveau quantique en 11 dimensions. Cela donne une indication que la théorie  $A_{10}$  réelle devrait également être en 11 dimensions, les théories des cordes apparaissant alors en 10 dimensions simplement parce que la onzième dimension doit être si petite que l'approximation des cordes est valide.

#### 13.2.4 **Dualités**

Toutes ces théories, y compris la supergravité à 11 dimensions, s'avèrent être liées les unes aux autres par des relations de dualité, et c'est la raison pour laquelle on suppose, en premier lieu, l'existence d'une théorie plus générale les contenant toutes. La prise de conscience de ce fait est ce qu'on a appelé la « deuxième révolution des supercordes ».

La première dualité, appelée dualité « S », peut être décrite de la manière suivante. Deux théories des cordes,  $A$  et  $B$ , avec constantes de couplage  $g_A$  et  $g_B$ , sont dites  $S$ -duales si les prédictions de l'une d'elles évaluées dans un régime de couplage fort sont les mêmes que celles de l'autre théorie dans le régime de couplage faible. En d'autres termes, pour une grandeur physique  $P$  que l'on souhaite calculer, alors

où  $P_A$  et  $P_B$  sont les quantifications calculées respectivement dans les théories  $A$  et  $B$ . Il se trouve que la théorie de type I est liée à la théorie hétérotique  $SO(32)$  via cette dualité, et que le type IIB est auto-dual. Lorsque le couplage augmente, les deux autres théories, de type IIA et  $Es_xEs_x$  hétérotiques, se comportent comme si elles étaient effectivement en 11 dimensions. En exprimant la théorie des cordes en termes de champs de Kaluza-Klein, il s'avère que la constante de couplage des cordes est la valeur de la partie scalaire  $\phi$ . Par conséquent, d'après (13.13),

exiger la S-dualité équivaut à imposer un  $\rightarrow tp$  invariance [voir aussi (13.19)].

La seconde dualité, dite « T »-dualité, fait le lien entre la compactification des différentes théories. Si les théories  $A$  et  $B$  ont des dimensions compactes de taille caractéristique  $R_A$  et  $R_B$ , alors elles sont T-duales si leurs prédictions physiques sont les mêmes (les théories sont équivalentes) lorsque  $R_A$  et  $R_B$  sont liés par

$$R_{UNE} R_B =$$

Cette symétrie peut être illustrée via une compactification sur un cercle de rayon  $R$ . Une particule en mouvement autour de ce cercle voit son moment quantifié en multiples entiers de  $1/R$ , qui sont simplement les modes de Kaluza-Klein. De plus, une corde peut également s'enrouler autour du cercle un nombre entier de fois. Or, plus le cercle est grand, plus l'énergie du mode d'enroulement est grande. Nous voyons que l'échange de  $R$  et  $1/R$  et le remplacement des modes d'enroulement et d'impulsion conduisent à la même configuration. Nous trouvons de telles dualités en T entre les théories de type II et les théories des cordes hétérotiques.

On peut conclure que toutes les théories des cordes sont effectivement duales les unes par rapport aux autres, et également par rapport à la supergravité à 11 dimensions ; d'où la théorie A4.

### 13.2.5 Lagrangiens basse énergie

La plupart des prédictions pertinentes des théories des cordes pour la cosmologie ne peuvent être faites qu'à partir des effets gravitationnels de basse énergie pour décrire l'évolution globale de l'Univers, avec quelques corrections des cordes. En principe, un tel régime devrait permettre une description de la phase proche de la singularité primordiale. Aux basses énergies, on peut réduire la théorie complète, dans laquelle la gravité sort naturellement des modes de spin-2, à une théorie des champs dans une métrique de fond donnée et arbitraire.

#### 13.2.5.1 Corde bosonique

Considérons le cas des seuls états bosoniques, ou en d'autres termes travaillons dans le cas de la corde bosonique. Nous négligeons donc les fermions dans l'action bidimensionnelle (13.27), mais on ajoute le terme de couplage du type (13.33) pour le tenseur de Kalb-Ramond antisymétrique ainsi que le terme cinétique pour le graviton. L'action (13.23) se généralise à

$$S_B = - \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu X^\alpha \partial_\nu X^\alpha + \frac{1}{4} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu X^\alpha \partial_\nu X^\beta B_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \right] \quad (13.35)$$

où le dilaton  $\phi$  apparaît naturellement comme une fonction de couplage générale pour le terme dynamique de courbure, et la métrique de fond est désormais considérée comme un degré de liberté indépendant. Cette dernière hypothèse implique que les termes cinétiques des bosons sont désormais à considérer comme des couplages entre les différents degrés de liberté métriques. Ceci est similaire à ce qui arrive aux champs scalaires dans un fond courbe : dans les deux cas, ce couplage dérivatif permet d'annihiler une paire de bosons (champs scalaires ou champs  $W$ ) en un graviton  $g^{\mu\nu}$ .

L'action (13.35) est une action bidimensionnelle, pour laquelle nous avons besoin de l'invariance conforme de Weyl, nécessaire pour que la théorie soit cohérente à la fois au niveau classique et quantique. Cette invariance non triviale impose des contraintes qui se généralisent (13.24). Pour de petites valeurs des champs  $g_{\mu\nu}$ ,  $\phi$ ,  $B_{\mu\nu}$  (petit écart par rapport à la métrique de

Minkowski),  $B_{\mu\nu}$  et  $\langle j \rangle$ ), on peut étendre les contraintes à différents ordres d'approximation, pour obtenir les équations de champ du mouvement. Ces équations prennent la forme d'un développement en puissances de la constante  $\alpha$ . C'est l'origine du terme « terminologie de correction » que l'on retrouve souvent dans la littérature pour décrire la différence entre la théorie des cordes et la relativité générale, par exemple.

Les équations de contraintes que nous obtenons sont de trois ordres. Il y a d'abord ceux issus de la relativité générale couplée à un dilaton, c'est-à-dire ceux d'une théorie scalaire-tenseur. On obtient alors l'équation dynamique du champ de Kalb-Ramond, que l'on aurait obtenue en faisant varier le terme D-dimensionnel de (13.33). Enfin, nous avons une équation pour piloter la dynamique du dilaton. Ces équations peuvent également être obtenues à partir des variations d'une action effective de théorie des champs en dimensions  $D$ , à savoir

$$S_{\text{eff}} = 2\pi\alpha' \int d^D x \sqrt{-g} e^{-2\phi} \left( -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \dots \right) + O(\alpha'^2), \quad (13.36)$$

où nous avons négligé les corrections  $\alpha'^2$  et où est défini par (13.33) ; la constante  $\alpha'$  n'influence pas les équations du mouvement puisqu'elle peut toujours être modifiée par un rééchelonnement du dilaton et n'est donc qu'une normalisation.

Nous pouvons obtenir, et nous le faisons en général, des champs supplémentaires dans les différentes versions de la théorie, et ces champs peuvent jouer un rôle important en cosmologie. Cela dit, les trois termes présents dans l'action (13.36) apparaissent dans tous les modèles de cosmologie des cordes.

La configuration avec  $\phi = r/\alpha'$ ,  $B_{\mu\nu} = 0$ , et  $\langle f \rangle = \langle f \rangle_0$  est une solution des équations du mouvement, c'est à dire qu'elle est invariante sous transformations conformes. On voit d'après (13.35) que le champ scalaire  $\phi$  définit un couplage entre les cordes, tel qu'il apparaît devant le terme de géométrie : comme dans la théorie ordinaire des champs, c'est ce genre de terme qui permet aux cordes d'évoluer d'une manière non triviale, donc d'interagir. Il est habituel de définir la constante de couplage de chaîne comme

$$g_s = \langle t \rangle = \int dt \ln g_{tt} \text{ ou } tp.$$

En théorie des champs, cependant, la valeur de la constante de couplage est fixée une fois pour toutes : prendre une valeur différente pour cette constante mesurable revient à considérer une théorie physiquement différente. Dans le cas présent, on peut modifier la valeur de la constante de couplage de manière dynamique, tout en gardant la même théorie, puisque différentes valeurs sont possibles comme différentes solutions des équations de champ.

### 13.2.5.2 Compactification

Les théories envisagées jusqu'à présent ne peuvent toujours pas être utilisées en cosmologie dans leur état actuel car elles nécessitent un espace-temps à 10 dimensions (voire 11 pour la supergravité). Il y a donc 6 dimensions qui devraient ainsi être rendues « invisibles » par une compactification similaire à la théorie de Kaluza-Klein. En d'autres termes, nous écrirons, en général, que l'espace-temps total à 10 dimensions,  $X$ , peut être décomposé en  $X = M \times K$ , où  $M$  est l'espace-temps à quatre dimensions habituel, supposé non compact, et  $K$  est d'une taille caractéristique trop petite pour être observable.

Un espace compact que nous utilisons doit avoir des propriétés spéciales, comme avoir un tenseur de Ricci nul. Ces espaces sont connus en géométrie algébrique sous le nom de variétés de Calabi-Yau.

Bien que toutes les théories des cordes soient équivalentes, la situation devient radicalement plus compliquée dès que l'on considère la compactification. Il existe de nombreux choix possibles pour ces espaces, et quelques critères discriminants. De plus, le choix d'un espace de Calabi-Yau conduit à des prédictions précises sur le contenu de la matière (spectre des particules et interactions possibles) et leur dynamique.

### 13.2.5.3 Modules

Les théories efficaces des supercordes contiennent de nombreux états d'excitation scalaires sans masse appelés « modules » car ils paramétrisent l'espace des vides inéquivalents. Cet espace est appelé espace des modules (certains auteurs comptent également les états fermioniques parmi les modules, et incluent ainsi, par exemple, le gravitino, ou les partenaires supersymétriques des modules). Ces états peuvent acquérir des masses à l'échelle d'énergie de rupture de symétrie, c'est-à-dire à l'échelle électrofaible. Leurs partenaires supersymétriques, ainsi que celui du dilaton (qui peut lui-même être classé dans la catégorie des modules), peuvent induire le même problème cosmologique que les gravitinos.

Ces modules sont intéressants en cosmologie car, comme la théorie des cordes en contient un grand nombre, quelle que soit la compactification choisie, ils offrent de nombreux candidats raisonnables au champ lumineux, par exemple pour l'inflation ou pour la baryogenèse.

Cependant, les modules sont en fait problématiques pour la cosmologie, ce qui est désormais connu sous le nom de problème de Polonyi. Si les modules sont produits dans l'Univers primordial, ils se comporteront comme de la matière et se désintégreront très tard, risquant ainsi de dominer l'Univers jusqu'à ce qu'il soit trop tard pour que la nucléosynthèse se produise dans le régime requis pour satisfaire les contraintes d'observation.

## 13.2.6 Origine de trois dimensions semblables à l'espace

Une application cosmologique de la théorie des cordes est donnée par le mécanisme de Brandenberger et Vafa [10], fournissant une explication possible de la raison pour laquelle notre Univers en expansion n'a que trois dimensions semblables à l'espace, alors que la théorie des cordes sous-jacente en a neuf. Ce mécanisme est à l'origine de ce que l'on appelle la cosmologie des gaz branes.

### 13.2.6.1 *T*-dualité

Lorsque l'on considère un ensemble de supercordes décrit comme un gaz, contrairement à ce qui se passe pour les particules ponctuelles, la physique est très différente si l'on considère des objets dans une boîte dont la taille caractéristique  $R$  est envoyée à l'infini, ou si le gaz est à l'origine dans un espace infini. Ces deux limites sont équivalentes pour les particules ponctuelles. Cela est dû au fait que les particules ne peuvent avoir que des interactions locales et que la structure globale de l'espace ne peut avoir aucune influence sur un tel gaz. Pour les chaînes, en revanche, la situation est différente puisqu'il s'agit d'objets étendus ; par conséquent, si une dimension est compacte, elles peuvent s'enrouler autour d'elle, comme représenté sur la figure 13.5.



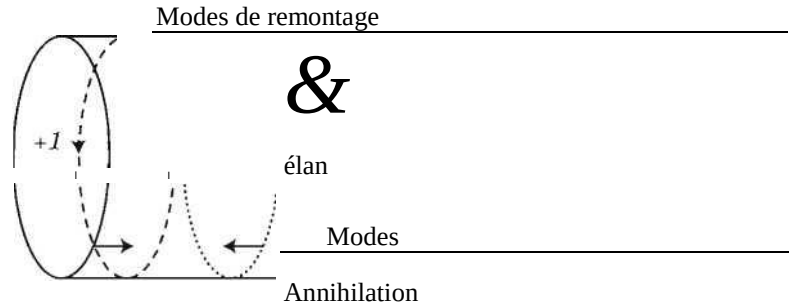


Fig. 13.5 Si une dimension est compacte, c'est-à-dire s'il s'agit d'un cercle, deux types de modes apparaissent. Les modes de propagation usuels, dits modes de moment, et ceux pour lesquels la corde s'enroule autour de la dimension compacte. Les modes de remontage dans un sens et dans l'autre peuvent s'annihiler.

Les modes de moment de propagation sont des états d'excitation dans la dimension compacte, et leur énergie est donc de la forme  $E_n = na_m/R$ , avec  $n \in \mathbb{N}$  et  $a_m$  une constante dépendant de la topologie de la dimension compacte. En effet, un mode purement sinusoïdal est plus énergétique si la dimension est grande. En conséquence, il a une énergie  $E_m = mct^2/R$ , avec là encore  $m \in \mathbb{N}$  et  $a_w$  une autre constante.

Ainsi, le spectre d'excitation est invariant en remplaçant  $R \rightarrow R^{-1}$  par  $na_m me...$ . En fait, c'est la théorie entière qui est invariante, et ceci n'est qu'une illustration de la T-dualité. Plus surprenant encore, cela signifie que la théorie ne permet pas de faire la distinction entre les grandes et les petites échelles.

### 13.2.6.2 Thermodynamique des supercordes

La thermodynamique des gaz en chaîne donne des résultats différents selon le nombre de dimensions non compactes. Par exemple, pour au plus trois dimensions non compactes, il existe une température dite de Hagedorn,<sup>16</sup> à laquelle l'énergie totale diverge. Un tel problème ne se pose pas si l'on considère un boîtier compact dont la taille est alors envoyée à l'infini, car dans ce cas il devient nécessaire d'inclure les modes de remontage. Leur énergie, qui augmente avec l'échelle de compactification, contribue alors à empêcher l'énergie totale de diverger.

Clairement, à proximité de la température de Hagedorn, les fluctuations d'énergie deviennent très importantes, et il faut recourir à une description microcanonique. On constate alors que, tant qu'il existe des dimensions non compactes, au-delà d'une énergie limite, les chaleurs spécifiques deviennent négatives. Cela implique que la thermodynamique des cordes ne peut avoir de sens que dans des espaces compacts. De plus, si toutes les dimensions de l'espace sont compactes, la température ne peut pas dépasser la température de Hagedorn : il existe une température maximale dans cette description.

### 13.2.6.3 Température et dimensions

L'idée de Brandenberger et Vafa [10] était de constater que les dimensions spatiales dans

<sup>16</sup>La température d'un gaz de chaîne est définie de la même manière que son équivalent pour un ensemble de particules, via le coefficient qui apparaît dans la fonction de répartition des états de chaîne accessible au Système. Il donne également une mesure de l'énergie caractéristique des composants gazeux.

lesquelles évolue notre Univers n'avaient au départ aucune raison d'être différentes des autres. Ils ont donc postulé que les conditions initiales sur les 9 dimensions spatiales auraient dû être les mêmes pour toutes, c'est-à-dire qu'elles étaient toutes compactes et très petites, avec une taille caractéristique de l'ordre de la longueur de Planck. Ils ont ensuite étudié s'il pouvait exister un mécanisme selon lequel seules trois dimensions pourraient commencer à s'étendre. De cette façon, la dynamique conduirait naturellement à la cosmologie telle que nous la connaissons, à savoir un univers qui semble non compact, au moins sur des tailles inférieures ou comparables à ses plus grandes échelles de distance observables (voir section 12.4.4.6), tout en expliquant pourquoi les dimensions supplémentaires n'auraient pas pu subir d'expansion, restant ainsi compactes et petites.

Considérons donc un univers ayant initialement la topologie d'un tore cubique à neuf dimensions <sup>17</sup>de rayon  $R$ , qui jouera le rôle de facteur d'échelle. L'expansion peut être vue comme une relation entre ce facteur d'échelle et la température,  $T = T(R)$ . Il n'est en effet pas nécessaire de connaître la dynamique gravitationnelle pour obtenir cette courbe : la condition d'adiabaticité est suffisante.

Premièrement, nous savons qu'il existe une température maximale, et donc la courbe  $T(JR)$  ne diverge pas, contrairement à ce qui se passe avec les particules ponctuelles. De plus, en raison de la dualité  $T$ -, on s'attend à ce que la courbe soit symétrique sous l'échange  $\ln R \leftrightarrow \ln R$ . C'est exactement ce que l'on trouve en pratique : pour  $R$  *grand*, la température décroît lorsque  $T < x$   $R^{-1}$  comme on peut s'y attendre puisque les modes de quantité de mouvement dominant, alors que pour un petit  $R$ , la température augmente linéairement avec  $R$  à cause des modes d'enroulement. Pour les échelles intermédiaires, lorsque la température est de l'ordre de la température de Hagedorn, elle reste sur un plateau.

#### 13.2.6.4 Collisions de chaînes et quatre dimensions

Les modes d'enroulement contribuent négativement à la pression puisque leur énergie augmente avec l'augmentation de  $R$ . En d'autres termes, les modes d'enroulement ont tendance à ralentir l'expansion, voire à tenter de l'empêcher. De plus, l'équilibre thermique implique que le nombre de modes d'enroulement diminue avec la taille de la boîte. On ne peut donc poursuivre la dilatation que s'il existe un état thermique qui défavorise les modes de bobinage lorsque  $R$  augmente.

Si, pour une raison quelconque, l'équilibre thermique ne peut plus être maintenu pour les modes d'enroulement, alors un nombre important d'entre eux survivront, ce qui ralentira et finira par arrêter l'expansion.

Pour rester en équilibre thermique, la distribution des modes d'enroulement doit pouvoir s'annihiler comme sur la figure 13.5. Les modes et antimodes devraient ainsi pouvoir se rapprocher à une distance de l'ordre de l'échelle de Planck. Voyons dans quelles conditions cela est possible.

Lorsqu'une corde bouge, elle s'étend sur une surface spatio-temporelle bidimensionnelle, sa feuille du monde. Deux cordes données dans des états de mouvement arbitraires s'étendent donc sur deux feuilles du monde qui n'ont aucune chance de se rencontrer dans un espace à 9 dimensions. Par conséquent, une expansion

9- l'espace dimensionnel finira par aboutir à un échec. Avec ce mécanisme d'annihilation, la dimensionnalité maximale de l'espace dans lequel nous attendons des collisions de cordes est

---

<sup>17</sup>Ce type de compactification n'est pas possible en pratique dans les modèles réalistes de supercordes car ils conduisent, par exemple, à de véritables représentations des fermions. Son objectif est uniquement d'illustrer l'idée.

donnée par les deux surfaces couvertes par les cordes. On peut facilement se convaincre que dans un espace tridimensionnel comme le nôtre, les modes d'enroulement vont génériquement pouvoir se rencontrer, et donc s'annihiler. En fait, trois est le plus grand nombre possible de dimensions pouvant commencer à s'étendre grâce à ce mécanisme. Autrement dit, selon cette analyse, notre Univers a trois dimensions car les objets fondamentaux sont des cordes, avec une dimension spatiale : supposer des cordes unidimensionnelles comme objets fondamentaux implique non seulement que le nombre de dimensions soit fixé pour des raisons de cohérence mathématique à Au niveau quantique, cela explique aussi naturellement pourquoi notre Univers est considéré comme un espace-temps à 4 dimensions, simplement comme le résultat de l'évolution cosmologique précoce.

#### 13.2.6.5 *Gaz de brane*

Les idées développées ci-dessus pour expliquer le nombre de dimensions de notre espace-temps peuvent également être discutées dans le contexte de la théorie A4 en 11 dimensions ; c'est le scénario des gaz de brane [11]. On peut montrer que les degrés de liberté fondamentaux sont alors le graviton, les 2-branes et les 5-branes. En compactant la onzième dimension sur un cercle, nous constatons alors que les états possibles sont les 0-branes, les cordes (1-brane), ainsi que les 2-, 4-, 5-, 6- et 8-branes. Nous supposons maintenant que l'état initial possède, par symétrie, autant de modes d'enroulement que d'anti-enroulement, et que l'Univers a une topologie toroïdale où toutes les dimensions se comportent de manière similaire. Lorsque le facteur d'échelle  $a$  commence à croître, puisque l'énergie d'une  $p$ -brane est proportionnelle à  $a^p$ , plus la valeur de  $p$  est grande, plus les effets de ces  $p$ -branes sont importants. Ce sont donc les branes  $P$  de grande dimension qui commencent à interagir en premier. Pourtant, nous pouvons montrer que les  $p$ -branes ne peuvent interagir et, par conséquent, s'annihiler que dans un espace de dimension  $2p + 1$  au maximum. Autrement dit, avec  $D = 10$  et donc 9 dimensions spatiales, toutes les  $p$ -branes avec  $p < 4$  vont rapidement s'annihiler. Seules les cordes restent et le mécanisme Brandenberger-Vafa s'applique sans problème.

### 13.3 L'Univers comme « brane »

Parmi les nombreuses conséquences des théories des cordes, on retrouve l'existence de - dimensions supplémentaires, généralement supposées compactes. On retrouve également de nouveaux objets, appelés  $D_p$ -branes. Ces branes ont ouvert une riche phénoménologie pour la cosmologie primordiale [12-16].

#### 13.3.1 Motivations

##### 13.3.1.1 *Réalisation Horava-Witten*

En 1996, Horava et Witten [17] ont réalisé que la M-théorie, une fois compactée sur l'espace  $R^{10} \times S^1/Z_2 = R^{10} \times [0,1]$  conduit à la forte limite de couplage de la théorie des cordes hétérotiques  $Es_xEs$ , à condition les champs de jauge sont dans un multiplet vectoriel à 10 dimensions qui se propage uniquement sur les limites de l'espace-temps. La gravité, quant à elle, se propage dans toutes les dimensions. L'image à laquelle cela conduit est celle de la supergravité dans un espace-temps à 11 dimensions (la masse), la onzième dimension étant délimitée par deux dimensions. 10- branes frontières dimensionnelles où évoluent les champs de jauge du groupe  $Es$ . Un

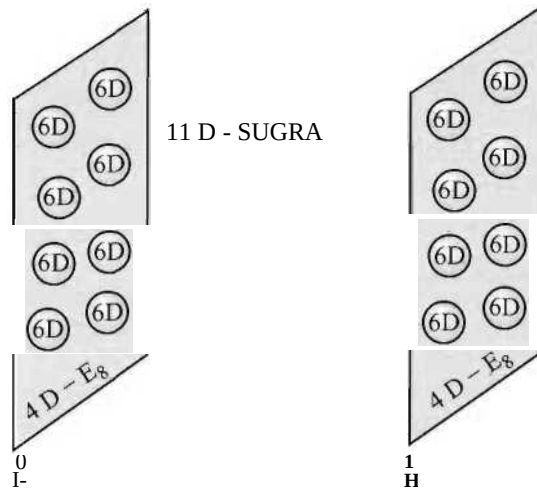


**Fig. 13.6** Modèle Horava-Witten : l'espace-temps à 11 dimensions de la théorie jM est délimité par deux branes à 10 dimensions. Chacune de ces branes limites est à son tour décomposée en une grande brane à 4 dimensions et des espaces compacts à 6 dimensions en chaque point (les cercles représentent les variétés de Calabi-Yau en chaque point de la brane). La supergravité existe ici dans les 11 dimensions.

Il faut en outre compactifier les six dimensions supplémentaires de la manière habituelle sur une variété Calabi-Yau pour obtenir l'image de la Fig. 13.6. La onzième dimension, ou la cinquième une fois les 6 dimensions internes compactifiées, n'est pas forcément fortement limitée en taille puisque tous les champs de particules connus ne sont supposés exister que sur les branes, et seule la gravité existe dans toutes les dimensions. En conséquence, seule la gravité est contrainte. Ces contraintes indiquent que les dimensions supplémentaires doivent être inférieures à environ un millimètre (voir Section 1.6).

Bien que cette image conduise à a. cadre cosmologique conceptuellement très éloigné de celui du modèle standard basé sur la relativité générale à 4 dimensions, on peut cependant heureusement lui faire contenir ce modèle standard (sinon il serait déjà exclu). De plus, cela peut être généralisé en supposant que notre Univers est un 3-brane intégré dans un espace-temps de dimension arbitraire (Fig. 13.7).

### 13.3.1.2 Le problème de la hiérarchie

Un autre problème théorique clé, qui ne peut en aucun cas être abordé dans le cadre de la cosmologie standard ou de la physique des particules, est le problème de la hiérarchie, c'est-à-dire pourquoi l'échelle gravitationnelle  $M_p = G^{-1/2}$  est-elle si éloignée de celle qui est caractéristique des interactions électrofaibles.

En 1998, Arkani-Hamed et al. [18] ont suggéré un mécanisme grâce auquel ce problème pourrait ne pas être hors de portée d'une explication scientifique. Il s'avère que leur solution repose également sur l'existence de dimensions supplémentaires, dans leur cas au moins une grande.

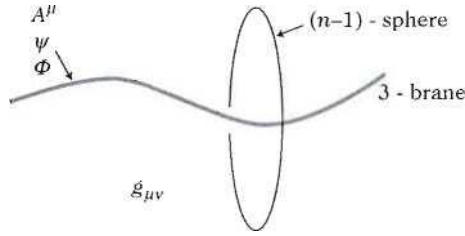


**Fig. 13.7** A brane can be seen as a spécial configuration (a topological defect, *for* instance, or the set of singular points on a compactification manifold) in three dimensions (if it must describe our space, but there are other possibilities in string theory) existing in a higher-dimensional space-time. While the fields describing matter, the gauge fields  $A^M$ , spinor fields  $\psi$  and scalar fields  $\Phi$  evolve as being strictly confined to the brane, each point of it is surrounded by a space, called the ‘bulk’, in which we only find the effects of gravity  $g^\Lambda$ .

L'idée de départ est de supposer que l'échelle énergétique fondamentale est celle du interactions électrofaibles  $m_{ew}$ , et qu'il existe  $n$  dimensions compactes, de rayon  $R$ . La masse de Planck dans les  $4 + n$  dimensions est donc choisie

Le potentiel newtonien  $V<(r)$  pour deux masses d'essai  $m_1$  et  $m_2$  séparées par  $r < R$  is then

$$V_{<}(r) \simeq \frac{m_1 m_2}{\left[ M_P^{(4+n)} \right]^{n+2}} \frac{1}{r^{n+1}}.$$

Cette expression peut être comparée ! au potentiel  $V>(r)$  pour deux masses séparées d'une distance  $r > R$ , c'est à dire suffisamment grande que le rayon des dimensions supplémentaires pour que les masses ne ressentent pas les effets de ces dimensions. C'est une autre manière équivalente d'obtenir la relation entre les constantes gravitationnelles en 4 et  $4+n$  dimensions [voir ci-dessous (13.12)]. On trouve alors  $\kappa_{4+n}^2 = \kappa_4^2 R^n$ , ou plutôt

$$V_{>}(r) \simeq \frac{m_1 m_2}{M_P^2} \frac{1}{r} \simeq \frac{m_1 m_2}{R^n \left[ M_P^{(4+n)} \right]^{n+2}} \frac{1}{r},$$

pour le rayon caractéristique des dimensions supplémentaires. Nous supposons ici que le problème de la hiérarchie est résolu en considérant une échelle d'énergie de l'ordre du TeV, c'est-à-dire peu éloignée des échelles caractéristiques du modèle standard de physique des particules. En rappelant la contrainte expérimentale  $R < 1$  mm, le résultat ci-dessus implique qu'il doit y avoir au moins deux dimensions supplémentaires. Il s'avère que le cas  $n = 2$  est le plus intéressant car il conduit à des prédictions à des échelles de l'ordre du millimètre, ce qui reste dans les limites des expériences actuelles : si ce mécanisme est bien responsable de la grande différence entre les Planck et électrofaible et si cela était réalisé en utilisant deux grandes dimensions supplémentaires, alors nous devrions bientôt être en mesure de détecter certaines conséquences expérimentales et de prouver efficacement que nous vivons dans plus de 3 dimensions spatiales.

### 13.3.2 Équations d'Einstein induites

Considérons une brane arbitraire, c'est-à-dire un espace à  $p$  dimensions plongé dans un espace à  $n$  dimensions ( $n > p$ ), de coordonnées  $x^A$  et de métrique  $g_{AB}$ ,  $A, B = 0, \dots, n-1$ . Les conditions de jonction discutées à la section 8.4.5 sont facilement généralisables. Pour ce faire, on pose  $x^A = X^A$  les coordonnées braniques, de coordonnées internes avec  $p =$

#### 13.3.2.1 Formes fondamentales

Avec la métrique induite,  $g_{LU} = g_{AB} X^A X^B$ , on définit la première forme fondamentale  $r^{AB} = g^{IJ} X^A_{,I} X^B_{,J}$ , ainsi que la deuxième forme fondamentale

$$K_{AB}{}^C \equiv \eta_B^D \eta_A^E \nabla_E \eta_D^C \quad (13.37)$$

Ce tenseur est tangent à la brane dans ses deux premiers indices et orthogonal dans le troisième, soit

$$\perp_D^A K_{AB}{}^C = \perp_D^A K_{BA}{}^C = \eta_D^C K_{BA}{}^D = 0, \quad \text{with} \quad \perp_{AB} = \bar{g}_{AB} - \eta_{AB}$$

Pour que la brane représente efficacement un  $p$ -volume dans tout l'espace, le deuxième tenseur fondamental doit être symétrique dans ses deux premiers indices,

$$K_{BA}{}^C = K_{AB}{}^C$$

Cette relation, appelée identité de Weingarten, fournit une équation géométrique du mouvement de la brane.

A partir de maintenant, nous nous limiterons au cas de l'hypersurface déjà abordé dans la section 8.4.5, spécialisée dans la 3-surface plongée dans un espace-temps à cinq dimensions. Dans ce cas avec une seule codimension, on peut définir de manière unique un vecteur unitaire de type espace  $n^A$ , normal à la brane ( $g_{AB} n^A n^B = 1$ ), avec lequel on construit le tenseur de projection orthogonal à la surface comme  $\perp_L g = n^A n_B$ . On peut alors écrire la courbure extrinsèque en fonction de la deuxième forme fondamentale, à savoir

$$K_{AB}{}^C = K_{AB} n^C, \quad \text{avec} \quad K_{AB} = -r^{CD} r_{/A} X_{E D} n_C = -X_A n_B$$

Ceci est équivalent à (8.160), où la dernière égalité n'est valable que si  $n_A$  est continu dans l'ensemble le long des géodésiques, soit  $n^A X_A n_B = 0$ . Le cas d'une seule dimension supplémentaire est le seul cas pour lequel des conditions de jonction simples peuvent être utilisées sans ambiguïté, et nous nous limiterons donc désormais à ce cas.

L'identité de Weingarten pour la deuxième forme fondamentale de la brane implique que la courbure extrinsèque  $K_{AB}$  doit être symétrique. Cela vient du fait que la courbure extrinsèque peut également être définie via la dérivée de Lie de la métrique selon la direction orthogonale à la brane [19], soit  $K_{AB} = \mathcal{L}_{n^C} g_{AS}$ .

Mentionnons enfin l'équation de Codazzi, qui est

$$\nabla_A K_B{}^A - \nabla_B K = \bar{R}_{AC} \eta_B^A n^C \quad (13.38)$$

déterminer le taux de variation de la courbure extrinsèque le long des fines de constante  $y$

### 13.3.2.2 Conditions intrinsèques de courbure et de jonction

La courbure intrinsèque,  $R^A$ , peut être liée à celle d'intégration,  $R_{AB}$ , via la relation de Gauss

$$\frac{n-3}{n-2} \bar{R}_{CD} \eta_A^C \eta_B^D + \frac{1}{n-2} \bar{R}_{CD} \eta^{CD} \eta_{AB} - \frac{1}{n-1} \bar{R} \eta_{AB} + K K_{AB} - K_A^C K_{BC} + \bar{W}_{AB}, \quad (13.39)$$

où  $TZ^{AB} = R^A X^* X^B$ , et  $VV_{AB}$  est la projection orthogonale du tenseur de Weyl de l'espace d'incorporation,  $W_{AB} = C_{ACBD} - L^{CD}$ .

Bien que nous devions exiger que la métrique soit continue dans tout l'espace, il n'existe pas de contrainte nécessaire pour ses dérivées qui puissent changer de valeur à travers la brane. Modélisation de ce dernier par un tenseur énergie-impulsion localisé

$$\int_{\text{brane}} d^p x \sqrt{-g} \bar{T}^A \quad (13h40)$$

tout comme dans le cas des cordes cosmiques du chapitre 10, nous posons

$$\langle K_{AB} \rangle \equiv \frac{1}{2} (K_{AB}^+ + K_{AB}^-) \quad \text{and} \quad [K_{AB}] \equiv K_{AB}^+ - K_{AB}^-$$

où les indices + et — indiquent que le tenseur est évalué d'un côté et de l'autre de l'hypersurface.

La condition de jonction (8.162) devient alors

$$(13.41)$$

où  $T = g^{AB} T_{AB}$  et  $K_n$  est donné par (13.2). On obtient la dynamique interne des branes à partir de cette équation : dans un contexte cosmologique pour lequel on suppose un br ; n métrique de la forme FLRW, cela conduit à une équation de Friedmann modifiée.

Dans le cas où la brane est soumise à une force extérieure  $f^A = f n^A$ , une généralisation de la deuxième loi de Newton conduit à

$$(13.42)$$

une relation qui donne la dynamique de la brane dans tout l'espace. Cette équation peut être obtenue à partir de l'équation de Gauss (13.39) et de la continuité de  $R_{AB}$  à travers la brane.

### 13.3.2.3 La symétrie Z2 possède une telle symétrie, on considère la brane comme localisée

In many cases, either for the sake of simplicity or because the Horava-Witten model en  $y = 0$  et on s'intéresse à une configuration symétrique, c'est à dire un invariant sous la transformation  $y \rightarrow -y$ . En raison de cette symétrie, il ne peut y avoir de force extérieure, et donc nous devons fixer  $f = 0$ . En conséquence, le tenseur de courbure extrinsèque  $K_{AB}$  change de signe d'un côté de la brane à l'autre, de sorte que  $[A \setminus B] = 2K_{AB}(0)$ , et la condition de jonction

(13.41) implique alors que la courbure extrinsèque de la brane est entièrement déterminée par sa teneur en matière.

Considérons explicitement le cas d'une brane à 4 dimensions ( $p = 4$  dans la discussion ci-dessus) intégrée dans une variété à 5 dimensions ( $n = 5$  alors). Utilisation de (13.39) et des équations d'Einstein à 5 dimensions

$$G_{AB} + Xg_{,B} = K\delta_{AB}, \quad (13.43)$$

où pour rester général nous avons gardé une constante cosmologique  $\Lambda$ , nous pouvons obtenir les équations d'Einstein quadridimensionnelles induites en décomposant la métrique comme

$$ds^2 = g_{AB}dx^A dx^B + dy^2,$$

qui conduit à

$$G^\Lambda + Xg_{\Lambda\nu} = -\frac{1}{2}g^{\Lambda\Lambda} - \frac{1}{2}g^{\nu\nu} - \Lambda g_{\Lambda\nu} \quad (13.44)$$

Pour obtenir cette relation, nous avons considéré que le tenseur énergie-impulsion totale de la brane elle-même contient une partie constante cosmologique à 4 dimensions, c'est-à-dire  $T^{\Lambda\Lambda} = T_{\nu\nu} \sim Xg^\Lambda$ , et on a alors «4 =  $|\Lambda|K$  85 nous  $\Lambda$  comme  $A_4 = |\Lambda| (A_5 + K_4 A)$ . Il est intéressant de noter qu'en l'absence d'une telle constante cosmologique à quatre dimensions, on ne retrouve pas les équations d'Einstein. Pour obtenir (13.44), il faut utiliser la condition de jonction (13.41) nous permettant d'exprimer la courbure extrinsèque en fonction du tenseur énergie-impulsion.

Les corrections des équations d'Einstein proviennent d'abord de la courbure extrinsèque

$$+ \sim g^\Lambda (3T_{\alpha 0} T^\Lambda - T^2), \quad (13.45)$$

qui est quadratique dans la source. Une deuxième contribution découle du tenseur de Weyl  $\delta/\nu = W_{AB} T^A T^B$ . Enfin, un terme venant du gros

$$+ (r_{AB} n^A n^B - g^\Lambda), \quad (13.46)$$

dans lequel  $T$  représente une source d'énergie-impulsion qui n'existe que dans la masse. Dans la plupart des applications cosmologiques, ce terme est supposé absent, nous pouvons donc poser  $T_{AB} = 0$ .

#### 13.3.2.4 Conservation de

L'équation de Codazzi (13.38), ainsi que la condition de jonction (13.41), implique que

$$= 0,$$

de sorte que le tenseur énergie-impulsion reste conservé sur la brane. En conséquence, il n'y a pas d'échange d'énergie et de quantité de mouvement entre la brane et la masse autre que purement gravitationnel.



### 13.3.3 Le modèle Randall-Sundrum

#### 13.3.3.1 Une dimension infinie

Supposons que le volume ait une constante cosmologique négative,  $\Lambda_5 < 0$ . Dans ce cas, la structure globale du volume est celle d'un espace anti-de Sitter à 5 dimensions. Pour une brane sans matière, on obtient alors la solution

$$ds^2 = e^{-2M/\epsilon r_J} dx^\mu dx^\mu + dy^2, \quad \text{with } f = \sqrt{-\frac{6}{\Lambda_5}}, \quad (13.47)$$

ce qu'on appelle une solution « déformée ». Une telle solution préserve l'invariance de Lorentz et la structure spatiale de Minkowski à quatre dimensions de la brane. Cette solution est également comparable à celle consistant à considérer une dimension supplémentaire compacte : du fait de la structure anti-de Sitter, et malgré le fait que la dimension supplémentaire  $y$  varie dans JR, l'ensemble est de volume fini. En effet, en intégrant le facteur exponentiel de la métrique le long de la cinquième dimension, on constate que et de même pour la courbure, de sorte que les masses de Planck en quatre et cinq dimensions sont désormais liées par  $[M^{(5)}]^3 = 2 [M^{(4)}]^2 / \epsilon$ .

Sur la brane, la métrique de la solution (13.47) est une métrique de Minkowski. Cela signifie que la constante cosmologique à quatre dimensions doit effectivement disparaître. Nous devrions donc avoir  $\Lambda_5 = -\kappa^2 A$ , c'est-à-dire que la tension brane  $A$  devrait être fixée

$$\Lambda_5 = -\frac{3M_P^2}{4\pi\epsilon^2}, \quad (13.48)$$

which represents a parameter fine tuning that is hardly justifiable at this level.

par le rayon de courbure global comme

#### 13.3.3.2 Deux branes

Une autre façon de modéliser la compactification de l'espace consiste à utiliser une deuxième brane, située à une distance  $y = L$ , et en supposant à nouveau la symétrie  $Z_2$ . Notez que dans ce cas, cette symétrie conduit désormais à l'invariance sous les deux transformations  $y \rightarrow -y$  et  $y+L \rightarrow y+L$ .

Pour qu'une telle solution soit significative et satisfasse aux exigences de symétrie, les deux branes doivent avoir des tensions égales et opposées, à savoir  $\pm A$ , comme défini par (13.48). De plus, l'échelle effective de Planck devrait désormais être remplacée par

$$M_P^2 = \frac{3}{2} \frac{1}{\epsilon} (1 - e^{-2L/\epsilon}). \quad (13.49)$$

Dans ce modèle, où l'on suppose que notre Univers est la brane située en  $y = L$ , on récupère à basse énergie que la gravité est décrite par une théorie du tenseur scalaire. Pour retrouver la relativité générale à 4 dimensions, il faut trouver un moyen de stabiliser la distance entre les branes. Cette distance est vue du point de vue de la brane comme un champ scalaire, appelé *radion*. Un radion stabilisé est nécessaire pour que le modèle fasse des prédictions compatibles avec les observations.

#### 13.3.3.3 Attraction gravitationnelle

On ne considère désormais que le cas monobrane, ce qui revient à prendre la limite  $L \rightarrow \infty$  dans le cas bibrane.

S'il y a de la matière sur la brane, on peut chercher une solution de la forme

$$ds^2 = e^{2\gamma} (dx^0)^2 + h_{AB} dx^A dx^B, \quad (13.50)$$

où  $h_{AB}$  est une perturbation.

De manière similaire à celle des perturbations cosmologiques, les équations de mouvement obtenues pour  $h_{AB}$  sont invariantes sous les transformations de jauge de  $h_{AB}$ . Il convient donc de choisir une jauge avant d'entrer dans le détail des calculs. Il s'avère commode de supposer la jauge dite « transversale et sans trace » (TT), définie par

$$h^A_A = 0, \text{ ce qui n'est cependant pas tout à fait}$$

suffisant. Il reste quelques degrés de liberté à fixer, et cela peut être fait en définissant

$$h_{yy} = 0,$$

appelée jauge normale gaussienne. Avec ce choix de jauge, les équations d'Einstein s'écrivent

$$+ \quad v = Q \quad (13.51)$$

Ces choix de jauge fixent complètement la position de la brane à  $y = 0$  (z"), c'est-à-dire un

fonction inconnue des coordonnées internes de la brane. Mais on peut aussi choisir, comme cela revient simplement à redéfinir la coordonnée supplémentaire, d'utiliser les conditions de jonction

(13.41) imposer que la brane soit localisée à  $y = 0$ , ce qui simplifie souvent le calcul. Pour ce faire, on garde uniquement les conditions de jauge normales gaussiennes et on trouve

$$(dy + A = -K_5 \backslash T^{\wedge} \text{-----} - -r)^{\wedge} T \backslash, \quad (13.52)$$

où la perturbation est maintenant notée  $h$ .

On peut passer d'une jauge à l'autre en effectuant le changement de coordonnées généré par un vecteur  $v^A$  de la forme

$$u^4 = T^4(x''), \quad (x'') = |e^{2|y|/l} - a^{\wedge} W^4(x''),$$

où  $T^{7*1}$  sont des fonctions des coordonnées internes de la brane. La relation entre les variables de perturbation dans les deux jauges est alors donnée par

$$V = V - \quad rr^{2 \wedge /e}, \quad ,$$

grâce à quoi on trouve la condition de jonction pour  $h$

$$(13.53)$$

Cette condition peut maintenant être combinée avec (13.51) pour donner

$$(e^{2\Lambda} + \hat{a}^2 - i + |f(y)|) V = -2\kappa_5 S^\Lambda S(t) \quad (13.54)$$

où

Les solutions générales de cette relation peuvent être exprimées en termes de fonctions de Green retardées évaluées sur la brane. Ces fonctions de Green peuvent être explicitement étendues en modes massif et sans masse, ce dernier jouant le rôle du graviton, tandis que le premier permet des corrections dues à la dimension supplémentaire. Nous constatons *que* l'on retrouve les conditions de jauge TT à condition de  $\square W^1 =$  et donc, on retrouve exactement les équations d'Einstein linéarisées pour ces perturbations à condition de tronquer la fonction de

$$G(x, y, x', y') = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{ik \cdot (x - x')} \left[ \frac{1}{\ell} \frac{e^{-2(|y| + |y'|)/\ell}}{(k_0 + i\epsilon)^2 - \mathbf{k}^2} + \frac{u_m(y) u_m(y')}{(k_0 + i\epsilon)^2 - \mathbf{k}^2 - m^2} \right], \quad (13.55)$$

where the modes  $u_m$  are given by properly normalized Bessel functions, namely

$$u_m(y) = \sqrt{\frac{m\ell}{2}} \frac{J_1(m\ell) Y_2(e^{|y|/\ell} m\ell) - Y_1(m\ell) J_2(e^{|y|/\ell} m\ell)}{\sqrt{[J_1(m\ell)]^2 + [Y_1(m\ell)]^2}}.$$

The solution for  $h$  is then

$$h_{\mu\nu} = -2\kappa_5 \int G(x, 0, x', 0) S_{\mu\nu}(x', 0) d^4 x',$$

$$\mathcal{F}^\mu = \frac{1}{6} \kappa_5 T.$$

One can choose the functions  $\mathcal{F}^\mu$  in such a way as to also have

$$\tilde{h}_{\mu\nu} = -2\kappa_5 \int G(x, 0, x', 0) \left( T_{\mu\nu} - \frac{e^{-2|y|/\ell}}{3} \eta_{\mu\nu} T \right) d^4 x' + \frac{2}{\ell} e^{-2|y|/\ell} \eta_{\mu\nu} \mathcal{F}^4,$$

Green pour ne conserver que les modes sans masse.

Pour étudier l'interaction gravitationnelle appropriée entre les particules sur la brane, nous prenons un tenseur énergie-impulsion de la forme  $= pu^\Lambda u_\Lambda$ , où les sont des vecteurs à quatre vitesses. En supposant une symétrie sphérique pour la source, nous trouvons le potentiel

$$\frac{1}{2} \frac{G_{\text{NM}}}{r^2} = \dots \quad (13.56)$$

avec  $r = |x - x'|$  et nous avons fixé  $M = J \text{ pd}^3$  cc la masse source. Les modifications de la loi de Newton sont inmanifestes à des échelles inférieures ou comparables à  $f$ .

### 13.3.4 Phénoménologie cosmologique

#### 13.3.4.1 Choix des coordonnées

Les solutions globales qui nous intéresseront, dans un contexte cosmologique, sont celles permettant de récupérer une métrique de Friedmann-Lemaître sur la brane. Il a été montré que la métrique peut être définie sous la forme

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t) (d\chi^2 + r^2 dQ^2), \quad (13.57)$$

où la fonction est donnée par  $f(R) = K + R^2/\ell^2$ , la constante  $K = 0, \pm 1$  étant la courbure spatiale tridimensionnelle. Au fur et à mesure que la brane se déplace dans la masse, la solution des équations d'Einstein conduit à  $R = a(T)$ , c'est-à-dire une fonction donnée du temps. La quantité  $a(T)$  est finalement interprétée comme le facteur d'échelle de la brane, de sorte que l'expansion semble être induite par le mouvement de la brane à travers la masse.

En passant aux coordonnées normales gaussiennes, nous avons

$$ds^2 = -N^2(t, y) dt^2 + A^2(t, y) (dy^2 + d\vec{y}^2), \quad (13.58)$$

et le facteur d'échelle est maintenant identifié à  $a(t) = A(t, 0)$ . Tant que  $t$  est le temps propre de la brane, on peut aussi poser  $N(t, 0) = 1$ , et on trouve alors

$$N = \frac{\dot{A}(t, y)}{\dot{A}(t)} \quad \text{as well as} \quad A = a(t) \left\{ \cosh\left(\frac{y}{\ell}\right) - \left[1 + \frac{\rho(t)}{\lambda}\right] \sinh\left(\frac{|y|}{\ell}\right) \right\},$$

so that the induced Einstein equation now reads

$$\mu - \frac{P}{1+v} = \frac{A}{3} \frac{K}{a^2}, \quad (13.59)$$

and hence a modified Friedmann equation [20].

#### 13.3.4.2 Solutions fluides

Pour comprendre quantitativement en quoi (13.59) diffère de l'équation de Friedmann habituelle, calculons ses solutions lorsque le terme source est un fluide parfait. En supposant que l'équation d'état est  $w$ , et parce que l'équation de conservation est inchangée sur la brane, on constate que la relation pour  $p(a)$  n'est pas modifiée. On a alors  $p \propto a^{-3(1+w)}$  obtenant par simplicité  $A = 0$ , et en considérant les sections spatiales euclidiennes, soit  $K = 0$ , on obtient la solution exacte sous la forme

$$a(t) \propto [t(t + t_0)]^{1/3} \quad \text{avec } t_0 = \frac{\sqrt{3} \ell \sqrt{1+w}}{3},$$

ce qui fait intervenir un temps caractéristique  $t_0$  donné par la microphysique ainsi que la teneur en matière de la brane. Les corrections induites ne sont donc significatives que pour  $t \ll t_0$ , et la solution est donc naturellement conduite vers la solution standard sur de grandes échelles de temps.

Notons que pour  $w = -1$ , on récupère que  $p$  doit être constant dans le temps, pour que la solution de de Sitter ne soit pas modifiée. La seule différence vient simplement de la valeur réelle de la constante de Hubble qui diffère de son homologue en 4 dimensions.

#### 13.3.4.3 Gonflage des branes

Pour que la cosmologie des branes reproduise le modèle cosmologique standard, une phase

inflationniste doit s'être produite sur la brane. Pour réaliser une telle phase, de nombreuses méthodes ont été proposées, utilisant des champs scalaires de branes ou de masse, ou des interactions entre les deux branes. Ils sont détaillés dans la Réf. [21], et nous donnons un aperçu de ces idées ci-dessous. Nous supposons que seule la gravité se propage dans le massif, et considérons donc un champ scalaire  $\phi$  confiné à la brane, dont la dynamique découle d'un potentiel  $V(\phi)$ . Dans l'idée de parvenir à une phase inflationniste, notons d'abord que les corrections à haute énergie de l'équation de Friedmann augmentent en réalité l'amortissement de Hubble. Cela rend plus probable une inflation lente : l'inflation peut en fait avoir lieu même pour des potentiels qui n'y auraient pas conduit dans la cosmologie habituelle.

En effet, la condition pour que l'Univers accélère, soit  $w < -1/3$ , se traduit pour l'équation d'état par

$$w < -\frac{1}{3} \frac{1 + 2p}{1 + p},$$

ce qui est a priori plus contraignant que la contrainte habituelle. Dans l'approximation lente, nous trouvons

et

$$\dot{\phi} = -\frac{V_{,\phi}}{3H}$$

On voit clairement que le taux d'expansion  $H$  est légèrement plus grand qu'il ne le serait en l'absence du terme de correction. Par conséquent, le mouvement du champ scalaire est plus amorti et le régime de roulis lent est plus facile à atteindre. Cela se traduit par des paramètres de roulement lent effectivement plus petits que dans le cas quadridimensionnel avec le même potentiel.

### 13.3.5 Extensions possibles

Différentes voies ont été suivies pour étendre les considérations précédentes sur la physique des branes. Elles reviennent toutes à considérer la théorie minimale présentée jusqu'à présent, en ajoutant de nouveaux termes pour inclure les effets possibles.

#### 13.3.5.1 Sur la symétrie de réflexion

La première possibilité à laquelle on peut penser est de briser la symétrie  $Z_2$  à travers la brane. Dans ce cas, le tenseur énergie-impulsion n'a plus de raison d'être identique de chaque côté de la brane, ce qui conduit à un terme de force dans (13.42) exprimable par

$$f = \sim [T_{AB}] n_A n_B.$$

Dans cette catégorie de modèles, on retrouve le fait que la relativité générale linéarisée reste une bonne approximation.

Un exemple d'implémentation de cette brisure de la symétrie  $Z_2$  est fourni en supposant que la brane est chargée et qu'elle se couple à une 4-forme, définie dans

l'essentiel. L'équation du mouvement pour une telle forme, à savoir  $V[\mathcal{F}] = F e^{\alpha} a^{\alpha}$  où  $F$  est un pseudo-scalaire, implique que sa dérivée extérieure est constante. Le saut de  $F$

à travers la brane est proportionnel à la charge de la brane, de sorte que la constante cosmologique effective est différente de chaque côté de la brane [22].

### 13.3.5.2 Gauss-Bonnet terni

En cinq dimensions ou plus, on peut ajouter un terme qui, bien que quadratique dans la courbure, ne change pas l'ordre des équations du mouvement : un terme de Gauss-Bonnet,

$$r_{GC} \propto R^2 - 4R_{AB}R^{AB} + R_{ABCD}R^{ABCD}. \quad (13h60)$$

A noter qu'en quatre dimensions, ce terme est une dérivée totale, et ne peut pas changer la dynamique. Par contre, dans plus de quatre dimensions, la dynamique est explicitement modifiée par (13.60), ce que l'on attend de nouveaux effets. Par exemple, la relation de cohérence (8.218) entre les spectres scalaire et tensoriel est modifiée [23]. On pense également qu'un tel terme pourrait fournir un moyen d'obtenir des conditions de jonction cohérentes dans des espaces de codimension supérieure à un [24],

### 13.3.5.3 Champ scalaire global

Enfin, des modifications du modèle de brane dans lesquelles un ou plusieurs champs scalaires sont libres de se déplacer dans la masse au lieu d'être confinés à la brane ont été proposées. Une telle modification est plutôt bien motivée et, en fait, pourrait s'avérer nécessaire pour des raisons de stabilité. Les modèles de cette catégorie conduisent à une théorie de la gravitation sur la brane qui est de type tenseur scalaire [25]. Ils sont donc plus contraints.

## 13.3.6 L'Univers comme défaut

Ayant ouvert la possibilité que des champs autres que les gravitons puissent se propager dans la masse, on peut les utiliser pour former des défauts topologiques. Dans le cas d'une codimension, celles-ci doivent être similaires aux murs de domaines. Bien que la largeur ne soit pas nécessairement négligeable, on peut cependant imaginer une configuration dans laquelle le défaut topologique lui-même est compris comme la brane, les champs induits à l'intérieur ayant des propriétés et des comportements différents de ceux du volume [26] : par exemple, comme dans le cas d'une corde cosmique supraconductrice, une symétrie pourrait être brisée à l'intérieur du défaut et restaurée à l'extérieur (ou inversement), ce qui signifie que le spectre de masse pourrait changer à mesure que l'on passe de l'intérieur du défaut à la masse. Voyons cela sur un modèle simple en 5 dimensions.

### 13.3.6.1 Un modèle simpliste

La manière la plus simple d'identifier une brane sur une paroi de domaine consiste à briser une symétrie  $Z_2$  au moyen d'un champ de Higgs à 5 dimensions. Nous définissons ensuite notre action comme

$$S = \int \left[ \frac{1}{2\kappa_5} (R - 2\Lambda) - \frac{1}{2} g^{AB} \partial_A \Phi \partial_B \Phi - V(\Phi) \right] \sqrt{-g} d^5x, \quad (13.61)$$

exiger que le potentiel soit

$$V(\Phi) = j(\Phi^2 - \frac{1}{2})^2, \quad (13.62)$$

et choisissez une métrique déformée pour la dimension supplémentaire infinie

$$ds^2 = -dy^2 + e^{2\alpha(y)} dx^2 = -dy^2 + g^2 dx^2. \quad (13.63)$$

Avec cette métrique, les équations d'Einstein pour une configuration statique sont écrites sous la forme

$$\frac{3}{\kappa_5} \sigma'' = \Phi'^2 \quad \text{and} \quad 6\sigma'^2 = \frac{\kappa_5}{2} (\Phi'^2 - 2V) - \Lambda \quad (13.64)$$

$$\Phi'' - 4\sigma'\Phi' = \frac{dV}{d\Phi} \quad \text{tandis que l'équation de Klein-Gordon devient}$$

(13h65)

dans lequel un premier dénote un dérivé par rapport à  $y$ ,  $' = d_y$ .

### 13.3.6.2 Conditions aux limites

Les conditions aux limites nécessaires pour décrire un mur de domaine à 4 dimensions intégré dans un espace de Sitter antide à 5 dimensions sont les généralisations triviales de celles décrites au chapitre 11. Nous exigeons que le champ de Higgs disparaisse sur une hypersurface, que nous choisissons par convention d'être situé à  $y = 0$ . De plus, on veut que la symétrie soit rompue loin de la brane, et en conséquence, on impose  $\lim_{y \rightarrow \pm\infty} \sigma = \pm 77$ . Le choix du signe est totalement arbitraire et correspond à ce que l'on appelle un *kink*, le choix inverse, c'est à dire  $\lim_{y \rightarrow \pm\infty} \sigma = \mp 77$ , serait un *antikink*, dont les propriétés physiques sont exactement identiques, du point de vue de la physique des branes et tant qu'il n'y a qu'une seule configuration de ce genre en jeu.

Quant à la fonction métrique  $a$ , elle doit tendre asymptotiquement vers un espace de Sitter antide, ce qui implique que  $a'$  doit tendre vers une constante, qui peut être déterminée à partir de (13.64). Nous trouvons que nous devrions imposer  $\lim_{y \rightarrow \pm\infty} \sigma' = \pm y/K/6$ .

En utilisant les redéfinitions  $p = H = 4\alpha(r)$  et  $S = d\sigma/dp$ , on peut écrire les équations dynamiques sous la forme

$$S = H^2, \quad H - 4SH = 4d_3H(H^2 - 1), \quad 0 \quad (13.66)$$

où  $H = dH/dp$ , et où les deux constantes sans dimension sont définies par

$$\kappa_5^2 \eta^2, \quad \beta \equiv \frac{\lambda \eta^2}{8|\Lambda|} \quad (13.67)$$

### 13.3.6.3 Réglage des paramètres de la solution

Enfin, nous exigeons que la configuration des branes respecte la symétrie  $Z_2$  entre  $y$  et  $-y$ . Cela implique que nous devons imposer  $S(0) = 0$ , ou  $\lim_{p \rightarrow 0} S(p) = -1/Vd$ , ce qui représente une contrainte. Pour la satisfaire, il doit exister une relation entre les deux paramètres  $a$  et  $\beta$ . Il s'avère qu'ils doivent se situer sur la courbe représentée sur la figure 13.8, conduisant au type de solution également représenté sur la même figure.

16

Une fois que l'accord est macle (qui est approximé par  $\sigma^2/\eta^2 = 1 + \dots$ , comme on peut le voir sur la figure 13.8), il se traduit par une relation entre la constante cosmologique globale, la densité d'énergie brane et la Masse de Planck en 5 dimensions. En d'autres termes, il fournit une interprétation microscopique fine de (13.48).

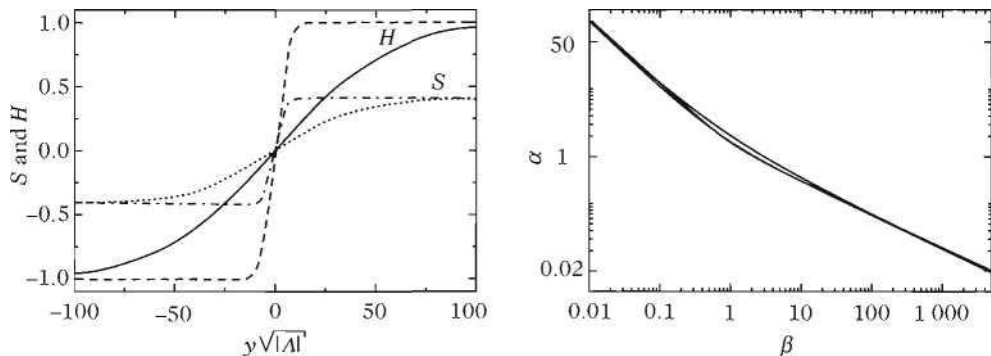


**Fig. 13.8** Solutions de paroi de domaine de brane et réglage des paramètres. A gauche, les champs de Higgs  $H$ , en trait plein pour  $\sigma = 0,01$  et en pointillés pour  $\sigma = 0,1$ , et le coefficient métrique  $S$ , respectivement, en traits pointillés et pointillés-pointillés pour les mêmes valeurs de  $\sigma$ . Une fois la valeur de  $\sigma$  est fixe, la valeur de  $a$  est fixée pour que  $S(0) = 0$ , conduisant à la courbe de droite (sur laquelle l'approximation est représentée par le trait plus fin que la solution numérique réelle).

### 13.3.6.4 Rallonges

On peut généraliser la discussion ci-dessus en considérant des défauts topologiques d'ordre supérieur tels que des hypercordes ou des hypermonopoles, de codimension respectivement 2 et 3. Cela signifie que l'on choisit des espaces antide Sitter à respectivement 6 ou 7 dimensions, où les dimensions supplémentaires sont toujours déformé. A noter que cela implique que si l'on veut que le défaut soit bien localisé, il faut prendre en compte les champs de jauge en plus des champs scalaires. Cela conduit à des modèles qui deviennent très rapidement extrêmement compliqués.

### 13.3.7 Modèles de gravité induite

Il existe encore une autre catégorie de modèles avec une dimension supplémentaire, dans laquelle cette dimension est infinie et fiat, c'est à dire non déformée. Notons au passage qu'elle permet une théorie supersymétrique dans le massif, la supersymétrie étant brisée sur la brane. Nous considérons des modèles [27] dans lesquels, en plus de l'action gravitationnelle à cinq dimensions, des corrections quantiques, généralement dues aux cordes, prédisent. un terme supplémentaire, de sorte que l'action totale soit donnée par

$$\text{induit} = y d^5 x y^{\wedge\wedge} + y d^4 x V^{\wedge} g \quad , \quad (13.68)$$

où le deuxième terme est purement quadridimensionnel, et la métrique induite en 4 dimensions est  $g^{\wedge}(x, y = 0)$ . La matière Lagrangienne contenue sur la brane peut être arbitraire, et notamment elle peut servir de source à la métrique induite.

Afin de savoir comment la gravité agit sur la brane, on considère la métrique totale comme  $g_{AB} = V_{AB} + h_{AB}$ , où  $h$  est la perturbation dont on veut étudier la propagation. Nous choisissons de travailler dans la jauge d'harmonie dans laquelle  $d^A h_{AB} = \wedge d_B h^A_A$ . Puisque la condition supplémentaire  $\wedge i_{4jU} = 0$  est compatible avec les équations de mouvement de (13.68), il ne nous reste finalement que et  $\wedge i_{44}$  à déterminer. On constate alors que



$$d_A d^A h^\wedge = d_A d^A h|,$$

$$d_{\text{A}}^{d_{\text{A}}^{\text{A}}} 6(y) + -\text{Tiln } h, \quad -r^{\wedge}T +$$

une équation qui peut être interprétée, sur la brane à  $y = 0$ , comme décrivant la propagation d'un graviton sans masse avec un champ scalaire. La gravité ainsi produite est celle d'une théorie du tenseur scalaire, incluant un continuum de gravitons massifs.

Le propagateur de gravitons sur la brane est donné par

$$h^{\wedge k,y=0})f^{\wedge} =$$

de définir une longueur caractéristique  $r_0 = K\$/2k4$ , OBTENUE EN FIXANT LES DEUX TERMES EN  $k^2$  et  $k$  dans le propagateur du même ordre de grandeur à cette échelle. Pour les distances  $r \gg r_0$ , le propagateur conduit à un potentiel d'interaction gravitationnelle évoluant comme  $r^{-1}$  avec des corrections logarithmiques. Pour  $r \ll r_0$ , bien entendu, on retrouve un potentiel valant  $r^{-2}$ , signalant simplement l'existence d'une cinquième dimension. Il est intéressant de noter qu'ici, contrairement aux modèles de Kaluza-Klein ou à géométrie déformée, on observe également une modification importante de la gravité aux grandes distances. Les prédictions observationnelles sont donc très différentes. En particulier, de tels modèles ont été considérés comme rendant compte d'une accélération de l'Univers actuel sans inclure aucune contribution explicite de l'énergie noire (Chapitre 12).

### 13.4 Singularité initiale et Univers rebondissant

Même en recourant à une phase inflationniste, le modèle cosmologique standard ne résout pas tous ses problèmes. Phénoménologiquement, c'est un paradigme très puissant et efficace en accord avec les observations, mais il n'empêche pas l'existence d'une singularité dans le passé. La cosmologie des cordes prétend résoudre cette singularité en arguant que les corrections à la théorie effective deviennent importantes tant que la description classique est toujours valable (notez que nous espérons toujours qu'il n'y a pas de singularisation dans la théorie des cordes). Cela se traduit par l'existence d'une courbure maximale, et par conséquent la phase actuelle, y compris celle décrivant l'inflation, doit avoir été précédée d'une autre phase. Dans le cadre de la chaîne (Jordan) ou d'Einstein, cette phase antérieure peut souvent être décrite par une phase de contraction. Dans ces scénarios, l'Univers rebondit lorsqu'il passe par un facteur d'échelle minimal.

### 13.4.1 A l'approche de la singularité

Le fait que l'espace-temps de Friedmann-Lemaître fournisse une bonne description des phases ultérieures de l'Univers n'implique en aucun cas que cet espace-temps décrit correctement les phases primordiales de l'Univers. Comme le montre l'exemple des espaces homogènes anisotropes (Section 3.6.3, Chapitre 3), le cisaillement diminue avec le temps et aurait donc pu dominer dans le passé, lorsque l'Univers était proche de la singularité initiale.

### 13.4.1.1 Bianchi I Univers

La solution Bianchi I décrit un espace-temps homogène avec des sections spatiales euclidiennes mais anisotropes. Sa métrique prend la forme (3.121). Comme le montre l'étude de la solution de la section 3.6.3 du chapitre 3, le cisaillement domine la solution lorsque  $t \rightarrow 0$  (3.122). Elle domine toujours l'apport de matière dans les étapes primordiales et on peut donc étudier la nature de la singularité en négligeant l'apport de matière.

La solution (3.122) montre que  $S \propto t^{-1/3}$ . La singularité existe toujours et est une véritable singularité (les invariants géométriques de la métrique divergent toujours). Cependant, contrairement au cas d'un espace-temps de Friedmann-Lemaître, deux facteurs d'échelle tendent vers 0 tandis qu'une dimension continue de s'étendre.

Ces conclusions sur la nature de l'approche d'une singularité dépendent du contenu en matière de l'Univers, des symétries espace-temps et de la théorie de la gravité aux hautes énergies.

### 13.4.1.2 Univers Bianchi IX

Nous décrivons maintenant l'étude originale de l'approche de la singularité telle que présentée initialement dans la Ref. [28].

La solution de Bianchi IX est analogue à celle de Bianchi I sauf qu'elle décrit un univers homogène anisotrope avec des sections spatiales à courbure positive. Dans un système de coordonnées dans lequel les constantes de structure (définies dans la section 3.6.3 du chapitre 3) sont  $T^1 = N^2 = N^3 = 1$  (voir la section 118 de la réf. [29] pour sa construction), la métrique spatiale implique trois facteurs d'échelle  $X(t)$ ,  $Y(t)$  et  $Z(t)$ . Lorsque  $X = Y = Z$ , cet espace se réduit à un espace-temps de Friedmann-Lemaître avec des sections spatiales sphériques. Comme dans le cas d'un univers Bianchi I, le cisaillement domine au voisinage de la singularité si bien que l'apport de matière est négligeable. Les équations d'Einstein se réduisent alors à

$$\frac{d(XYZ)}{dt} = \frac{1}{2XYZ} \left[ (Y^2 - Z^2)^2 - X^4 \right] \quad (13.69)$$

$$\frac{\ddot{X}}{X} + \frac{\ddot{Y}}{Y} + \frac{\ddot{Z}}{Z} = 0, \quad (13.70)$$

correspondant respectivement aux équations  $R^1 = 0$  et  $R^0 = 0$ . Il existe deux autres équations d'Einstein similaires obtenues par permutation circulaire entre  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  à partir de (13.69). Il est utile d'introduire une nouvelle variable temporelle  $T$  définie par

$$dt = (XYZ)dr, \quad (13.71)$$

ainsi que de nouvelles fonctions  $a$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  par

$$X = e^a, Y = e^\beta, Z = e^\gamma \quad (13.72)$$

en termes desquels les équations d'Einstein se réduisent désormais à

$$2a'' = [(Y^2 - Z^2)^2 - X^4], \quad (13.73)$$

$$a'' + \beta'' + \gamma'' = 2(a'/\beta' + \beta'/\gamma' + \gamma'/a'), \quad (13.74)$$

avec, comme ci-dessus, deux équations obtenues à partir de (13.73) par permutation circulaire de  $a$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ .

To study the dynamics of this universe in the neighbourhood of the singularity, we note first that the second term in (13.69) is negligible, which amounts to saying that the curvature term is negligible. This means that the Bianchi IX space is very close to a Bianchi I universe, simply because the curvature is negligible with respect to the shear, so that the scale factors behave in a way identical to that of the Kasner metric, namely

$$X \propto t^{p_x}, Y \propto t^{p_y}, Z \propto t^{p_z}, \quad (13.75)$$

the  $p_i$  exponents satisfy the two constraints

$$p_x + p_y + p_z = p_x + p_y + p_z = 1 \quad (13.76)$$

These three exponents are a permutation of  $(p_1, p_2, p_3)$  with  $p_1 < 0 < p_2 < p_3$ . It can be explicitly expressed as

$$(13.77)$$

with  $a(u) = 1 + u + u^2/2$ . Varying  $u$  between 1 and  $+\infty$  provides a complete representation of all possible triplets  $(p_1, p_2, p_3)$ . Moreover, one can check that the transformation  $u \rightarrow 1/u$  keeps  $p_1$  unchanged and exchanges  $p_2$  and  $p_3$ . Finally, note that the solution (13.75) implies that

$$XYZ \propto t, \quad r = \ln t + C, \quad (13.78)$$

where  $C$  is a constant.

Let us now consider an epoch during which the Universe is well described by a Kasner solution with, for instance,  $p_x = p_1$ . When the System evolves towards the singularity, i.e. when  $t \rightarrow 0$ ,  $Y$  and  $Z$  tend to 0 while  $X$  increases. So it can no longer be neglected in (13.69), which then takes the form

$$a'' = 2e^{4u}, \quad (3'' = 2e^{4u}, \quad y'' = 2e^{4u}). \quad (13.79)$$

Ces équations sont analogues à celle d'une particule massive évoluant dans un potentiel exponentiel. C'est une bonne approximation que de remplacer un potentiel aussi raide par un mur perpendiculaire à l'axe  $x$ . Ce qui arrive à cette particule est alors clair : lorsqu'elle atteint le mur avec une vitesse  $a' = p_1$ , elle rebondit avec une vitesse  $a' = -p_1$ . Après le rebond, l'espace-temps est décrit par une nouvelle solution de Kasner mais avec différents exposants. Les équations (13.79) impliquent que  $p_1$  va de  $p_1$  à  $p_1 + 2p_1$  et  $p_2$  de  $p_2$  à  $p_2 + 2p_1$ . La relation entre  $t$  et  $r$  est ainsi modifiée en  $t \propto e^{(1+2p_1)r}$ . On se retrouve avec de nouveaux exposants donnés par

$$(13.80)$$

dont la somme reste l'unité, comme prévu. Ainsi le terme de courbure peut être considéré comme agissant pendant une période de temps très courte par rapport aux ères Kasner et induit la modification évoquée ci-dessus dans les exposants  $(p_x, p_y, p_z)$  de sorte qu'on passe d'une ère Kasner à l'autre. L'exposant négatif et le plus petit des exposants positifs changent de signe lors du rebond. Le facteur d'échelle associé à l'exposant négatif avant le rebond passe par un

minimum, tandis que ceux pour lesquels l'exposant devient négatif passe par un maximum. Pendant ce temps, le troisième facteur d'échelle continue de diminuer.

La singularité est donc abordée via une série d'oscillations dont le volume diminue approximativement comme  $t$ . Les phases de Kasner sont de plus en plus courtes et le processus prend la forme d'un processus aléatoire, où le nombre d'oscillations entre tout instant  $t > 0$  et la singularité est toujours infini. La nature de l'approche par la singularité est donc radicalement différente du cas d'un espace-temps de Friedmann-Lemaître mais la singularité existe toujours.

Les séries des phases de Kasner peuvent être obtenues à partir de celle du paramètre ( $u_n$ ) entrant dans les définitions (13.77) des exposants. Ces séries sont définies par la relation récursive

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} \left( 2 - \frac{1}{u_n} \right), \quad u_n = \frac{1}{2} \left( 2 - \frac{1}{u_{n-1}} \right) \quad (1 < u_n < 2). \quad (13.81)$$

Selon la valeur de  $u_i$ , cela peut être périodique ou chaotique.

#### 13.4.1.3 A l'approche de la singularité

L'approche de la singularité peut être très différente selon le modèle de l'Univers que nous supposons au départ. Le fait que notre Univers semble désormais bien décrit par un Univers de Friedmann-Lemaître ne permet donc pas de tirer des conclusions sur la nature et la dynamique de sa phase primordiale. Dans l'exemple précédent, la solution cosmologique proche de la singularité est décrite par une séquence chaotique [30] de solutions de Kasner, même si elle pourrait conduire à un Univers de Friedmann-Lemaître régulier aux grands temps, c'est à dire très éloigné de la singularité.

Le fait qu'il devrait exister une singularité peut être prouvé indépendamment des symétries espace-temps en utilisant des théorèmes généraux sur les singularités, ainsi que des propriétés générales du capteur énergie-impulsion [31]. Comme le montre, en général, l'équation de Raychaudhuri (1.73), si le tourbillon et l'accélération des flux géodésiques disparaissent, que l'Univers est en expansion et que la condition d'énergie forte est satisfaite, alors il doit exister une singularité dans le passé.

Bien sûr, lorsque la courbure de l'Univers augmente à mesure que l'on s'approche de la singularité, on s'attend à ce que des modifications, induites en raison de la nature quantique supposée de la gravité à des échelles proches de l'énergie de Planck, puissent modifier ces conclusions. L'approche de la singularité dans le contexte de la théorie des cordes a été étudiée en détail dans la réf. [32], Il a été constaté que le comportement chaotique existe toujours et qu'il révèle la structure sous-jacente de la théorie.

Dans ce qui suit, nous nous concentrerons sur les modèles dans lesquels la singularité est évitée.

#### 13.4.2 Le scénario pré-Big-Bang

La solution dite pré-Big-Bang est radicalement différente de l'inflation. Cela suppose que l'Univers n'a jamais connu de singularité. En conséquence, on peut poursuivre analytiquement la variable temps avant le début de l'expansion, désormais simplement appelée Big Bang, et se poser des questions sur la phase qui

l'a précédée. La question est alors de savoir s'il est possible que cette phase conduise à un état initial satisfaisant pour l'évolution ultérieure, sans avoir besoin d'inflation après le Big Bang. Ce scénario peut être mis en œuvre, par exemple, grâce au terme cinétique du dilaton, qui peut provoquer une phase similaire à l'inflation, mais avant le Big Bang. Notons que les deux idées ne s'excluent pas : on peut parfaitement imaginer un modèle dans lequel la contribution pré-Big-Bang serait utilisée pour atteindre une phase post-Big-Bang dans un état initial acceptable pour induire une phase ultérieure d'inflation. Dans ce qui suit, nous supposons qu'il n'y a pas de phase inflationniste post-Big-Bang, afin que les effets de l'évolution pré-Big-Bang ne soient pas effacés. Cela nous permet d'évaluer s'ils sont accessibles par observation [33].

Le modèle pré-Big-Bang appartient à cette catégorie de scénarios qui souffre d'instabilité du vide et se trouve donc en proie à d'énormes difficultés. Cependant, outre son intérêt historique, il illustre également un moyen d'implémenter des idées de cordes telles que le dilaton et les dualités, dans un cadre cosmologique.

#### 13.4.2.1 *Superinflation et contraction accélérée*

La singularité primordiale étant désormais remplacée par un régime de grande courbure, la phase pré-Big-Bang doit donc évoluer vers la grande courbure, tout en gardant la propriété d'avoir  $K^2$ , soit  $aH \rightarrow 0$ , de manière à pouvoir résoudre le problème de courbure. Dans une phase inflationniste, la loi de puissance ou expansion exponentielle accélérée donne ce résultat. Une autre façon de l'obtenir est de considérer une phase d'expansion en loi de puissance,  $a \sim t^\beta$  se terminant à  $t \rightarrow 0^-$ , ce qui nécessite ( $\beta < 1$ ). Pour ( $\beta < 0$ ), on trouve que  $\dot{a}$ ,  $\ddot{a}$  et  $H$  sont positifs, c'est une phase d'expansion accélérée, appelée superinflation. Pour  $0 < \beta < 1$ , toutes ces quantités sont désormais négatives, et c'est alors une contraction accélérée. Dans les deux derniers cas, la courbure quadridimensionnelle augmente, ce qui est exactement ce que nous recherchions dans une phase pré-Big-Bang.

Considérons maintenant l'action (13.36) en dimensions  $D$ , dans laquelle nous négligeons le terme de Kalb-Ramond. Pour une configuration cosmologique sans courbure spatiale pour laquelle  $g_{AB} = [fV^2(t), a(t)^2\delta_{ij}]$ , après intégration par parties, on obtient l'action <sup>4</sup>

§ Jordanie

Dans le cadre d'Einstein, cela prend la forme

$$\Lambda_{\text{Einstein}} \sim -2K$$

from which we can quickly identify the change of frame

$$\tilde{a} = a \exp\left(-\frac{\phi}{D-2}\right), \quad \tilde{N} = N \exp\left(-\frac{\phi}{D-2}\right), \quad \text{and} \quad \tilde{\phi} = \phi \sqrt{\frac{2}{D-2}}. \quad (13.84)$$

<sup>4</sup>Note that plugging the ansatz of the solution before varying the action may be dangerous and may lead to spurious solutions.

(13.83)

Les fonctions  $a(t)$  et  $(-t)^{1/(D-2)}$  et  $e^{\pm \phi} = (-t)^{\pm 1/(D-2)}$

'sont des solutions du

équations de mouvement dérivées de l'action (13.82) pour  $t \rightarrow 0^-$ . Ils représentent le cas de surinflation décrit ci-dessus.

Pour savoir à quoi ressemble la solution de surinflation dans les variables de l'autre représentation, il faut choisir une jauge pour la fonction  $N$ . Dans les deux référentiels, on peut supposer la jauge synchrone, définie comme étant celle dans laquelle, dans les variables du référentiel de chaînes,  $N = 1$ . Si l'on veut aussi choisir cette jauge dans le référentiel d'Einstein, cela implique que l'on prenne la coordonnée temporelle  $dt - e^{\langle t \rangle \wedge D \sim 2, \rangle} dt$ , qui, étant donné la solution, peut être intégrée, dans  $t$  oc

0, La solution, dans ce nouveau cadre et la même jauge est donc o.(i) oc  $^1$  et  $e^{\otimes} = (-i)^X \wedge 2, \rangle D \sim 2, \rangle \wedge D \sim 1$ , toujours dans le limite  $t \rightarrow 0^-$ . Cette nouvelle solution représente un cas de contraction accélérée, montrant que les deux cas possibles pré-Big-Bang n'en forment en réalité qu'un, selon la représentation à partir de laquelle on l'envisage ; nous devons quand même décider de ce qui est physiquement observable, et nous supposons généralement que c'est dans le cadre des cordes que nous devons nous placer pour cela (voir la discussion sur les théories scalaires-tensorielles du chapitre 10 pour des considérations analogues). La solution dans les cadres de chaînes et d'Einstein est représentée sur la figure 13.9.

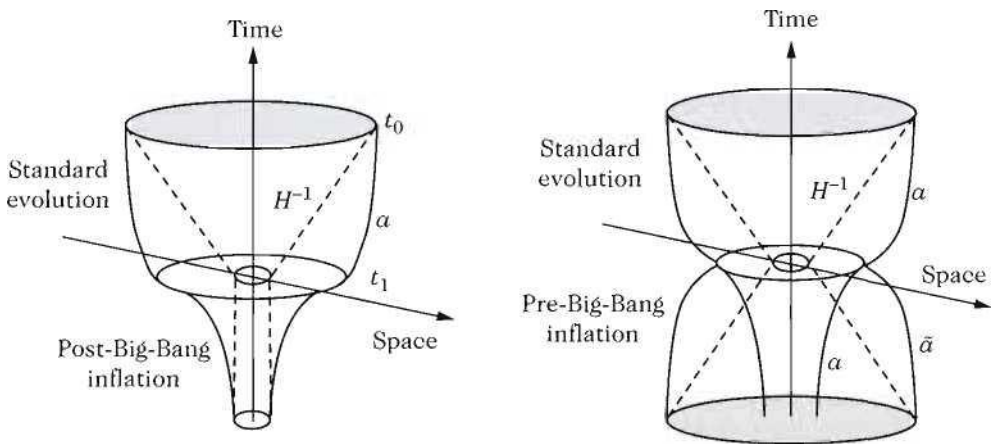


**Fig. 13.9** Evolution du facteur d'échelle dans les cas d'inflation (à gauche) et de pré-Big Bang (à droite). Ces diagrammes montrent l'évolution du facteur d'échelle avec le temps dans les deux situations, ainsi que le facteur de Hubble, quasi constant pendant la phase inflationniste. Dans le diagramme de droite, nous voyons à la fois le cadre d'Einstein, dans lequel le facteur d'échelle passe par a. minimum et rebonds, et le cadre de cordes où il y a une phase superinflationniste. Dans les cas où le facteur d'échelle est une loi de puissance, l'horizon est proportionnel à la longueur de Hubble ; la région ombrée en haut de chaque figure représentant le rayon réel de Hubble de l'Univers, nous voyons comment les deux modèles résolvent différemment le problème de l'horizon.

### 13.4.2.2 Inversion du temps et dualité

Puisque les équations d'Einstein sont invariantes par inversion du temps, nous constatons que si  $a(t)$  est une solution, alors  $a(-t)$  l'est aussi. Cette nouvelle solution correspond à un signe différent du taux d'expansion, de sorte que si une solution décrit une expansion, l'autre décrit une contraction.

Considérant l'action (13.36), toujours sans le terme de Kalb-Ramond, en considérant pour précision une métrique du type Bianchi I [voir métrique (3.121) de la section 3.6.3 du chapitre 3], avec  $D = 1$  facteurs d'échelle différents,  $\gamma$ , et réglage  $= cf - \gamma \ln a$ , alors les équations du mouvement sont

$$= \quad \text{et } 2c - \gamma^2 = H^2. \quad (13h85)$$

$je$   $je$

Ces équations montrent deux types de symétries : d'abord le renversement temporel, désormais défini plus largement par les transformations  $t \rightarrow y - t$ ,  $H \rightarrow y - H$ , et  $\langle f \rangle \rightarrow y - \langle f \rangle$ . Nous constatons également que si nous imposons que  $\langle f \rangle$  soit invariant, alors la transformation  $a \rightarrow a^\gamma$  maintient le système invariant. Cette nouvelle symétrie, appelée *dualité des facteurs d'échelle*, peut être utilisée pour obtenir d'autres solutions à partir d'une seule. En effet, si  $[a_i, \dots, a_p]_i$  est une solution, alors  $\langle c_{ij}^{-1}, \dots, a_i^{-1}, \dots \rangle$  est aussi une solution. Dans le cas de l'isotropie,

$a_i = a$ , et on a une symétrie sous les transformations  $a \rightarrow a^{-1}$  et  $y \rightarrow p - 2(1 - \gamma) \ln a$ , qui ici encore transforme une phase de contraction en phase d'expansion puisque  $H$  change de signe pendant cette phase transformation. En conséquence, pour chaque solution de facteur d'échelle (et de dilaton), on peut en réalité associer quatre solutions,  $a(t)$ ,  $a(-t)$ ,  $a^{-1}(t)$  et  $a^{-1}(-t)$ , dont deux sont en expansion et deux d'entre eux sont en contraction.

Le fait qu'il y ait de telles transformations entre les solutions laisse entendre que la phase d'expansion pré-Big-Bang aurait pu être précédée d'une double phase, soit en contraction, soit en expansion, selon le cadre dans lequel nous travaillons. Connecter l'une à l'autre puis donne une solution complète censée décrire l'évolution cosmologique pour tous les temps.

Une solution intéressante qui illustre les propriétés générales de ces modèles est donnée par  $a =$

$$D \sim 1 \text{ et } d \langle t \rangle = - \ln(t/t_0) \text{ avec ses transformations. Ces quatre}$$

les branches, expansion et contraction, décélérées ou accélérées, sont séparées par une singularité de courbure. Si, à partir de  $cf$ , on revient à la définition du dilaton alors on peut facilement se convaincre que si la courbure augmente, alors le dilaton ne peut augmenter que pour les phases d'expansion. Durant cette phase, la constante de couplage des cordes  $g_s = e^f$  augmente également, de sorte que la solution cosmologique dérive de la solution valable perturbativement : dans le cadre pré-Big-Bang, la configuration initiale est celle d'un système très faiblement vide à cordes couplé.

### 13.4.2.3 Potentiel de dilatation et couplage de matière

On ajoute souvent un terme potentiel  $V(\langle f \rangle)$  pour le dilaton. Bien qu'un tel terme soit absent au niveau perturbatif, il y a de bonnes raisons de supposer qu'il peut apparaître comme un effet non perturbateur dans la théorie des cordes. En outre, un tel terme brise les symétries que nous venons de décrire, à moins que  $V$  ne dépende que de  $d$  [voir ci-dessus (13.85)] au lieu de  $\langle f \rangle$ .

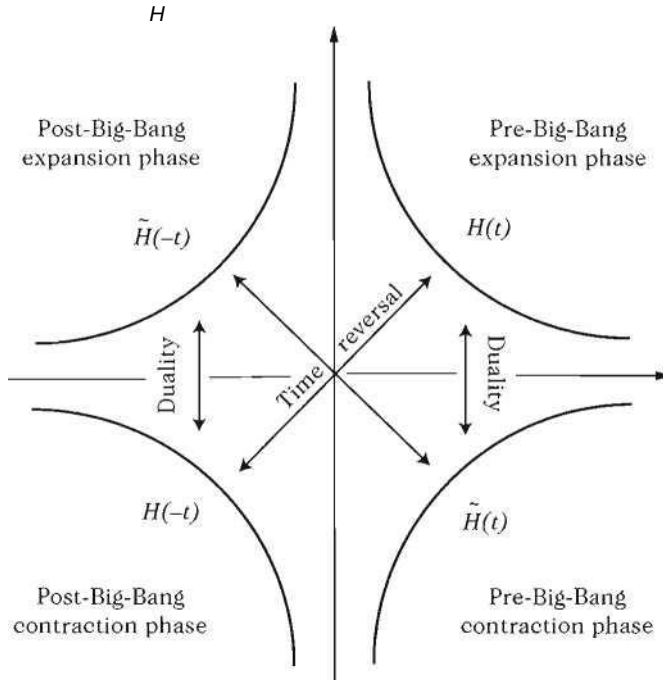


**Fig. 13.10** La cosmologie des cordes donne quatre solutions pour un facteur d'échelle donné, liées les unes aux autres par l'inversion du temps  $t \rightarrow -t$  ou la dualité du facteur d'échelle  $a \rightarrow 1/a$ . Les relations entre les différentes configurations, dualité ou renversement du temps, sont données explicitement pour chaque ensemble de deux configurations.

Pour un potentiel doté de propriétés raisonnables, on peut encore trouver des trajectoires cosmologiques proches de celles décrites par la Fig. 13.11. C'est une caractéristique générique de ce type de scénarios de partir d'une condition initiale dans laquelle le dilaton est dans un état de vide perturbateur. C'est ce qu'on appelle la condition de trivialité asymptotique.

Les symétries de retournement temporel et de dualité sont toujours présentes dans le cas du couplage avec la matière, pour autant que ce couplage ne se réalise qu'avec la gravité et non le dilaton. Il existe encore quatre branches, reliées par les symétries d'échange, mais celles-ci ne sont malheureusement pas si simples à réaliser explicitement. Par exemple, dans le cas d'un fluide parfait, l'équation d'état devrait parfois être inversée  $w \rightarrow -w$ , bien que le modèle résultant soit exempt de pathologie à condition que le modèle initial l'était. On remarque par ailleurs que pour un Univers dominé par le rayonnement en  $D = 4$  dimensions, la solution d'expansion décélérée que l'on obtient est bien celle de la relativité générale  $a \propto 1/\sqrt{t}$ , pour laquelle le dilaton ne dépend pas du temps.

Les modèles Précisés sont discutés en détail dans la réf. [33]. Ils partagent la propriété commune de partir d'une solution asymptotiquement triviale. Une telle condition revient à demander un espace-temps asymptotiquement fiat dans les calculs de solutions à symétrie sphérique en relativité générale, puis à faire évoluer cette configuration jusqu'au régime non perturbateur via un effondrement gravitationnel. En relativité générale, cela finit par produire une singularité, qui n'est évitée ici que par la corrélation non perturbative.



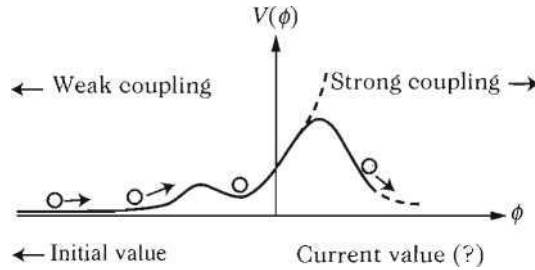


**Fig. 13.11** In a model where the dilaton has a potential term induced by non-perturbative corrections of string theory, its trajectory can be the following: if one sets  $\langle \phi \rangle$  initially in the perturbative vacuum, namely  $\langle \phi \rangle \rightarrow \infty$  where the potential is very weak, then it will move up hill along the potential until it reaches the strong curvature régime. After it has passed through, it then plummets back again to an expanding phase with decreasing curvature. In fact, in this approach, the dilaton can be either stuck at a minimum of its potential or roll down the decreasing part of the potential towards  $\langle \phi \rangle \rightarrow \infty$ .

traductions de la théorie des cordes. Par une transformation de dualité, l'Univers se transforme alors en une phase d'expansion semblable à l'après-Big-Bang.

#### 13.4.2.4 Perturbations

La cosmologie pré-Big-Bang devient prédictive dès lors que sont prises en compte les perturbations invariantes de jauge qu'elle peut produire, afin de pouvoir comparer les spectres attendus avec les observations. Tout d'abord, nous montrons que ces spectres sont identiques qu'ils soient calculés dans la chaîne ou dans le référentiel d'Einstein.

Prenons par exemple une perturbation tensorielle sur la métrique (en jauge synchrone)

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \delta_{mn} dx^m dx^n, \quad (13.86)$$

where  $i, j = 1, \dots, d$ ,  $m, n = d + 1, \dots, d + n$  and the total space-time dimension is  $D = 1 + d + n$ . Tensor perturbations  $h_{AB} = h_{AB}$  with  $V_B h^B = 0 = h_A$  satisfy, for the dimensions whose dynamics is given by the scale factor  $a$  and for each polarization mode  $h$

$$(13.87)$$

dans le référentiel chaîne, en fonction du temps conforme  $dr_j = dt/a$  et dans le référentiel d'Einstein. Ces deux équations semblent différentes à première vue, mais il faut garder à l'esprit qu'elles ne font pas référence aux mêmes grandeurs observables.

$$\tilde{h}'' + \left[ (d-1) \frac{\tilde{a}'}{\tilde{a}} + n \frac{\tilde{b}'}{\tilde{b}} \right] \tilde{h}' - \nabla^2 \tilde{h} = 0,$$

Étant donné la transformation conforme  $g_{AB} = e^{2\sigma} g_{AB}$  et le fait que les deux temps conformes sont les mêmes  $dg = dt/a = dt/\tilde{a} = dg$ , nous avons  $\tilde{a} = ae^{\sigma}$  et  $\tilde{b} = b e^{\sigma}$  de sorte que  $(d-1)(\tilde{a}'/\tilde{a}) + n(\tilde{b}'/\tilde{b}) = (d-1)(a'/a) + n(b'/b)$  — et les deux équations de perturbation sont bien identique. Cette propriété est également valable pour les perturbations scalaires, de sorte que l'on peut choisir un repère plutôt que l'autre pour les besoins du calcul,

sans différence.

Le spectre de perturbation scalaire que l'on peut obtenir avec le scénario pré-Big-Bang est très différent de celui réellement observé. Une solution à cette difficulté consiste à invoquer un mécanisme de courbure grâce auquel le spectre de puissance correct peut être transféré d'un autre champ vers le potentiel de Bardeen. Ensuite, ni l'amplitude ni l'indice spectral ne sont contraints, et donc le modèle est totalement dépourvu de tout pouvoir explicatif. Il illustre cependant le type de scénarios complètement différents qui peuvent être dérivés de la théorie des cordes.

### 13.4.3 Les scénarios cycliques

Une autre catégorie de modèles, également incompatible avec les données, a été proposée, basée sur des dimensions et des branes supplémentaires. Lorsqu'il est comparé au scénario pré-Big-Bang, il illustre l'étonnante variété de possibilités ouvertes par la théorie des cordes. Placé dans une perspective différente, ce fait même semblerait montrer que, même dans le cadre de la cosmologie, la théorie des cordes ne dispose pas encore de prédiction ferme et définie. Ce n'est cependant pas le cas, car la prise en compte des exigences de stabilité [1] limite fortement les possibilités. En fait, hormis la mention des branes, ces scénarios n'ont pratiquement rien de commun avec la théorie des cordes elle-même. On a même avancé qu'ils nécessitaient des fantômes [35].

Le modèle cyclique de l'Univers postule également l'existence d'une phase précédant le Big Bang standard. En fait, elle se compose d'un très grand nombre de ces phases, notre ère cosmologique actuelle n'étant qu'une phase parmi tant d'autres. Contrairement aux modèles d'inflation, ce modèle postule que l'énergie du vide que nous observons actuellement fait partie du scénario. Mais tout comme l'inflation, et contrairement à ce que le terme « cyclique » pourrait suggérer, l'Univers auquel il mène a connu une croissance considérable, mais pas d'un seul coup : au lieu d'une phase d'inflation, notre patch de Hubble provient désormais d'une très petite région de l'espace qui élargi après chaque rebond, la valeur maximale du facteur d'échelle augmentant à chaque cycle.

Nous souhaitons également mentionner la classe des modèles dits *émergents* dont l'existence n'est pas directement liée à la théorie des cordes mais a également la particularité d'éviter la présence d'une singularité [36].

#### 13.4.3.1 Partie ekpyrotique

Concentrons-nous maintenant sur la partie dite ekpyrotique du scénario cyclique. On suppose que notre Univers est une brane formant une limite de l'espace, comme dans le modèle Horava-Witten. L'autre frontière est également une brane de même dimensionnalité que la nôtre. Les deux branes sont censées être capables d'interagir entre elles, et dans la théorie efficace quadridimensionnelle, cette interaction se traduit par un champ scalaire, fonction de la distance entre les branes (c'est-à-dire le radion). Ce champ évolue dans un potentiel supposé découler de manière non perturbatrice de la théorie des cordes, et est représenté sur la figure 13.12. Il n'est pas clair si un tel potentiel d'interaction branale est réellement possible dans la théorie des cordes, mais pour l'essentiel, on dit que le modèle « ne dépend pas de manière cruciale des détails ».

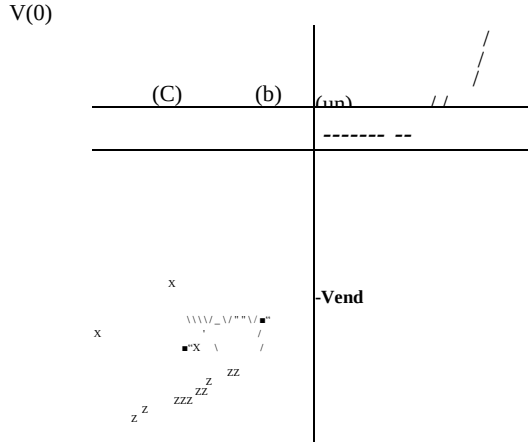


**Fig. 13.12** Effective potential of the four-dimensional effective scalar field, thanks to which the ekpyrotic model describes most phases of the Universe. In région (a), the vacuum energy slowly disappears, until the end of the accelerated expansion period we currently know. In région (b), the potential is négative et exponentielle. Scale invariant perturbations are produced in this phase. Finally, in région (c), the Universe contracts until a singularity, and a new cycle starts. For numerical computations, a form sharing all the required characteristics for such a potential is  $V(\phi) = V_0 (1 - \exp$

$$S_{\text{ekp}} = \int_{\mathcal{M}} d^4x \left[ \frac{1}{2\kappa} R - \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 - V(\phi) \right], \quad (13.89)$$

La théorie efficace quadridimensionnelle est définie par l'action

$$V(\phi) = -V_i \exp \left[ -\frac{4\sqrt{\pi\gamma}}{M_p} (\phi - \phi_i) \right]. \quad (13.90)$$

où le potentiel, pour la phase d'intérêt, devrait avoir la forme montrée en (b) de la Fig. 13.12, qui peut être bien approchée par une exponentielle négative, à savoir Il s'agit, à un signe près, simplement d'un potentiel inflationniste selon la loi de la puissance. Dans (13.90),  $V_i$ ,  $\phi_i$  sont des constantes, tout comme la fonction  $y = 1 - H/H^2$ , lorsque le facteur d'échelle est une solution des équations d'Einstein.

Après la phase dominée par ce potentiel, lorsque les deux branes sont très proches l'une de l'autre et que la collision est sur le point de se produire, le potentiel tend rapidement vers zéro, de sorte que la collision se produit pendant une phase dominée par l'énergie cinétique du champ scalaire. Ceci est équivalent à un fluide dont l'équation d'état est  $w = 1$ , et on observe alors un effondrement gravitationnel suivi d'un rebond après avoir traversé une singularité, et le facteur d'échelle en temps conforme se comporte comme un  $oc |y|^{1/2}$ . Au lieu de résoudre le problème des singularités de la cosmologie standard, ce genre de modèle impliquait toute une série de singularités !

Bien que la singularité obtenue au début de chaque cycle ne puisse être éliminée, il a été avancé qu'elle est suffisamment douce pour être incorporée dans un système cohérent.

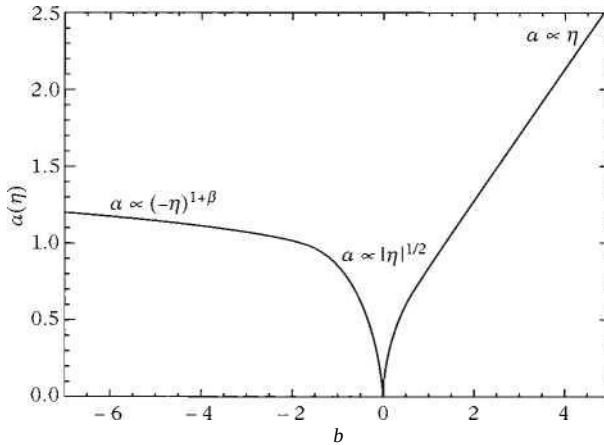


**Fig. 13.13** In the ekpyrotic scénario, the scale factor first goes through a slowly contracting phase,  $a \propto (-\eta)^{1+\beta}$ ,  $\beta > 1$ , and being a scalar field with an exponential potential, it hence produces an almost scale invariant power spectrum. Then, when both branes get closer, the dynamics is dominated by the scalar field kinetic part, until the collision, which in four dimensions is seen as a singularity, and produces entropy. Both branes then start moving away from one another again, producing an expanding phase dominated by the radiation produced during the singularity.

cadre. Il a également été avancé que la perturbation pourrait se propager de manière fluide à travers cette singularité. En fait, l'existence même de la singularité est essentielle pour aboutir à un spectre invariant d'échelle pour les perturbations scalaires. Malheureusement, pour que les perturbations tensorielles ne divergent pas, ce qui briserait la théorie des perturbations, il serait nécessaire de lisser la singularité elle-même. En conséquence, le modèle doit être à la fois singulier et régulier.

### 13.4.3.2 Lois de puissance et spectre primordial

Avec un potentiel exponentiel, la solution pour le facteur d'échelle est  $a = a_0 (\sim r)^{1+\beta}$  pour  $r < 0$  (on place l'origine du temps,  $r = 0$ , au moment de la singularité produite par la collision) avec  $\beta = (2 + \gamma)/(1 + \gamma)$ . La solution pour le champ scalaire est donnée par  $\langle \phi \rangle = \langle \phi \rangle_0 + 5A\phi_0 \gamma/(2(1 + \gamma)) \ln(-r/r_0)$ , et puisque le paramètre Hubble est  $H = (1 + \gamma)/(2r)$ , l'expansion suit une lente contraction tant que  $0 < \gamma < 1$ .

Puisqu'il n'y a qu'un seul champ scalaire dominant la dynamique, l'équation de perturbation est (voir chapitre 8) où le potentiel de Bardeen est exprimé en termes de  $v$  à travers la relation

$$v'' + \left[ k^2 - \frac{(a\sqrt{\gamma})''}{(a\sqrt{\gamma})} \right] v = 0, \quad (13.91)$$

2F      ■

Nous posons ensuite la condition initiale dans le vide de Bunch-Davies (voir chapitre 8), ce qui revient dans ce cas à poser

$$\lim_{fc/(a/l) \rightarrow +\infty} v = - \frac{4V_0 e^{-lfc(\hat{r}_-, \hat{r}_+)}}{Afp \sqrt{2k}} j = - \frac{4V_0 e^{-lfc(\hat{r}_-, \hat{r}_+)}}{Afp \sqrt{2k}}, \quad (13.92)$$

et on trouve la solution exacte  $v = (fc\hat{r})^{1/2} [Ai(J\hat{r})J_{p+1/2}(J\hat{r}j) + A_2(fc)J_{p3+i/2}(fc\hat{r})]$ , à partir duquel le potentiel de Bardeen est exprimé comme

$$\overline{\Delta^2(A; l)}^{1/2} [Ai(fc)J_{/3+3/2}(\hat{r}) - A_2(fc)J_{-/3+3/2}(fc\hat{r})], \quad (13.93)$$

avec

$$A^k = \frac{7TA/8}{A/p \cos f/r} \frac{QAk \sim Tr(3/2)}{k^2} = \frac{7TA/8}{A/p \cos f/r} \frac{QAk \sim Tr(3/2)}{k^2}, \text{ et } A_2(fc) = -iA_1 e^{1/7r/3} \quad (13.94)$$

En prenant la limite  $kr \rightarrow 0$ , on trouve

$$\frac{k^2}{k^2} \sim \frac{-3/2}{k^2} \quad (13.95)$$

avec

$$k^2 \text{ En conséquence, pour } \sim 1, \text{ la partie dominante} \quad (13.96)$$

du spectre (le terme dans  $A_i$ ) est invariante d'échelle,  $\propto k^{-3/2}/r$ . Notez que la situation est très différente de l'inflation selon la loi de puissance ; ce dernier reproduit le même spectre pour  $(3 \sim -2)$ , mais avec un terme du type  $A^{-2}$  et donc qui ne dépend pas du temps, contrairement au précédent.

### 13.4.3.3 En adéquation avec l'agrandissement

Une fois la collision survenue, nous supposons qu'une grande quantité d'entropie est produite, sous forme de rayonnement et de matière, de sorte que le modèle entre directement dans une phase de rayonnement. Les modes de perturbation sont alors ceux d'une phase hydrodynamique, ces modes étant ceux qui vont marquer les fluctuations du fond micro-onde cosmique. Il est donc important de savoir comment ces modes s'expriment par rapport aux modes en phase de contractualisation.

Une hypothèse est alors faite selon laquelle le rebond n'affecte les modes qu'en les mélangeant. En pratique, cela signifie que les modes dominant  $D_{\pm}$  et sous-dominant  $S_{\pm}$  avant (—) et après (+) le rebond sont supposés être liés par une matrice de transition

### 13.4.3.4 Fin d'un cycle

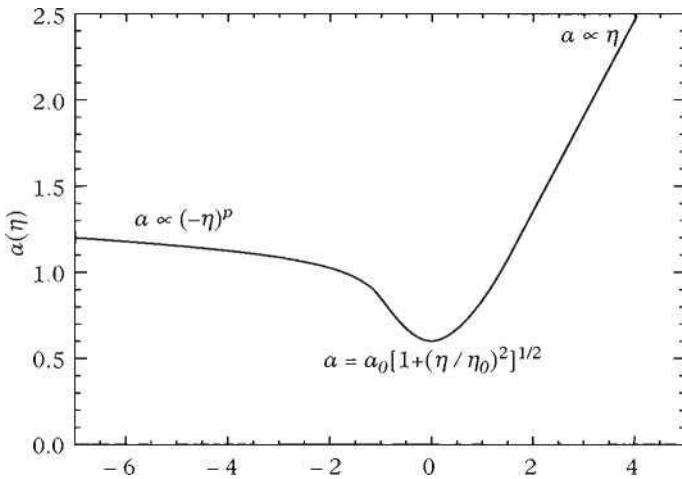
$$\begin{pmatrix} D \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T \\ T_{21} T_{22} \end{pmatrix} \quad (13.97)$$

and we assume the matrix elements to be independent of  $k$ . Note that this hypothesis can be justified to some extent for different cases, but, in general, there is no argument that prevents any form of  $fc$ -mode mixing. As a conséquence, with a scale invariant part in the contracting phase, once modes have been mixed at the bounce, the spectrum of the perturbation in the expanding phase should acquire a scale invariant component in the ekpyrotic scénario.

Après la phase de collision durant laquelle le potentiel s'annule, on suppose que le champ scalaire repart à partir d'une petite valeur du potentiel. Cette phase est d'abord dominée par le rayonnement, puis par la matière et enfin de nouveau par le potentiel du champ scalaire. À l'heure actuelle, à condition de fixer le potentiel à une très petite valeur, on devrait observer une expansion accélérée avec une très petite constante cosmologique, ce qui rend le modèle cohérent avec les observations actuelles. Durant cette période, toutes les perturbations classiques (galaxies et autres structures non linéaires) sont complètement balayées si bien que sur un volume suffisamment grand, qui servira de base au prochain cycle, l'espace devient homogène et isotrope. Cette phase dure jusqu'à ce que le potentiel disparaisse à nouveau, initiant une nouvelle phase de contraction, produisant de nouvelles perturbations invariantes à l'échelle. Ce scénario, aussi séduisant qu'il puisse paraître, présente de nombreuses difficultés non résolues, telles que des instabilités du vide et même des fantômes [35]. Parmi ces difficultés, tout comme pour les modèles pré-Big-Bang, on retrouve le problème de la propagation des perturbations à travers la phase de rebond. Cependant, en raison de ces problèmes, le spectre de perturbation réel ne peut pas être rendu invariant à l'échelle et un mécanisme de courbure doit être invoqué, encore une fois au détriment du pouvoir prédictif.

#### 13.4.4 Rebond régulier et spectre de puissance

Afin de comprendre comment les perturbations peuvent se propager à travers une phase de rebond, supposons qu'elle puisse être régularisée, soit par des effets de cordes, soit par d'autres effets de gravité quantique censés décrire cette période.



*TJ*

**Fig. 13.14** Forme caractéristique d'un rebond régulier permettant la transition entre une phase de contraction lente, produisant une composante invariante d'échelle du spectre, et une phase dominée par le rayonnement.

#### 13.4.4.1 Une classe de modèles

Pour décrire de manière générique les différentes théories capables de donner lieu à un rebond régulier telles que présentées sur la Fig. 13.14, nous divisons l'action totale en deux composantes, l'une géométrique et l'autre décrivant le contenu matière,

$$S_{\text{bounce}} = \int d^4x \sqrt{-g} [Tg_{\mu\nu} (R, R^{\mu\nu}, R^{\mu\nu\rho\sigma}) + T^{\mu\nu} \text{mat} \{P_i; V, \dots, \Phi\}], \quad (13.98)$$

où le premier terme ne dépend que de la métrique et des tenseurs que l'on peut construire avec les tenseurs de Riemann et de Ricci (en supposant que la théorie soit exempte des pathologies que de tels termes produisent habituellement), et toutes les puissances possibles de ces objets contractées en scalaires, tandis que le deuxième terme décrit la dynamique des champs scalaires, fermioniques et autres champs, couplés de manière minimale à  $p_{M1}$ .

Les équations de mouvement de cette action peuvent toujours être mises sous la forme des équations de Friedmann dans l'espace-temps fiat, à savoir

$$(13.99)$$

où  $p_M$  et  $P_M$  sont les valeurs propres du tenseur énergie-impulsion de la matière. Nous avons regroupé les autres termes, grâce aux corrections géométriques des équations d'Einstein, sous les formes génériques  $p_Q$  et  $P_Q$ . La partie matière est alors supposée respecter les conditions énergétiques usuelles, et notamment la condition énergétique faible, selon laquelle

$$P_M + P_M > 0, \text{ et } p_M > 0,$$

condition qui est, en général, respectée au niveau classique par tous les domaines utilisés en cosmologie.<sup>18</sup>

La première condition,  $p + p > 0$ , qui est la condition d'énergie nulle (NEC), doit être violée à un certain stade de l'évolution d'un rebond : nous avons  $K(p+p) = 2(7Y^2 - 7Y')/a^2$ , où  $p$  et  $p$  représentent la somme de chaque contribution. Au moment du rebond lui-même, le facteur d'échelle passe par un minimum, ie on a  $\dot{a} = 0 = a^{-1}$ , et donc aussi  $R = 0$ . D'après ce qui précède, cela implique qu'au moment du rebond,  $p + p < 0$  puisque, pour que ce soit un minimum, il faudrait nécessairement avoir  $7Y' > 0$ .

On prend alors les contributions géométriques permettant de réaliser un rebond. Cela peut être fait de plusieurs manières, via des termes d'ordre supérieur dans la courbure ou par des termes non locaux, tous issus de la théorie des cordes. Une façon très simple de schématiser ce genre de termes est de se placer dans le cas où les sections spatiales sont courbées positivement.

$$P_G = \frac{3K}{no-} \hat{\phi} \text{ and } p_G = \frac{2K}{nax} - 2,$$

with  $K > 0$ . This indeed violates the weak-energy condition.

Nous avons alors

<sup>18</sup>Cela n'inclut pas la catégorie des modèles avec des champs de matière « fantômes » pour lesquels l'énergie n'est pas définie positivement. Un exemple d'un tel modèle est un champ scalaire simple avec seulement une énergie cinétique, mais négative. Cela conduit à une équation d'état  $w = 1$  avec  $p < 0$ . Dans ce cas, on peut parfaitement réaliser un rebond tout à fait régulier avec simplement cette matière et par exemple le rayonnement [34]. À noter que de tels modèles sont très instables et doivent être compris comme de simples approximations classiques à basse énergie d'une théorie sans instabilité.



### 13.4.4.2 Un modèle simple

Equipé du terme de section spatiale de courbure positive écrit ci-dessus, le choix de contenu de matière le plus simple que l'on puisse faire pour étudier un rebond est de prendre un champ scalaire dont la dynamique découle d'un potentiel qui reste à déterminer.

Un Univers à sections spatiales fermées est caractérisé par deux longueurs fondamentales. La première est la longueur de Hubble définie par  $a'/a = \dot{a}/a = H$ , et la seconde est le rayon de courbure des sections spatiales, à savoir  $\mathcal{L}_c = a/\sqrt{\Lambda}$ . On récupère la limite fiat dès  $t_c$  ce qui se voit dans l'équation  $|1 - Q| = \Lambda^2/\Lambda^2$ . Pour les valeurs numériques, comme indiqué au chapitre 4, peuvent être prises  $h = 0,72 \pm 0,05$ , ce qui donne maintenant une distance de Hubble de  $\sim 3000/h \text{ Mpc} \sim 4,2 \pm 0,2 \text{ Gpc}$ . De plus, avec  $Q_g = 1,02 \pm 0,02$ , on retrouve un rayon de courbure qui est le facteur d'échelle actuellement mesuré (Chapitre 4), de l'ordre de  $\sim 15/h \text{ Gpc}$ , cette limite étant fixée par la valeur maximale compatible avec les observations de  $Q_Q$  à un écart type.

Les fonctions propres de l'opérateur de Laplace-Betrami sur les sections spatiales satisfaire la relation (voir chapitre 12)

$$= -n(n+2)/r^2, \quad (13.100)$$

où  $n \in \mathbb{N}$ . Notons ici que la normalisation avec un facteur d'échelle dimensionné  $\sim 2(77)$ , et donc des coordonnées sans dimension  $(77, x^i)$ , conduit à un opérateur  $A$  lui-même sans dimension, de sorte que ses valeurs propres sont pures (en fait nombre entier; avec une convention différente, c'est-à-dire avec une dimension sans dimension, nous aurions eu  $[A] = L^{-2}$  et un facteur supplémentaire  $r^2$  serait apparu sur le membre droit de (13.100).

Le mode  $n = 0$  correspond à une perturbation homogène, tandis que  $n = 1$  est simplement un mouvement global du centre de la 3 sphère ; ce sont donc tous deux des modes de jauge (voir Réf. [4,5] de l'Annexe B). Dans ce qui suit, nous ne considérerons donc que les modes avec  $n > 1$ . En effet pour des valeurs des paramètres cosmologiques en accord avec les données d'observation, nous constatons que pour des distances d'intérêt cosmologique actuel, à savoir celles comprises entre  $10^{22} h \text{ Mpc}$  et  $10^{23}/h \text{ Mpc}$  disons, les valeurs de  $n$  doivent être dans les limites  $30 < n < 3 \times 10^6$  pour la valeur maximale de la densité d'énergie autorisée par les données. Pour la valeur raisonnable  $Q_{rj} \sim 1,01$ , on trouve que  $n$  est compris entre 60 et  $6 \times 10^6$ .

### 13.4.4.3 Perturbations

Lorsqu'on passe à jauger des variables invariantes à la fois pour la géométrie et la matière, l'évolution du potentiel de Bardeen est dictée par (8.140). En définissant  $u$  par (8.141) et  $d$  par (8.142), il prend la forme (8.143). En utilisant les modes propres du Laplacien,  $u$  évolue

$$u'' + \left[ n(n+2) - \frac{\theta''}{\theta} - 3K(1 - c_s^2) \right] u = 0. \quad (13.101)$$

Tout comme pour l'inflation, pour quantifier il faut définir la variable canonique  $v$ . Pour un Univers à courbure non nulle, on peut étendre la définition (8.172) à

$$v = \frac{-a}{\sqrt{1 - 3K \frac{1 - c_s^2}{n(n+2)}}} \left[ \chi + \frac{\varphi'}{\mathcal{H}} \Phi - \frac{K\varphi'}{\mathcal{H}^3 \Gamma} \Phi \right], \quad (13.102)$$

avec  $F = 1 - \text{Ti}'^2 / 71^2 + K [H^1]$ . Cette variable évolue alors selon l'équation

$$\ddot{v} = 0, \quad (13.103)$$

qui généralise (8.179), avec  $z$  maintenant défini par

$$z \equiv \frac{a\varphi'}{\mathcal{H} \sqrt{1 - 3K \frac{1 - c_s^2}{n(n+2)}}} \quad (13.104)$$

Pour les sections spatiales fiat, la variable  $v$  et son équation de mouvement (13.103) se réduisent aux valeurs canoniques. La figure 13.15 montre les différents termes de ces équations pour un rebond régulier dont le facteur d'échelle est approximé par

$$a(t) = a_0 \sqrt{1 + \tan^2 V} \quad (13.105)$$

où le cas présenté ici est symétrique, c'est à dire avec  $\langle 5 = 0$ . La forme (13.105) représente un développement autour de la solution de de Sitter, cette dernière, dans le cas positivement courbé, étant donnée par le facteur d'échelle  $a(t) = \langle \langle \cosh(t/\langle \langle) \rangle \rangle$  en termes de temps cosmique, et  $a(rj) = a_0 \sqrt{1 + \tan^2 V}$  avec l'heure conforme. Développer cette dernière forme autour de  $r/ =$

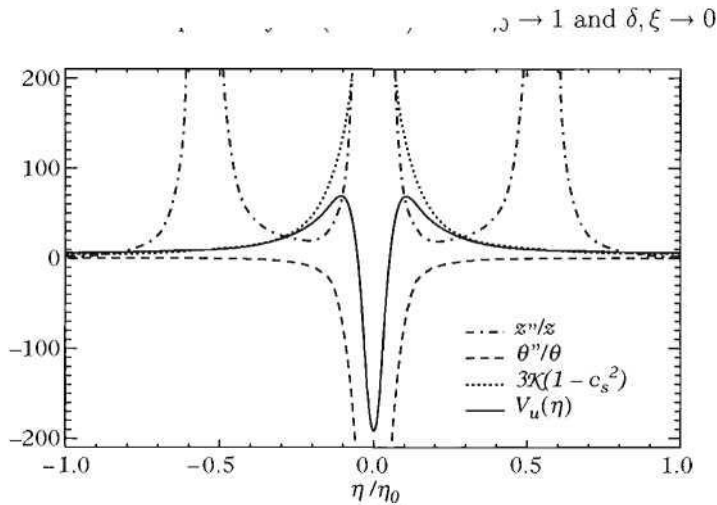


**Fig. 13.15** In the case of a regular symmetric bounce, the functions that appear in the équations of motion of the intermediate variables  $u$  and  $v$  ail have divergences, and only the effective potential for  $u$  sees these divergences compensating exactly.

0 au quatrième ordre conduit précisément à (13.105) avec  $r/($

Les fonctions  $z''/z$ ,  $\theta''/\theta$ ,  $3K(1 - c_s^2)$  et  $V_u$  sont représentées sur la figure 13.15 comme des fonctions de temps autour du moment du rebond pour le paramétrage de (13.105). Bien que la plupart de ces fonctions présentent des divergences soit au point de violation du NEC,

soit au rebond lui-même, on constate que le potentiel  $V_u(r)$  est borné à tout instant, les divergences s'annulant.

#### 13.4.4.4 Propagation

Il est important de noter que pour qu'un tel rebond soit possible, il faudrait que  $r/Q > 1$ , puisque  $\tau/Q < 1$  implique  $\langle \tau \rangle^2 < 0$ , ce qui est impossible. Sans entrer dans trop de détails, on constate alors que le rebond sera décrit de manière satisfaisante en définissant

$$T = 1 - 4, \quad V_0 \quad (13.106)$$

et les perturbations seront affectées par le rebond dans la limite  $T \rightarrow 0$ . Dans cette limite, on trouve alors qu'il existe des régimes dans l'espace des paramètres dans lesquels le potentiel de  $u$  peut être approché par

$$K(\tau) = -C'_{\tau} A_{\tau}(\tau), \quad (13.107)$$

où la constante  $C'_y$  est donnée par  $C'_y = [-57T^2 \mathcal{E}/(8T)]^{1/2}$  et la fonction  $A_y(\tau)$  est une représentation de la distribution de Dirac, c'est à dire

$$\text{hm } AY(\tau) = \dots \quad (13.108)$$

L'équation de perturbation

$$u'' + [n(n+2) + C'_{\tau} \langle \tau \rangle] u = 0, \quad (13.109)$$

est alors facilement résolu en prenant les conditions d'appariement  $[u] = 0$  et  $[u'] = -C_x u(0)$ , qui sont obtenues en intégrant (13.109) à travers le rebond.

Dans les régions où le potentiel peut être négligé, c'est à dire avant et après le rebond, la solution pour  $u$  est qui montre que, dans ce cas extrêmement simplifié, le premier auquel on puisse penser, les modes se mélangent, mais en plus le spectre est modifié.

$$u_i(n, \eta) = A_i(n) f_i(n, \eta) + B_i(n) g_i(n, \eta), \quad i = \text{I, II}, \quad (13.110)$$

with

$$f_{i,\text{II}}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{n(n+2)}}} e^{-i\sqrt{n(n+2)}\eta}, \quad g_{i,\text{II}}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{n(n+2)}}} e^{i\sqrt{n(n+2)}\eta}, \quad (13.111)$$

the oscillation modes. The relation between the modes before and after is then easily obtained, and we find

$$\begin{pmatrix} A_{\text{II}} \\ B_{\text{II}} \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} -57T^2 \mathcal{E} & 1 \\ 32n(n+2) & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{\text{I}} \\ B_{\text{I}} \end{pmatrix} \quad (13.112)$$

Encore un autre modèle, basé sur la cosmologie quantique et un simple fluide parfait, dans ce cas presque semblable à de la poussière (c'est-à-dire avec une équation d'état très petite mais non nulle, trouvée de l'ordre  $w < 8 \times 10^{-4}$  pour assurer un ajustement possible avec l'amplitude du spectre de puissance), a obtenu, à partir du vide pur, un spectre de perturbations invariant à l'échelle. En outre, on constate également que la relation de cohérence entre les modes scalaire

et tensoriel est modifiée en  $T/S \propto y/n_s - 1$  [37]. Ce type de modèle souffre cependant de l'exigence que l'Univers, au rebond, devrait être environ 20 ordres de grandeur plus grand que la longueur de Planck.

#### 13.4.4.5 Oscillations dans le spectre de puissance angulaire

Dans la catégorie des modèles de rebond discutée ci-dessus, une prédiction majeure est que les modes d'oscillation  $\exp(+i/c\tau)$  et  $\exp(-ikrf)$  sont excités juste après le rebond. En conséquence, nous nous attendons à des oscillations dans le spectre primordial, dues aux modes de compression et de dilatation. Le rebond nécessite toutefois une courbure positive pour se produire réellement, et donc une phase d'inflation ultérieure. Cela signifie que le spectre primordial est nécessairement de la forme

$$|c^3|_{\text{BST}}|^2 = A(k) \{a + \frac{1}{3}\cos\left(\frac{k}{k_*}\right)\} \quad (13.113)$$

où l'amplitude est une loi de puissance  $A(k) \sim A k^n$ , recevant une contribution supplémentaire de la phase de gonflement, et la fonction  $|c^3|_{\text{BST}}|^2$  dépend de chaque modèle et de la manière dont le rebond est connecté à la phase ultérieure. Les paramètres  $a$  et sont constants en fonction de la teneur en matière, des paramètres de microscopie et des paramètres de rebond. Pour un modèle donné, une longueur caractéristique apparaît, exprimée par  $k_*$ , qui reflète l'échelle à laquelle les oscillations se produisent dans le spectre primordial. Il est intéressant de noter qu'un spectre primordial fortement oscillant ayant  $a = 0$ , comme illustré sur la figure 13.16, peut s'adapter aux données par ailleurs lisses, comme le montre également la figure. Cela vient en fait du fait que pour obtenir le spectre de fluctuation de température observable, il faut intégrer depuis la surface de la dernière diffusion jusqu'à maintenant, puis lisser différentes directions pour obtenir les variables statistiques que nous observons.

Une fois développé pour déterminer l'effet sur les observations des fluctuations du fond diffus cosmologique, un tel spectre induit des oscillations superposées au spectre standard. Les prédictions typiques de cette catégorie de modèles sont illustrées dans la Fig. 13.17. Encore une fois, et de manière assez surprenante, ces prédictions peuvent être faites en accord avec les observations [38]. Et un rebond pourrait également fournir de nouvelles façons [39] de résoudre les énigmes cosmologiques habituelles !

La cosmologie des supercordes [2—4] est, pour de nombreuses raisons, actuellement un domaine en expansion rapide. Premièrement, il existe une multitude de faits théoriques indiquant que l'hypothèse des cordes pourrait enfin nous permettre de comprendre la gravité au niveau quantique. Il est intéressant de noter que parmi les développements récents de la théorie des cordes figure ce qu'on appelle l'idée de « paysage » [40], par laquelle on entend la représentation de tous les états de vide possibles ; la structure de ce paysage pourrait fournir une solution de type anthropique au problème de la constante cosmologique [41] : notre Univers ferait alors partie d'un « multivers » plus vaste,

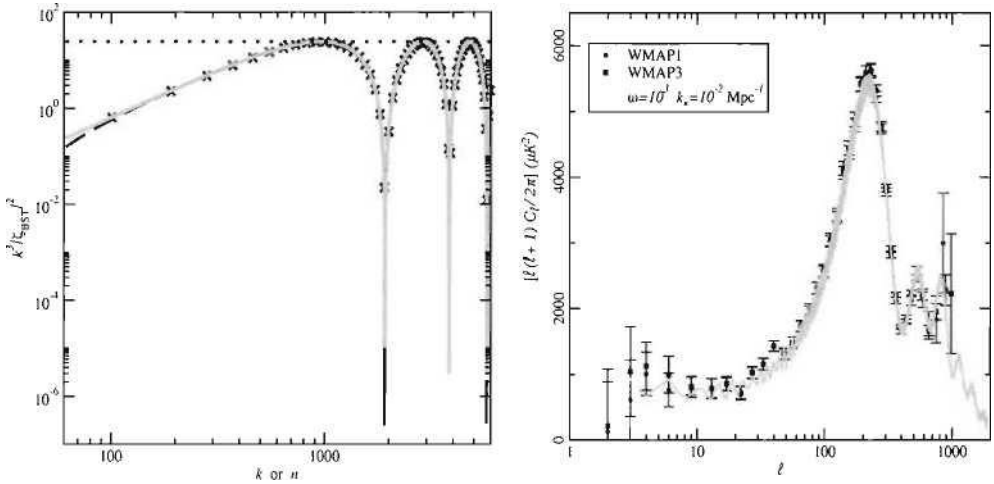


**Fig. 13.16** Primordial power spectrum of the curvature perturbation (left) and the corresponding best fit of the angular power spectrum of the cosmic microwave background anisotropies (right) of the WMAP data in a bouncing scénario. Figure from Ref. [38], courtesy C. Ringeval.

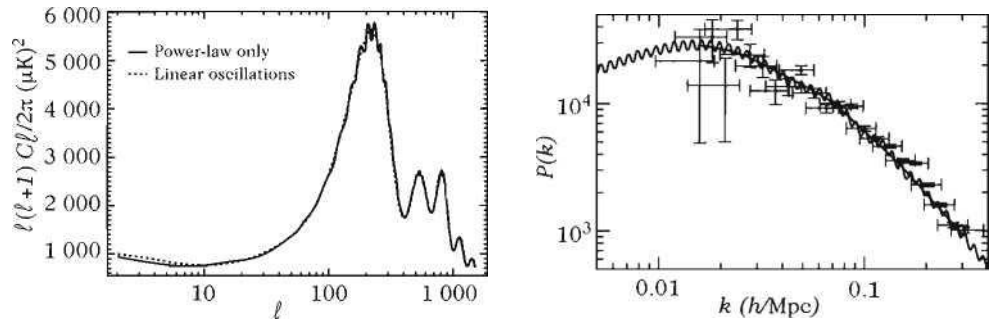


**Fig. 13.17** Angular power spectrum of the cosmic microwave background anisotropies (left) and matter power spectrum (right) in a bouncing scénario. The frequency function of the oscillations / in (13.113) is linear with a period  $k^*$  much lower than that of Fig. 13.16.

ou, en d'autres termes, un parmi tant d'autres. Il est intéressant de noter que le fait que cette difficulté de la théorie des cordes puisse devenir une vertu a été réalisé très tôt dans l'histoire de l'inflation [42].

En dehors de cette possibilité à faible énergie, les effets d'une telle théorie ne peuvent malheureusement se produire qu'à des échelles d'énergie considérables, bien au-delà de tout ce qui est imaginable dans l'état actuel de la technologie des accélérateurs. Il semble donc naturel de considérer le seul domaine de la physique où de telles énergies ont pu exister. De plus, puisqu'il semble possible que les effets de ce qui s'est passé à ces époques aient laissé des signatures, la cosmologie primitive peut enfin être considérée comme un apport expérimental à la théorie des cordes, raison pour laquelle il est important d'étudier toutes les conséquences

possibles au niveau cosmologique. . Alors que les développements théoriques fournissent rapidement de nouvelles idées et ouvrent de nouvelles possibilités intrigantes et fascinantes, les futurs projets d'observation pourraient révéler quelques indices sur le comportement ultime de la nature !



# Les références

- [1] S. KACHRU, R. KALLOSH, A. LINDE et SP TRIVEDI, <sup>1</sup> 'De Sitter vacua en théorie des cordes', *Phys. Rév. D* **68**, 046005, 2003.
- [2] L. MCALLISTER et E. SILVERSTEIN, « String Cosmology : A Review », *Gen. Rel. Grav.* **40**, 565, 2008.
- [3] D. BAUMANN et L. MCALLISTER, « Avancées de l'inflation dans la théorie des cordes », arXiv : 0901.0265 [hep-th], 2009.
- [4] R. KALLOSH, « Vers la cosmologie des cordes », *Prog. Théorique. Phys. Supplément.* **163**, 323, 2006.
- [5] T. DAMOUR et A. POLYAKOV, « Le dilaton des cordes et le principe du moindre couplage », *Nucl. Phys. B* **423**, 532, 1994.
- [6] G. ESPOSITO-FARÈSE, *Théorie de Kaluza-Klein et gravitation quantique*, thèse de doctorat de l'université Aix-Marseille II, 1989.
- [7] JM OVERDUIN et PS WESSON, 'Kaluza-Klein Gravity', *Phys. Rep.* **283**, 303, 1997.
- [8] B. ZWIEBACH, *Un premier cours de théorie des cordes*, Cambridge University Press, 2004 ; J. POLCHINSKI, *Théorie des cordes*, Cambridge University Press, 1998 ; MB GREEN, JH SCHWARZ et E. WITTEN, *Théorie des supercordes*, Cambridge University Press, 1987.
- [9] Reportez-vous au site Web de Sunil Mukhi,  
<http://theory.tifr.res.in/mukhi/Physics/string2.html> .
- [10] R. BRANDENBERGER et C. VAFA, « Les supercordes au début de l'Univers », *Nucl. Phys. B* **316**, 391, 1989.
- [11] S. ALEXANDER, R. BRANDENBERGER et D. EASSON, « Les gaz branes au début de l'Univers », *Phys. Rév.D* **62**, 103509, 2000.
- [12] R. MAARTENS, « Gravité du monde branique », *Living Rev. Relativity* **7**, 7, 2004.
- [13] D. LANGLOIS, « Cosmologie des branes : une introduction », *Prog. Théorique. Phys. Supplément.* **148**, 181, 2003.
- [14] P. BRAX et C. VAN DE BRUCK, « Cosmologie et mondes braniques : une revue », *Classe. Quant. Grav.* **20**, R201, 2003.
- [15] P. BRAX, C. VAN DE BRUCK et A.-C. DAVIS, « Cosmologie du monde des branes », *Rept. Programme. Phys.* **67**, 2183, 2004.
- [16] R. DICK, « Mondes braniques », *Classe. Quant. Grav.* **18**, RI, 2001.
- [17] P. HORAVA et E. WITTEN, « Dynamique des cordes hétérotiques et de type I à partir de onze dimensions », *Nucl. Phys. B* **460**, 506, 1996.
- [18] N. ARKANI-HAMED, S. DIMOPOULOS et G. DVALI, « Le problème de la hiérarchie et les nouvelles dimensions au millimètre », *Phys. Lett. B* **429**, 263, 1998.
- [19] RM WALD, *RELATIVITE générale* , University of Chicago Press, 1984.



- [20] P. BINÉTRUY, C. DEFFAYET et D. LANGLOIS, 'Cosmologie non conventionnelle à partir d'un univers brane', *Nucl. Phys. B* **565**, 269, 2000.
- [21] JE LIDSEY, « Inflation et mondes braniques », *Lect. Notes Phys.* **646**, 357, 2004 ; JE LIDSEY, D. WANDS et EJ COPELAND, « Cosmologie Superstring », *Phys. Rapport* **337**, 343, 2000.
- [22] RA BATTYE, B. CARTER, A. MENNIM et J.-P. UZAN, «Équations d'Einstein pour un monde de branes asymétrique», *Phys. Rév.D* **64**, 124007, 2001.
- [23] N. DERUELLE et T. DOLEZEL, « Cosmologies brane versus shell dans les théories d'Einstein et d'Einstein-Gauss-Bonnet », *Phys. Rév.D* **62**, 103502, 2000.
- [24] C. CHARMOUSIS et R. ZEGERS, 'Conditions d'appariement pour une brane de codimension arbitraire', *JHEP* **0508**, 075, 2005.
- [25] A. MENNIM et RA BATTYE, « Expansion cosmologique sur un monde brane-dilatonique », *Classe. Quant. Grav.* **18**, 2171, 2001.
- [26] C. RINGEVAL, P. PETER et J.-P. UZAN, 'Localisation de fermions massifs sur la brane', *Phys. Rév. D* **65**, 044016, 2002.
- [27] G. DVALI, G. GABADADZE et M. PORRATI, 'Gravité 4D sur une brane dans l'espace Minkowski 5D', *Phys. Lett. B* **485**, 208, 2000.
- [28] V. BELINSKY, E. LIFCHITZ et I. KHALATNIKOV, « Approche oscillatoire d'un point singulier de la cosmologie relativiste », *Adv. Phys.* **19**, 525, 1970 ; *Sov. Phys. JETP* **35**, 383, 1972 ; *Av. Phys.* **31**, 639, 1982.
- [29] L. LANDAU et E. LIFSHITZ, *Cours de physique théorique*, Volume 2, Pergamon Press, 1976.
- [30] E. LIFCHITZ, I. LIFCHITZ et I. KHALATNIKOV, « Analyse asymptotique du mode oscillatoire d'approche d'une singularité dans des modèles cosmologiques homogènes », *Sov. Phys. JETP* **32**, 173, 1971.
- [31] SW HAWKING et GFR ELLIS, *La structure à grande échelle de l'espace-temps*, Cambridge University Press, 1973.
- [32] T. DAMOUR, M. HENNEAUX et H. NICOLAI, 'Billard cosmologique', *Classe. Gravité quantique.* **20**, R145, 2003.
- [33] <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.79.111113> , Google Scholar Crossref , CAS 20. M. GASPERINI et G. VENEZIANO , *Phys. représentant Rév.* **373** , 1 ,
- [34] P. PETER et N. PINTO-NETO, « Perturbations primordiales dans un modèle d'univers rebondissant non singulier », *Phys. Le Rév. D* **66** , 063509 ,
- [35] <http://dx.doi.org/10.1037/0033-295X.101.1.16> R. KALLOSH, JU KANG, A. LINDE et V. MUKHANOV , *JCAP* **0804**, 018,
- [36] GFR ELLIS et R. MAARTENS, « L'univers émergent : cosmologie inflationniste sans singularité », *Classe. Quant. Grav.* **21**, 223, 2004.
- [37] P. PETER, E. PINHO et N. PINTO-NETO, « Tensor perturbations in quantum cosmological background », *JCAP* **07**, 014, 2005 ; P. PETER, E. PINHO et N. PINTO-NETO, « Modèle non inflationniste avec perturbations cosmologiques invariantes d'échelle », *Phys. Rév. D* **75**, 023516, 2007.
- [38] FT FALCIANO, M. LILLEY et P. PETER, « Un rebond classique : contraintes et conséquences », *Phys. Rév. D* **77**, 083513, 2008.
- [39] P. PETER et N. PINTO-NETO, « Cosmologie sans inflation », *Phys. Rév. D* **78**, 063506, 2008.

Références 795

- [40] R. BOUSSO et J. POLCHINSKI, « Quantification des flux à quatre formes et neutralisation dynamique de la constante cosmologique », *JHEP* **06**, 006, 2000 ; SB GIDDINGS, S.

KACHRU et J. POLCHINSKI, « Hiérarchies à partir de flux dans les compactifications de cordes », *Phys. Rev. D* **66**, 106006, 2002 ; L. SUSSKIND, « Le paysage anthropique de la théorie des cordes » arXiv :h.ep-th./0302219, 2003 ; M. DOUGLAS, 'Les statistiques des cordes /  $M$  - théorie vacua', *JHEP* **05**, 046, 2003.

- [41] Q.-G. HUANG et S.-HH TYE, « Le problème de la constante cosmologique et l'inflation dans le paysage des cordes », arXiv : 0803.0663, 2008 et les références qui y sont contenues.
- [42] AD LINDE, « Univers inflationniste chaotique auto-reproducteur existant éternellement », *Phys. Lett. B* **175**, 395, 1986.

# Annexe A

## Valeurs numériques

### A1 Constantes physiques

|                                          |                                              |                                                                                                                                  |
|------------------------------------------|----------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Vitesse de la lumière                    | $c$                                          | $2.997\,9245\,8 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \text{ (exact)}$                                                       |
| Constante de Newton                      | $G_N$                                        | $6.674\,28(67) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$                                             |
| constante de Planck                      | $h$                                          | $96(33) \times 10^{-31} \text{ J} \cdot \text{s}$                                                                                |
| Constante de Planck réduite              | $\hbar = \frac{h}{2\pi}$                     | $1,054\,571\,628\,(53) \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} = 6,582\,118\,99(16) \times 10^{-22} \text{ MeV} \cdot \text{s}$ |
| Constante de Boltzmann                   | $k_B$                                        | $1.380\,650\,4(24) \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$                                                                |
| Constante de Fermi                       | $(f_i)^3$                                    | $1,166\,37(1) \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$                                                                                   |
| Perméabilité du vide                     | $\mu_0$                                      | $4\text{-}7\text{T} \times 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{A}^{-2}$                                                                |
| Permittivité du vide                     | $\epsilon_0 = 1/\mu_0 c^2$                   | $8,854\,187\,817 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$                                                                               |
| Constante de structure fine              | $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$ | $1/137.035999679(94)$                                                                                                            |
| Constante de Rydberg                     | $R_\infty = m_e c^2 a^2 / 2$                 | $13.605\,691\,93(34) \text{ eV}$                                                                                                 |
| Rayon de Bohr                            | $a_0 = \hbar^2 / m_e e^2$                    | $5,2918 \times 10^{-11} \text{ m}$                                                                                               |
| Section efficace de diffusion de Thomson | $\sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_e^2$            | $67 \times 10^{-30} \text{ m}^2$                                                                                                 |

### A. 2 Grandeurs astrophysiques

|                                |                                     |                                                                                |
|--------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|
| Masse solaire                  |                                     | $1,988\,44(30) \times 10^{30} \text{ kg}$<br>$1,189 \times 10^{57} \text{ Mp}$ |
| Rayon solaire (équatorial)     | $R_\odot$                           | $6.961 \times 10^8 \text{ m}$                                                  |
| Rayon solaire de Schwarzschild | $R_{\text{Sch}} = 2G M_\odot / c^2$ | $2.953\,250\,08 \text{ km}$                                                    |
| Luminosité solaire             | $L_\odot$                           | $3,846(8) \times 10^{26} \text{ W}$                                            |

## A. 3 unités

### A. 3.1 Unités naturelles

Lors de l'utilisation du Système international d'unités (SI), les lois de la physique peuvent devenir assez complexes, impliquant de nombreuses constantes, telles que la constante de Planck  $h$ , la vitesse de la lumière dans le vide  $c$  ou la constante gravitationnelle de Newton  $G_N$  [ 1,2 ].

Il s'avère que l'on peut choisir un système d'unités plus adéquat qui simplifie grandement les calculs. Ceci est réalisé en imposant que la valeur numérique de certaines constantes soit l'unité. En général, et c'est ce qui a été supposé en grande partie dans ce livre (sauf indication contraire), les cosmologistes utilisent le système d'unités dans lequel «  $h = c = 1$  » (ce qui signifie que cela définit un système d'unités dans lequel la valeur numérique la valeur de la constante de Planck et de la vitesse de la lumière sont égales à 1, définissant ainsi ce système d'unités par rapport au SI), cette dernière égalité impliquant par exemple que le temps et les distances soient exprimés dans les mêmes unités. Dans ce système, les masses et les énergies sont également exprimées dans les mêmes unités, et toutes deux sont inverses aux unités d'espace et de temps. Ceci est résumé ci-dessous.

$$n = c = r [L] = [T] - [W^1] = [E^{-1}]. \quad (\text{A.I})$$

En choisissant le MeV ( $10^6$  eV) ou le GeV ( $10^9$  eV) comme unité de base, nous avons le facteur de conversion  $1 \text{ GeV} \sim 1,6 \times 10^{-10} \text{ J}$ , et il est généralement facile de retrouver les facteurs numériques dans le système habituel en utilisant  $hc \sim 200 \text{ MeV} \cdot \text{Fm}$ .

Afin de fixer complètement le système d'unités, il faut utiliser une troisième constante. Par exemple, on peut imposer que la valeur numérique de la constante de Newton  $G_N$ , égale à l'inverse de la masse de Planck au carré dans le système ci-dessus, soit fixée à l'unité. Dans ce cas, on nettoie avec les unités dites de Planck. Dans ce système, le temps, la masse, l'énergie et la distance sont tous sans dimension, ce qui signifie que les nombres trouvés sont en unités de longueur, de temps et de masse de Planck, à peine

$$\ell_P = \sqrt{\frac{\hbar G_N}{c^3}}, \quad t_P = \sqrt{\frac{\hbar G_N}{c^5}}, \quad M_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G_N}}.$$

Cela nous permet de définir la température de Planck comme  $T_P = y/hc^5 / (G_N k_B)$ . En fait, la constante de Boltzmann, qui relie simplement la température à l'énergie, peut être comprise comme fournissant une définition des unités de température. Par conséquent, on peut également poser  $k_B = 1$  sans conséquence physique. Avec de telles unités, toutes les constantes physiques dimensionnelles disparaissent effectivement des équations.

A. 3.2 Facteurs de conversion

|                    |                                                       |                                                                                                                      |
|--------------------|-------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Planck mass        | $M_p = \frac{1}{c^2} \sqrt{\frac{\hbar c^3}{8\pi G}}$ | $1.220\,892(61) \times 10^{19} \text{ GeV}/c^2$<br>$= 2.176\,44(11) \times 10^{-8} \text{ kg}$                       |
| Planck finie       | $t_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}}$                    | $5.391\,24(27) \times 10^{-44} \text{ s}$                                                                            |
| Planck length      | $\lambda_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}$              | $1.616\,252(81) \times 10^{-35} \text{ m}$                                                                           |
| Planck température | $T_p = \frac{1}{k_B} \sqrt{\frac{\hbar c^5}{8\pi G}}$ | $1.416\,785(71) \times 10^{32} \text{ K}$                                                                            |
| Planck <—>SI       | 1 GeV                                                 | $1.602\,2 \times 10^{-10} \text{ J}$<br>$1.160\,5 \times 10^{13} \text{ K}$<br>$1.782\,7 \times 10^{-27} \text{ kg}$ |
|                    | 1 GeV <sup>-1</sup>                                   | $1.973\,3 \times 10^{-16} \text{ m}$<br>$6.652\,2 \times 10^{-25} \text{ s}$                                         |
| 1 cm               | =                                                     | $5.068 \times 10^{13} \text{ GeV}^{-1}/\hbar c$                                                                      |
| 1 s                | =                                                     | $1.519 \times 10^{24} \text{ GeV}^{-1}\hbar c$                                                                       |
| 1 g                | =                                                     | $5.608 \times 10^{23} \text{ GeV}/\hbar c^2$                                                                         |
| 1 erg              | =                                                     | $6.242 \times 10^2 \text{ GeV}$                                                                                      |
| 1 J                | =                                                     | $6.242 \times 10^9 \text{ GeV}$                                                                                      |
| 1 K                | =                                                     | $8.618 \times 10^{-14} \text{ GeV}^{-1}/\hbar c$                                                                     |
| Astronomical unit  | AU                                                    | $1.495\,978\,706\,60(20) \times 10^{11} \text{ m}$                                                                   |
| parsec             | pc                                                    | $3.085\,677\,580\,7(4) \times 10^{16} \text{ m}$                                                                     |
| sidereal year      | y>-                                                   | $3.155\,815 \times 10^7 \text{ s}$                                                                                   |
| erg                | erg                                                   | $10^{-7} \text{ J}$                                                                                                  |
| gauss              | gauss                                                 | $10^{-4} \text{ T}$                                                                                                  |

A.4 Physique des particules

|                                    |             |                                                                               |
|------------------------------------|-------------|-------------------------------------------------------------------------------|
| Charge électronique                | $e$         | $-1,602\,176\,487(40) \times 10^{-19} \text{ C}$                              |
| Masse électronique                 |             | $0,510\,998\,910(13) \text{ MeV}/c^2 = 9,109\,389 \times 10^{-31} \text{ kg}$ |
| Masse du proton                    |             | $938,271\,013(23) \text{ MeV}/c^2$<br>$1,672\,622 \times 10^{-27} \text{ kg}$ |
| Rapport de masse proton/électron   | $m_p/m_e$   | $1836,152\,672\,47(80)$                                                       |
| Différence de masse proton-neutron | $m_p - m_n$ | $1,293\,318(9) \text{ MeV}/c^2$                                               |
| Rapport de masse neutron/proton    | $m_n/m_p$   | $1,001\,378\,419\,18(46)$                                                     |
| Masse d'un noyau de deutérium      | $m_d$       | $1875,612\,793(47) \text{ MeV}/c^2$                                           |
| Durée de vie des neutrons          | $T_n$       | $885,7(0,8) \text{ s}$                                                        |

## A.5 Grandeurs cosmologiques

|                                                |                                                    |                                                                                                                                                                          |
|------------------------------------------------|----------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Constante de Hubble                            | $h$                                                | $100 h \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$<br>$0,72 \pm 0,05$                                                                                                   |
| L'heure de Hubble                              | $= 1/h$                                            | $9,7776 \text{ heures} \times 10^9 \text{ ans}$<br>$3\text{h}09 \text{ h}\cdot^{-1} \times 10^{17} \text{ s}$                                                            |
| Distance de Hubble                             | $D H_0 =$                                          | $2997,9 \text{ h}\cdot^{-1} \text{Mpc}$                                                                                                                                  |
| Densité critique aujourd'hui                   | Petit $\frac{3H^2}{8\pi G_N}$                      | $1,878\,37(28) \times 10^{29} \text{ h}^2 \text{ g cm}^{-3}$<br>$8,0992 \times 10^{47} \text{ h}^2 \text{ GeV}^4$<br>$1,0540 \times 10^4 \text{ h}^2 \text{ eV cm}^{-3}$ |
| Température du CMB                             | $\hat{A}$                                          | $2,7256 \text{ }_{2,7\text{K}}$<br>$2,348 \times 10^{-4} \text{ }_{02,7 \text{ eV}}$                                                                                     |
| Densité du nombre de photons CMB               | $72 \wedge 0$                                      | $410.446 \text{ h}^3 \text{ cm}^{-3}$                                                                                                                                    |
| Densité d'énergie des photons CMB              | $\text{PqO}$                                       | $4.640 \text{ h}^3 \times 10^{34} \text{ }_{0^4} \text{ g cm}^{-3}$<br>$0,260402,7 \text{ }_{<=V} \text{ cm}^{-3}$<br>$2,469 \text{ h}^3 \times 10^{-5} \text{ }_{0^4}$  |
| Température des neutrinos                      | $T''_o = (d/l)^{1/3} \wedge$                       | $1,9272 \text{ }_{62,7\text{K}}$                                                                                                                                         |
| Densité numérique des neutrinos (par espèce)   | $72 \wedge 0 - (3/11)72 \wedge 0$                  | $108.890 \text{ h}^3 \text{ cm}^{-3}$                                                                                                                                    |
| Densité énergétique des neutrinos (par espèce) | $\text{PiA} >$                                     | $0,2271 \text{ h}^3 \text{ cm}^{-3}$                                                                                                                                     |
| Entropie                                       | $\text{donc} = 7,0394 \text{ h}^3 \text{ cm}^{-3}$ | $2889.2 \text{ e}^3 \text{ h}^3$                                                                                                                                         |
| Densité d'énergie du rayonnement               | Pro $\text{Qro}/l^2$                               | $7,8042 \times 10^{-34} \text{ }_{02,7 \text{ g}} \text{ cm}^{-3}$<br>$4.153 \text{ h}^3 \times 10^{53} \text{ }_{\text{eV}} \text{ cm}^{-3}$                            |

|                               |                                                       |                                                          |
|-------------------------------|-------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| Redshift à égalité            | $1 + 2_{\text{eq}}$                                   | $2,4 \times 10^4 \text{ h}^3 \text{ cm}^{-3}$            |
| Température à égalité         | $\wedge_{\text{eq}} - 7 \wedge 0 (1 + 2_{\text{eq}})$ | $6,55 \times 10^4 \text{ h}^3 \text{ cm}^{-3} \text{ K}$ |
| Redshift au découplage        | $1 \text{ h}^{-2} \text{ }_{\text{déc.}}$             | $1100$                                                   |
| Température CMB au découplage | $\wedge_{\text{déc}}$                                 | $0,25502,7 \text{ eV}$                                   |

## A.6 Spectre électromagnétique

Le fond diffus cosmologique représente en réalité la composante dominante de tous les rayonnements présents dans l'Univers. Le fond cosmique complet est constitué du (grand) volume moyen de tous les rayonnements électromagnétiques présents dans l'Univers. Plus précisément, il est défini comme le fond isotrope observé une fois soustraits les flux quasi-isotropes de notre système solaire et de la galaxie.

La distribution spectrale de l'énergie a été observée depuis la bande radio jusqu'à la bande des rayons X et, comme indiqué précédemment, la composante micro-onde domine largement toutes les autres contributions, contenant environ 93 % de toute l'énergie. Ce fond cosmologique de micro-ondes est décrit à la section 4.4.2.

Le fond radio contient la somme de toutes les radiosources extragalactiques et a été historiquement la première contribution à avoir été observée, bien qu'il contribue très peu au contenu total de l'énergie radiative. Le composant radiologique, quant à lui,

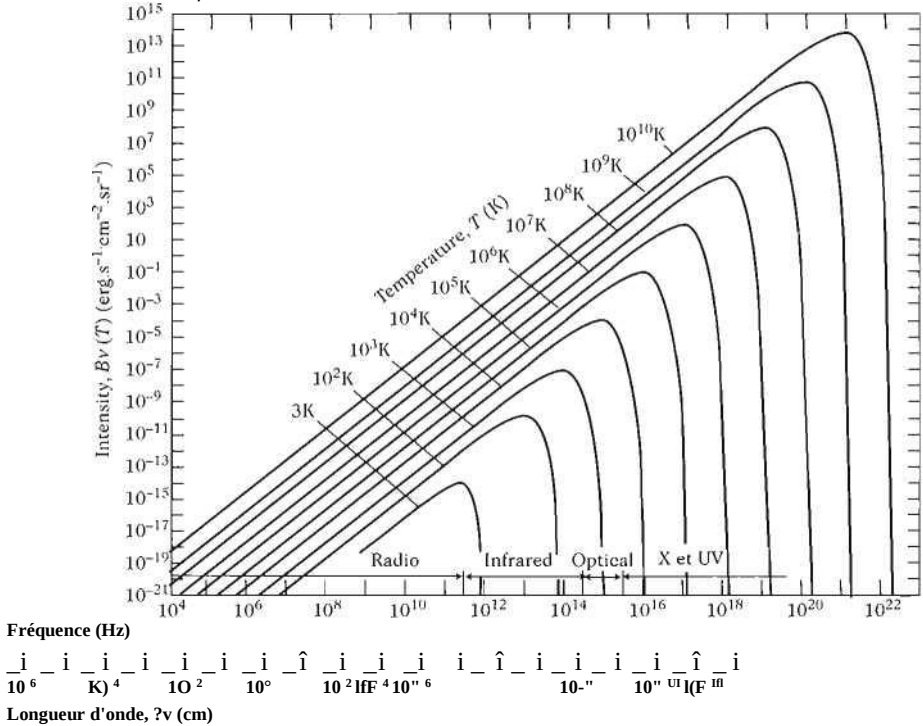


**Fig. A1** La luminosité  $B_\nu(T)$  du rayonnement du corps noir en fonction de la fréquence  $\nu$  (ou, de manière équivalente, de la longueur d'onde  $\lambda$ ) pour différentes températures  $T$ , y compris celle du fond des micro-ondes cosmiques (la courbe la plus basse, marquée de 3 K). Adapté de Réf. [3].

découvert par Giacconi et ses collaborateurs, est désormais très bien mesuré. Sa distribution culmine autour de 30 keV. Le bruit de fond des rayons  $\gamma$ , quant à lui, est mesuré entre 0,1 MeV et 1 GeV. Les modèles pour ce composant supposent qu'il provient des noyaux d'anciens noyaux galactiques actifs (AGN). La queue à haute énergie de la distribution  $\gamma$  provient probablement également de sources similaires. Une fraction de l'énergie émise dans l'ultraviolet lointain et dans la partie des rayons X mous du spectre est absorbée ! par la poussière intergalactique et réémis dans l'infrarouge lointain. Harc! Les rayons X ne sont cependant pas absorbés.

Les contributions infrarouges et ultraviolettes sont principalement dues à l'émission galactique, intégrée sur toutes les galaxies. Le rayonnement optique et proche infrarouge qui n'est pas absorbé par les nuages de poussière intergalactiques domine tandis que le rayonnement diffusé contribue largement à l'infrarouge lointain.

La densité énergétique totale du rayonnement électromagnétique provient donc principalement du fond diffus cosmologique. Le tableau suivant, ainsi que la Fig. A.3, résumant les contributions des différentes sources du fond électromagnétique extragalactique.

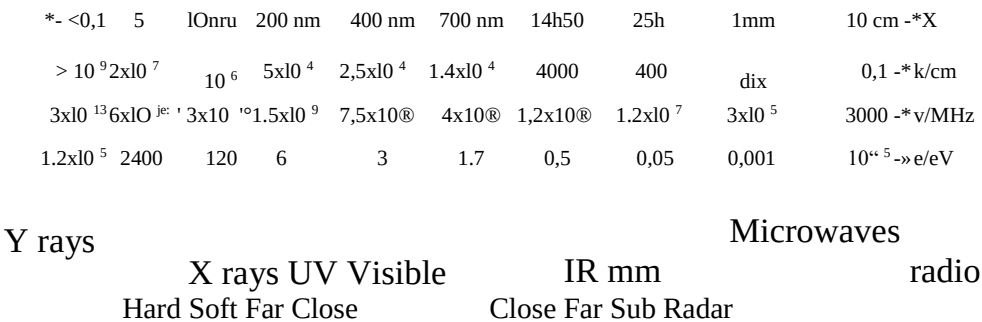


Fig. A.2 Le spectre du rayonnement électromagnétique et son étiquetage (nom du rayonnement) selon sa longueur d'onde (Å), sa fréquence (p) ou son énergie (e).

Tableau A1 Contribution des différentes bandes de longueurs d'onde au fond électromagnétique.

| Bande de fréquence | Intensité (Wm <sup>2</sup> .sr <sup>-1</sup> ) | Contribution (%)       |
|--------------------|------------------------------------------------|------------------------|
| Radio              | 1,2 x 10 <sup>-12</sup>                        | 1,1 x 10 <sup>-4</sup> |
| CMB                | 9,96 x 10 <sup>-6</sup>                        | 93                     |
| Infrarouge         | (4,6 ± 0,6) × 10 <sup>-8</sup>                 | 4,5 ± 0,5              |
| Optique            | (3 ± 1) x 10 <sup>-5</sup>                     | 3 ± 1                  |
| radiographie       | 2,7 x 10 <sup>-10</sup>                        | 3,5 x 10 <sup>-2</sup> |
| 7 rayons           | 3 x 10 <sup>-11</sup> couronnes                | 2,5 x 10 <sup>-3</sup> |



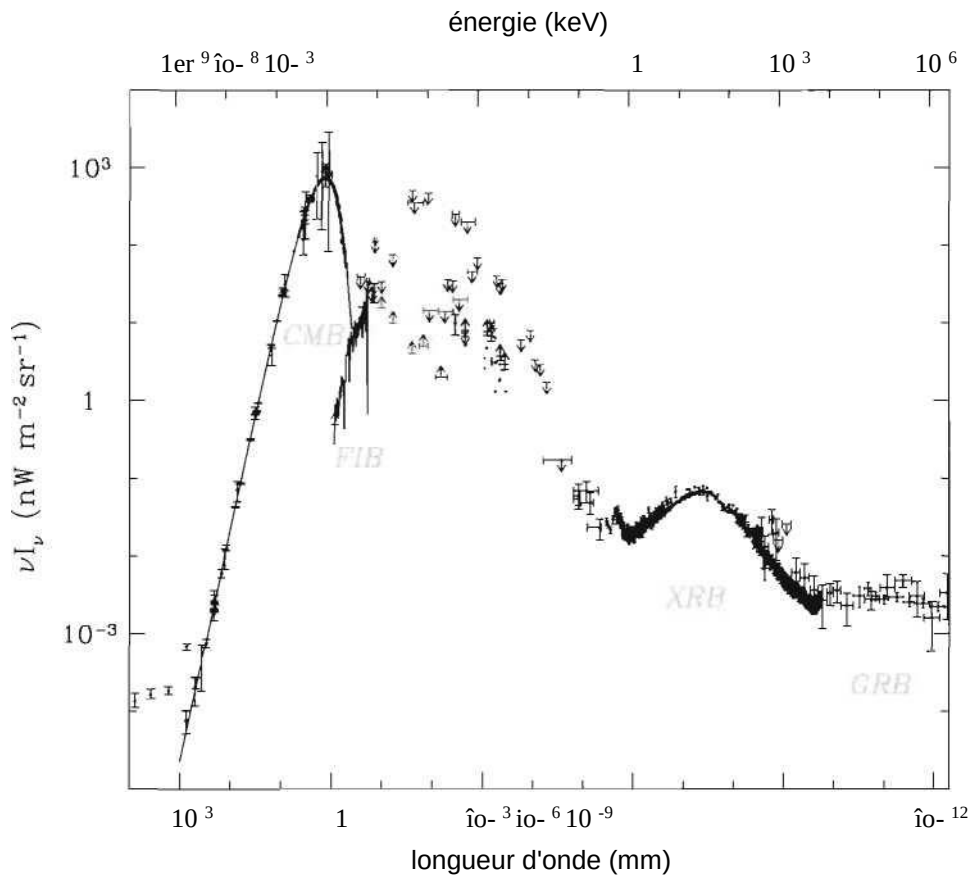


**Fig. A.3** Distribution spectrale de l'énergie pour le fond de rayonnement, telle que compilée par la Réf. [4], l'intensité est affichée en bandes de fréquences logarithmiques afin que l'énergie contenue dans chaque bande puisse être directement comparée. La contribution la plus importante vient du fond diffus cosmologique dont la répartition des corps noirs est facilement reconnaissable (en régime centimétrique). Les fonds infrarouges sont difficiles à déterminer, principalement en raison de la contamination galactique.

# Les références

- [1] Valeurs recommandées des constantes fondamentales (CODATA) : [ <http://physics.nist.gov/cuu/Constants/> ].
- [2] Groupe de données sur les particules : [ <http://pdg.lbl.gov/pdg.html> ],
- [3] KR LANG, *Formules astrophysiques*, Springer-Verlag, 1980.
- [4] M. HALPERN et D. SCOTT, « Futures expériences de fond micro-ondes », dans *Premiers plans micro-ondes*, A. de Oliveira-Costa et M. Tegmark (éd.), ASP, San Francisco, 1999.

# Annexe B

## Fonctions spéciales

---

Cette annexe rassemble les définitions et propriétés générales des fonctions spéciales figurant au cœur de l'ouvrage. Plus de détails peuvent être trouvés dans des monographies dédiées, telles que celles des réf. [1-3].

### B. I Fonctions d'Euler

La fonction d'Euler du deuxième type, aussi fréquemment appelée fonction d'Euler T, est définie comme

$$\Gamma(z) = e^{-z} \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad (\text{B.1})$$

pour  $\text{Re}(z) > 0$ . La fonction T est analytique à pôles simples en  $z = -p$ , avec  $p \in \mathbb{N}$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on retrouve les factorielles bien connues,

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad (\text{B.2})$$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n} (2n-1)!! \quad (\text{B.3})$$

$$\Gamma\left(-n + \frac{1}{2}\right) = (-1)^n \frac{2^n \sqrt{\pi}}{(2n-1)!!}. \quad (\text{B.4})$$

For large  $z$ ,  $\Gamma$  behaves asymptotically as

$$\ln \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \ln z - z + \frac{1}{2} \ln 2\pi + \mathcal{O}(z^{-1}), \quad (\text{B.5})$$

qui est simplement la formule de développement de Weierstrass.

La fonction d'Euler du premier ordre, également appelée fonction Bêta, est définie par

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt. \quad (\text{B.6})$$

La fonction Beta est liée à la fonction T par

$$B(x, y) = B(y, x) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad (\text{B.7})$$

## B. 2 harmonies sphériques

### B. 2.1 Définition

Les harmonies sphériques  $Y^{\text{TM}}$  sont des fonctions définies sur la sphère. Ce sont les fonctions propres du Laplacien sphérique bidimensionnel. En d'autres termes, ils satisfont

$$Y^{\text{TM}} = -\ell(\ell + 1)Y^{\text{TM}}, \quad (\text{B.8})$$

où  $\theta$  et  $\varphi$  sont les coordonnées angulaires à la surface de la sphère. Les  $Y^{\text{TM}}$  forment un ensemble complet de fonctions, ils peuvent donc être utilisés comme base pour les fonctions sur la sphère.

### B. 2.2 Expressions

Spherical harmonies are related to Legendre polynomials  $P^{\text{TM}}$  through - (5.2.1) in Ref. [1] -

$$Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi} \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!}} P_{\ell}^m(\cos \theta) e^{im\varphi}. \quad (\text{B.9})$$

They can also be expressed in terms of the Gegenbauer polynomials according to - (5.2.6.39c) of Ref. [1] -

$$Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = \zeta_m e^{im\varphi} \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(\ell - |m|)!}{(\ell + |m|)!}} (2|m| - 1)!! (\sin \theta)^{|m|} C_{\ell - |m|}^{|m| + 1/2}(\cos \theta), \quad (\text{B.10})$$

$\zeta_m$  being defined as

$$\zeta_m = \begin{cases} (-1)^m & m > 0, \\ 1 & m \leq 0. \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

The Gegenbauer polynomials are solutions of the second-order differential equation

$$(1 - x^2)y'' - (2a + 1)xy' + n(n + 2a)y = 0,$$

et satisfont la relation de normalisation (7.313) de la Réf. [2] - (B.13)

si  $\hat{J}_z(a) > 0$  —

#### B.2.3 Properties

The complex conjugate of any given spherical harmonies is given by Ref. [1] - (5.4.1) of

$$Y_{\ell m}^*(\theta, \varphi) = (-1)^m Y_{\ell, -m}(\theta, \varphi) = Y_{\ell m}(\theta, -\varphi). \quad (\text{B.14})$$

Spherical harmonies are normalized according to - (5.6.1) of Ref. [1] -

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta Y_{\ell m}^*(\theta, \varphi) Y_{\ell' m'}(\theta, \varphi) = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}, \quad (\text{B.15})$$

leading to the closure relation - (5.2.2) of Ref. [1] -

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}(\theta, \varphi) Y_{\ell m}^*(\theta', \varphi') = \delta^{(1)}(\cos\theta - \cos\theta') \delta^{(1)}(\varphi - \varphi'), \quad (\text{B.16})$$

ainsi qu'à la propriété d'addition -(5.17.2.9) de Réf. [1] -

$$\sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}(\theta, \varphi) Y_{\ell m}^*(\theta', \varphi') = \delta^{(1)}(\cos\theta - \cos\theta') \delta^{(1)}(\varphi - \varphi'), \quad (\text{B.17})$$

où  $a$  est l'angle entre les deux directions  $(0, \zeta)$  et  $(\theta', \varphi')$ , et  $P_\ell$  est le polynôme de Legendre d'ordre  $\ell$ .

Toute fonction réelle sur la sphère est ainsi développée sur la base des harmonies sphériques selon

$$= \quad (\text{B.18})$$

## B.2.4 Transformée de Fourier

La transformée de Fourier des harmonies sphériques est donnée par - (5.9.2.6) de la Réf. [1] -

$$\int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi Y_{\ell m}^*(\theta, \varphi) Y_{\ell' m'}(\theta, \varphi) = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}, \quad (\text{B.19})$$

où  $j_\ell$  est une fonction de Bessel sphérique (voir ci-dessous). De (B.19), on déduit le développement de l'exponentielle comme - (5.17.3.14) de la Réf. [1] -

$$e^{ikr} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} j_\ell(kr) Y_{\ell m}(\theta, \varphi) Y_{\ell m}^*(\theta', \varphi'), \quad (\text{B.20})$$

ou, en d'autres termes,

$$e^{ikr} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} j_\ell(kr) Y_{\ell m}(\theta, \varphi) Y_{\ell m}^*(\theta', \varphi'), \quad (\text{B.21})$$

où  $(p_x, p_y)$  et  $(x, y)$  représentent les coordonnées des vecteurs unitaires parallèles à  $p$  et  $x$ , respectivement, et - (5.17.4.18) de Réf. [1] -

$$\delta^{(3)}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \frac{\delta^{(1)}(r_1 - r_2)}{r_1^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{2\ell+1}{4\pi} P_\ell(\cos\theta_{12}). \quad (\text{B.22})$$

### B.2.5 Intégrais utiles

L'intégration de trois harmonies sphériques nécessite les symboles dits 3j-Wigner,

$$J_{\ell_1 \ell_2 \ell_3}^{m_1 m_2 m_3} = \frac{(2\ell_1 + 1)(2\ell_2 + 1)(2\ell_3 + 1)}{4\pi} f(\ell_1 \ell_2 \ell_3, m_1 m_2 m_3) \quad (\text{B.23})$$

Ces symboles 3j-Wigner,

$$\begin{aligned} & \langle \ell_1 m_1 \ell_2 m_2 | \ell_3 m_3 \rangle \\ & \sqrt{\frac{(2\ell_3 + 1)}{4\pi}} J_{\ell_1 \ell_2 \ell_3}^{m_1 m_2 m_3} \end{aligned}$$

sont liés aux coefficients de Clebsch-Gordan (voir Réf. [1] pour leurs propriétés) et sont non nuls à condition

$$|\ell_1 - \ell_2| \leq \ell_3 \leq \ell_1 + \ell_2, \quad m_1 + m_2 = m_3. \quad (\text{B.24})$$

De plus, ils satisfont à la propriété

$$\langle \ell_1 m_1 \ell_2 m_2 | \ell_3 m_3 \rangle = (-1)^{m_1} \langle \ell_1 -m_1 \ell_2 m_2 | \ell_3 -m_3 \rangle \quad (\text{B.25})$$

Avec les propriétés ci-dessus à portée de main, les intégrais que nous avons rencontrés au chapitre 6 sont facilement calculés. Nous avons

$$d_{\ell m}^{\ell' m'}(\theta) = \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'} \sqrt{\frac{(2\ell + 1)}{4\pi}} P_{\ell}^m(\cos \theta) \quad (\text{B.26})$$

où  $\hat{e}_z$  est le vecteur unitaire pointant dans la direction  $\hat{e}_z$ . Relation (8.733) dans la Réf. [2]

nous dit que

$$B_{\ell m}^{\ell' m'} = (-i)^{m_1} \sqrt{\frac{(2\ell + 1)}{4\pi}} P_{\ell}^m(\cos \theta) \quad (\text{B.27})$$

De manière analogue, la relation

$$A_{\ell m} = \int d\Omega Y_{\ell m}^*(\theta, \phi) Y_{\ell' m'}(\theta, \phi) = \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'} \sqrt{\frac{(2\ell + 1)}{4\pi}} P_{\ell}^m(\cos \theta) \quad (\text{B.28})$$

se réduit à

$$A_{\ell m}^{\lambda} = \pi \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(\ell + 2)!}{(\ell - 2)!}} \alpha_{\ell m}^{\lambda} \sum_n i^n (2n + 1) j_{\ell}(k) (c_{-2} \delta_{\ell-2}^n - 2c_0 \delta_{\ell}^n + c_{+2} \delta_{\ell+2}^n), \quad (\text{B.29})$$

with coefficients

$$\alpha_{\ell m}^{\lambda} = \delta_m^2 (\delta_+^{\lambda} - i\delta_{\times}^{\lambda}) + \delta_m^{-2} (\delta_+^{\lambda} + i\delta_{\times}^{\lambda}),$$

and

$$c_n^{-1} = \frac{1}{2} (2\ell - 1 + n)(2\ell + 1 + n)(2\ell + 3 + n).$$

## B.3 Fonctions de Bessel

### B.3.1 Définition

Les fonctions de Bessel, notées génériquement  $J_\nu(z)$ , sont des solutions de l'équation différentielle

$$z^2 \frac{d^2 Z}{dz^2} + z \frac{dZ}{dz} + (z^2 - \nu^2) Z = 0. \quad (\text{B.30})$$

It is common to distinguish between Bessel functions of the first (called  $J_\nu$ ) and the second ( $Y_\nu$ ) kind, the latter being also often called the Neumann functions. They are defined, respectively, through

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}, \quad (\text{B.31})$$

$$Y_\nu(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(\nu t - z \sin t) dt - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(\nu t - z \sin t) dt \ln z, \quad (\text{B.32})$$

if  $\nu$  is not an integer.

Integer-order ( $\nu = n \in \mathbb{Z}$ ) Bessel functions of the first and second kind enjoy the symmetry

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z), \quad Y_{-n}(z) = (-1)^n Y_n(z). \quad (\text{B.33})$$

The two functions  $J_\nu$  and  $Y_\nu$  are two linearly independent solutions of (B.30).

It is sometimes useful to introduce the Bessel function of the third kind, also called Hankel functions, defined by

$$H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + iY_\nu(z), \quad H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) - iY_\nu(z). \quad (\text{B.34})$$

Generic Bessel functions satisfy the recursion relations

$$z J_\nu'(z) = \nu J_\nu(z) - z J_{\nu+1}(z), \quad (\text{B.35})$$

$$z Y_\nu'(z) = \nu Y_\nu(z) - z Y_{\nu+1}(z), \quad (\text{B.36})$$

### B.3.2 Asymptotic properties

One can expand the functions  $J_\nu$  as séries according to

$$J_\nu(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}, \quad (\text{B.37})$$

From this, one gets their behaviour at the origin, i.e. for small values of the argument (around  $z \sim 0$ ),

$$J_\nu(z) \sim \left(\frac{z}{2}\right)^\nu, \quad Y_\nu(z) \sim -\frac{1}{\pi} \Gamma(\nu) \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}, \quad (\text{B.38})$$

At infinity, on the other hand, Bessel functions have the following asymptotic behaviours

$$J_{\pm\nu} \sim -\sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z \pm \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right), \quad N_{\pm\nu} \sim -\sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z \pm \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right), \quad (\text{B.39})$$

and hence those of the Hankel functions are

$$H_{\nu}^{(1)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i(z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4})}, \quad H_{\nu}^{(2)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-i(z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4})}. \quad (\text{B.40})$$

### B.3.3 Cas particuliers

Certaines fonctions de Bessel peuvent être exprimées en termes de fonctions simples connues pour certaines valeurs de l'indice  $\nu$ . Par exemple, on a et bien d'autres formes simples similaires pour

Il est intéressant d'écrire ici la solution de certaines équations

$$J_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z, \quad N_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z, \quad (\text{B.41})$$

différentielles fréquemment rencontrées en

$$H_{\frac{1}{2}}^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \frac{e^{iz}}{i}, \quad H_{-\frac{1}{2}}^{(2)} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \frac{e^{-iz}}{-i}, \quad (\text{B.42})$$

cosmologie en termes de a half-integer  $\nu$ .

fonctions de Bessel. Par exemple, nous avons

et il convient de souligner qu'un cas particulièrement important en cosmologie, comme le

$$u'' + \left[ (\beta\gamma z^{\gamma-1})^2 - \left( \frac{\nu\gamma}{z} \right)^2 \right] u = 0 \implies u = z Z_{\nu}(\beta z^{\gamma}), \quad (\text{B.43})$$

$$u'' + \frac{1-2\alpha}{z} u' + \left[ (\beta\gamma z^{\gamma-1})^2 + \frac{\alpha^2 - \nu^2 \gamma^2}{z^2} \right] u = 0 \implies u = z^{\alpha} Z_{\nu}(\beta z^{\gamma}), \quad (\text{B.44})$$

$$j_{\nu}(z) \equiv \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{\nu+\frac{1}{2}}(z), \quad \text{lecteur l'a sans doute remarqué, est celui pour lequel } a = -\frac{1}{2} \text{ et } 7$$

= 1.

### B.3.4 Fonctions de Bessel sphériques

Les fonctions de Bessel sphériques sont définies par la relation

$$(\text{B.45})$$

et satisfaire les relations de récursion

$$J'_{\nu} - 2J_{\nu} + J''_{\nu+1} >$$

$$J_e = 2\hat{I}T + \hat{I} \wedge^{-1}'' + \dots, e+i.$$



$$J_{\ell} = J_{\ell} - j_{\ell} \text{ ----- } \sim J_{\ell},$$

(B.46)

from which one deduces

$$\frac{j_{\ell}}{z^2} = \frac{j_{\ell-2}}{(2\ell-1)(2\ell+1)} + 2 \frac{j_{\ell}}{(2\ell-1)(2\ell+3)} + \frac{j_{\ell+2}}{(2\ell+1)(2\ell+3)}. \quad (\text{B.47})$$



It can be checked from (B.44) that they satisfy the second-order differential equation

$$j_\ell''(x) + \frac{2}{x}j_\ell'(x) + \left[1 - \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\right]j_\ell(x) = 0. \quad (\text{B.48})$$

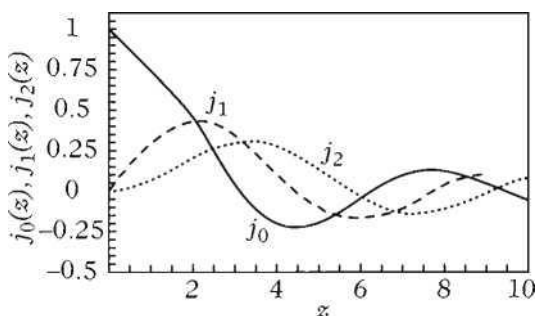


**Fig. B1** Fonctions de Bessel sphériques pour  $\ell = 0, 1, 2$ .

### B.3.5 Quelques intégraux utiles

Les fonctions de Bessel satisfont

$$\int_0^\infty J_\nu(t)J_\mu(t)t^{-\lambda}dt = \frac{2^{-\lambda}\Gamma(\lambda)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu-\lambda+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{-\nu+\mu+\lambda+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+\lambda+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\mu+\lambda+1}{2}\right)}, \quad (\text{B.49})$$

if  $\Re(\nu + \mu + 1) > \Re(\lambda) > 0$ . This means that

$$\int_0^\infty j_\ell(t)j_\ell(t)t^{-k}dt = \frac{\pi}{2} \frac{\Gamma(k+1)\Gamma\left(\frac{2\ell+1-k}{2}\right)}{2^{k+1}\Gamma^2\left(\frac{k+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2\ell+k+3}{2}\right)}, \quad (\text{B.50})$$

with  $-1 < k < 2\ell + 1$ . This also leads to

$$\int_0^\infty j_\ell(pr)j_\ell(p'r)r^2dr = \frac{\pi}{2p^2}\delta(p-p'), \quad (\text{B.51})$$

defining the normalization of the spherical Bessel function.

## B.4 Polynômes de Legendre

### B.4.1 Polynômes de Legendre associés

Un polynôme de Legendre associé,  $P_l^m(z)$ , est une solution de l'équation différentielle

$$\frac{d}{dz} \left[ (1-z^2) \frac{dP_l^m}{dz} \right] + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{1-z^2} \right] P_l^m = 0, \quad (B.52)$$

où  $l$  et  $m$  étant deux nombres complexes. Ces polynômes satisfont la relation de récurrence - (8.733) de la Réf. [2] - (B.53)

### B.4.2 Polynômes de Legendre

Les polynômes de Legendre sont en fait un cas particulier de polynômes de Legendre associés pour lesquels  $m = 0$  et  $l = n \in \mathbb{N}$ . Ces polynômes forment une base orthogonale pour les fonctions définies sur le segment  $[-1, 1]$ , satisfaisant la relation d'orthogonalité

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \frac{2}{n+1} \delta_{nm}. \quad (B.54)$$

En particulier, on a

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x).$$

Toute fonction donnée de la variable  $x$  peut être développée comme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x). \quad (B.55)$$

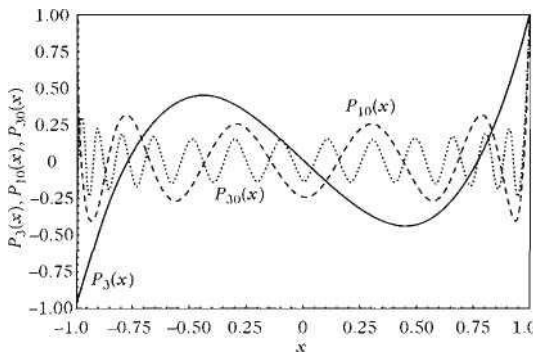


**Fig. B.2** Legendre polynomials for  $l = 3, 10, 30$ .

## B.5 Transformée de Fourier et modes propres du Laplacien

### B.5.1 Transformée de Fourier

Dans un espace à symétrie maximale de dimension  $D$ , l'équation de Helmholtz est une équation aux valeurs propres du laplacien

$$-\Delta Q_k = (k^2 - K)Q_k, \quad (\text{B.56})$$

où le vecteur d'onde  $k$  étiquette les modes et le signe de  $K$  dépend de l'espace courbure;  $\Delta$  est le Laplacien défini à partir de la dérivée covariante  $D_i$  associée à la métrique spatiale  $g_{ij}$ . On impose également la condition de normalisation

$$\int Q_k(x) Q_{k'}(x) d^D x = \delta(k - k'). \quad (\text{B.57})$$

Toute fonction peut être développée en modes de Fourier sur la base des fonctions  $Q_k(x)$  selon

$$f(x) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^{D/2}} \hat{f}(k) Q_k(x) \quad (\text{B.58})$$

où  $\hat{f}(k)$  sont les coefficients de Fourier de la fonction  $f(x)$ . Cette relation est inversée à l'aide de (B.57), ce qui donne

$$\hat{f}(k) = \int \sqrt{\gamma} \frac{d^D x}{(2\pi)^{D/2}} f(x) Q_k^*(x) \quad (\text{B.59})$$

### B.5.2 Spectre de puissance

Si  $f(x)$  est un champ stochastique homogène et isotrope donné, on peut définir sa fonction de corrélation par

$$O(r) = \langle f(x) f(x+r) \rangle \quad (\text{B.60})$$

Son spectre de puissance est défini dans l'espace de Fourier comme

$$P(k) = \langle |\hat{f}(k)|^2 \rangle \quad (\text{B.61})$$

Il s'avère pratique de définir un spectre avec différentes dimensions, à savoir

$$\frac{S^{D-2}}{(2\pi)^D} k^D P_f(k) \quad (\text{B.62})$$

where  $S^{D-2}$  is the surface of the  $(D-1)$ -dimensional sphere of unit radius

$$S^{D-2} = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)} \quad (\text{B.63})$$

où l'on récupère la valeur particulière de la surface de la 1-sphère, soit un cercle,  $S^1 = 2\pi$ , et celle de la 2-sphère, pour laquelle  $S^2 = 4\pi$ .

La fonction de corrélation découle du spectre de puissance à travers

$$O(r) = \frac{S^{D-2}}{(2\pi)^D} \int P_f(k) k^D \frac{\sin kr}{kr} \frac{dk}{k} = \int P_f(k) \frac{\sin kr}{kr} \frac{dk}{k} \quad (\text{B.64})$$

après intégration sur les  $(D-1)$  directions angulaires.

### B.5.3 Coordonnées cartésiennes

Pour obtenir la forme explicite des fonctions  $Q_k$ , limitons notre attention au cas  $D = 3$ . En fonction du signe de courbure, les numéros d'onde prennent les valeurs

$$(B.65)$$

$$(B.66)$$

$$(B.67)$$

En coordonnées cartésiennes, seules les fonctions pour  $K = 0$  prennent une forme simple, à savoir

$$(B.68)$$

et les équations. (B.58)-(B.59) prennent la forme habituelle de la transformée de Fourier. Notez également que, toujours en supposant que l'espace fiduciaire  $K = 0$ , nous obtenons l'expression utile suivante

$$(B.69)$$

pour la distribution Dirac  $\delta^5$  en dimensions  $D$ .

### B.5.4 Coordonnées sphériques

Dans un système de coordonnées sphériques  $(r, \theta, \phi)$ , les fonctions propres peuvent être développées comme

$$Q_{k\ell m} = (27r)^{3/2} R_{k\ell}(r) Y_{\ell m}(\theta, \phi), \quad (B.70)$$

la normalisation prenant la forme

$$J_{\ell}(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} u_{\ell m} \quad (B.71)$$

Avec la décomposition (B.70), la partie radiale de l'équation de Helmholtz devient

$$r^2 \frac{d^2 R_{k\ell}}{dr^2} + [k^2 r^2 - \ell(\ell+1)] R_{k\ell} = 0 \quad (B.72)$$

Cette équation différentielle du second ordre possède deux solutions indépendantes, dont une seule est régulière à  $r = 0$ , de sorte que la fonction radiale est entièrement déterminée une fois la normalisation choisie. La résolution de cette équation donne les trois solutions suivantes [4,5]

$$R_{k\ell}(r) = \frac{N_{k\ell}}{k f_{\ell}(r)} P_{-1/2-\ell}^{-1/2+i\omega} \left[ \cosh(\sqrt{-K} r) \right] \quad K < 0 \quad (B.73)$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} j_{\ell}(k r) \quad K = 0 \quad (B.74)$$

$$\sqrt{\frac{M_{k\ell}}{k f_{\ell}(r)}} P_{-1/2-\ell}^{-1/2+\nu} \left[ \cos(\sqrt{K} r) \right] \quad K > 0. \quad (B.75)$$

Les coefficients de normalisation numérique sont donnés par

(B.76)

avec

pour  $\mathcal{E} > v$ ,

$$w = kV - K, \quad v = -\frac{1}{2} = -1. \quad (\text{B.77})$$

A noter que dans le cas  $K < 0$ , la condition de normalisation n'est valable que pour les modes pour lesquels  $k$  est réel [6], qui correspondent à des longueurs d'onde inférieures au rayon de courbure de l'espace. Pour les modes de supercourbure, soit  $ik \in [0, V - K]$ , la fonction radiale peut être obtenue par suite analytique.

Toute fonction peut ensuite être étendue en modes de Fourier sphériques comme

$$\int_0^\infty f(c^2) dc^2 \quad * f^{(p)} \cdot > \quad (\text{B.78})$$

les coefficients de Fourier étant donnés par

(B.79)

Utilisation des équations. (B.15) et (B.21), on peut montrer que ces coefficients de Fourier sont liés par

$$h_m(k) = (-tY)^m / (fc) y_{to}(fc) dn_{ie}. \quad (\text{B.80})$$

# Les références

- [1] DA VARSHALOVICH, AN MOSKALEV et VK KHERSONSKII, *Théorie quantique du moment angulaire*, World Scientific, Singapour, 1988.
- [2] IS GRADSHTEYN et IM RYZHIK, *Tableau des intégrais, séries et produits*, Academic Press, 1980.
- [3] M. ABRAMOWITZ et IA STEGUN, *Manuel de fonctions mathématiques avec formules, graphiques et tableaux mathématiques*, Dover Publications, 1970.
- [4] LF ABOTT et RK SCHAEFFER, « Une analyse générale invariante de jauge du fond diffus cosmologique », *Astrophys. J.* **308**, 546, 1986, [Annexe].
- [5] A. RIAZUELO et *al.*, « Simulation de cartes de fond cosmique micro-ondes dans un espace multiconnecté », *Phys. Rev. D* **69**, 103514, 2004. [Annexe A].
- [6] DH LYTH et A. WOSZCZYNA, « Perturbations à grande échelle dans l'univers ouvert », *Phys. Rev. D* **52**, 3338, 1995.





# Annexe C

## Grandeurs cosmologiques utiles

---

### C. I Espace d'arrière-plan

#### C. II Géométrie

La métrique de Friedmann-Lemaître est donnée, en temps conforme, par

$$\begin{aligned} g_{00} &= -c^2 dt^2, \\ g_{0i} &= 0, \\ g_{ij} &= a^2(t) \gamma_{ij} \end{aligned} \quad (C.1)$$

où la métrique spatiale  $\gamma_{ij}$  peut s'écrire

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pour } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (C.2)$$

et nous avons la métrique inverse

$$\begin{aligned} g^{00} &= -1/c^2, \\ g^{0i} &= 0, \\ g^{ij} &= 1/a^2(t) \gamma^{ij} \end{aligned} \quad (C.3)$$

A noter que la métrique spatiale peut également prendre la forme

avec

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pour } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (C.4)$$

respectivement pour  $K$  positif, nul et négatif.

Les symboles Christoffel qui ne disparaissent pas sont

$$\begin{aligned} r g_0 &= w, r^0 \\ &= w_{7ij}, r^j_{0i} \\ &= M, r^7_{-} = \\ &^x jk \end{aligned} \quad (C.6)$$

où  $7'_{fc}$  sont les symboles de Christoffel dérivés de la métrique spatiale  $7^\wedge$ .

Les composantes non nulles du tenseur de Riemann sont données par

$$\begin{aligned} R^o_{iOj} &= R'_{7ij} > \\ R^1_{00j} &= R'_{5j}, \\ R_{jml} &= (R + A) \end{aligned} \quad , \quad (C.7)$$

conduisant à ceux du tenseur de Ricci

$$\begin{aligned} A_{00} &= -37T, \\ R_{ij} &= (2W^2 + W' + 2A - 7Zj), \end{aligned} \quad (C.8)$$

et éventuellement la courbure scalaire

$$R_{00}^2 = 6 (W^2 + W' + K). \quad (C.9)$$

En utilisant ces tenseurs, on obtient les composantes non nulles du tenseur d'Einstein, à savoir

$$\begin{aligned} B_{00} &= 3 (R^2 + K), \\ G_{ij} &= -(R^2 + 2R' + A)_{7ij}. \end{aligned} \quad (C.10)$$

La courbure spatiale est donnée par

$$^{(3)}A = 6 A',$$

qui est calculé en contractant les tenseurs de Riemann, puis de Ricci associés à la métrique  $_{7ij}$ , respectivement.

$$^{(3)}R^t_{jkl} = K (5^\wedge - \%_{7jk}), \quad R^k_{ikj} = 2K_{7ij}, \quad (G.12)$$

## C. 1.2 Matière

Le tenseur énergie-contrainte pour un fluide parfait de densité  $p$  et de pression  $P$  est

$$(C.13)$$

avec une vitesse 4 normalisée = — 1 pour que l'on puisse prendre

Les composantes non nulles de ce tenseur sont alors données par

$$\begin{aligned} T_{00} &= \rho a^2, \\ T_{ij} &= P a^2 \delta_{ij}, \end{aligned} \quad (C.14)$$

ou équivalent,

$$\begin{aligned} T^0_0 &= -\rho, \\ T^i_i &= P. \end{aligned} \quad (C.15)$$

La conservation pour un fluide prend la forme

$$\dot{\rho} + 3H(1 + w)\rho = 0, \quad (C.16)$$

où l'équation d'état  $w$  est définie par

$$P = w\rho. \quad (C.17)$$

Après un peu d'algèbre, on obtient que

$$\dot{w} = -\frac{3H}{1+w}(c^2 - w), \quad (C.18)$$

avec la vitesse du son  $c_s$  définie

$$c_s^2 = \frac{P}{\rho}. \quad (C.19)$$

En utilisant les équations d'Einstein, il s'avère extrêmement utile d'exprimer à la fois la pression et la densité en fonction des quantifications géométriques telles que

$$\begin{aligned} \rho a^2 &= 3 \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \right), \quad P a^2 = - \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2 \frac{\ddot{a}}{a} + K \right), \quad \frac{\dot{a}}{a} = H, \quad \frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2, \end{aligned} \quad (C.20)$$

d'où on obtient la formule suivante après quelques calculs

$$\dot{H} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} + K \right) (1 + 3w).$$

Pour un champ scalaire, nous avons

$$\begin{aligned} \text{Aussi } \rho &= \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi), \\ P &= \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi). \end{aligned} \quad (C.22)$$

## C. 2 Grandeurs perturbées

### C.2.1 Géométrie

La métrique perturbée de Friedmann Lemaître en temps conforme est donnée par

$$ds^2 = a^2(\eta) \left( -d\eta^2 + \delta_{ij} dx^i dx^j \right). \quad (C.23)$$

$$\begin{aligned}\hat{g}_{00} &= -2a^2 A, \\ \hat{g}_{0i} &= a^2 (D_i B + B_{,i}) = a^2 B_{,i}, \\ \hat{g}_{ij} &= a^2 [D_i D_j E + 2D^k E_{kj} + 2E_{ij}] = a^2 h_{ij},\end{aligned}\quad (\text{C.24})$$

où nous avons explicitement séparé les parties scalaire, vectorielle et tensorielle (composition SVT dé). Rappelons que  $D_i$  représente la dérivée covariante par rapport à la métrique spatiale  $h_{ij}$ , et que les indices latins  $i, j$  sont augmentés et diminués au moyen de la métrique spatiale de fond  $h_{ij}$ . Les vecteurs  $B_i$  et  $E_i$  sont sans divergence ( $D^i B_i = D^i E_i = 0$ ), tout comme le tenseur  $E_{ij}$ , qui est lui aussi sans trace ( $D^i E_i = 0$  et  $E^i_i = 0$ ). Au même ordre en perturbations, la métrique inverse est

$$g^{ij} = [2C^{ij} + 2D^i D^j E + 2B^{(i} E^{j)} + 2\Lambda^{ij}], \quad (\text{C.25})$$

d'où l'on dérive les symboles perturbés de Christoffel comme

$$\begin{aligned}\hat{\Gamma}^{00}_{00} &= -\frac{1}{a^2} \frac{d}{dt} \ln a^2 \\ \hat{\Gamma}^{0j}_{00} &= D^j (A + B' + HB) + B^{,j} + HB^{,j} \\ &= D^j A + HB^{,j} + HB^{,j}, \\ \hat{\Gamma}^{0i}_{0j} &= -2'HA'_{ij} + \sim Hh_{ij} + h_{,i} D^k B_{kj} - D^k B_{,i} \\ &\quad + 7''^{ij}, \\ \hat{\Gamma}^{jk}_{0i} &= -H(\ddot{B} + B^{,j})_{,i} + D_i \dot{E}_{jk} + \pm D^k h_{jk},\end{aligned}\quad (\text{C.26})$$

Les symboles de Christoffel perturbés permettent de calculer le tenseur de Ricci perturbé. C'est

$$\begin{aligned}\hat{R}_{00} &= 3HA' + AA'' + A(B' + HB)' - [(i'' + Hh')], \\ \hat{R}_{0i} &= 2HD_{,i} A + (H' + 2H^2)B_i + D^k D_{[i} B_{k]j} + \wedge (D_k h'^k - D_i t_i), \\ \hat{R}_{ij} &= -[2(2H^2 + B'')A + HA' + BAB]_{,ij} - D_i D_j A - D_{[i} [B'_{j]} + 2HB_{j]} \\ &\quad + (2H^2 + H'')h_{ij} + Hh'_{ij} + \dots + f''_{ij},\end{aligned}$$

$$HD(i \setminus D_k h^k_{j}) - \dots - \wedge D_i D_j h, \quad (\text{C.27})$$

conduisant, lors de la contraction, à la perturbation de courbure

$a^{-2} \hat{O}R = h'' + 3Hh' - IAC - ZKh - ZAA - IZtH' + H^{\wedge}A - GHA' - 2A(B' + 37\ddot{I}B)$ , (C.28) où l'on a utilisé la relation de trace  $h = 6C + 2AE$ , et de formule  $Ah - D^{\wedge}D^{\wedge}h_{ij} = 4AC$ .

Le tenseur d'Einstein perturbé est alors donné par

$$\hat{O}G_{00} = 6BC'' - ZAC + 6K(A - C) - 2HA(B - E'),$$

$$\hat{O}G_{0i} = D, [2HA - 2C' + 2KE' - (2H' + H^2 + 3K)B]$$

$$+ [A(\ddot{E}' - BJ + \ddot{A}\ddot{E}' - (2B' + H^2 + 2K)B_t),$$

$$\hat{O}G_{ij} = DE [E'' + 2HE' - 2(2H' + H^2 + K)E - B' - 2HB - C - A] + 7^{\wedge} [-A(E'' + 2HE') + A(B' + 2HB) - 2C'' - iHC' + A(C + A) + 2(27i' + 7i^2)(4 - C) + 27 - M']$$

$$'g = 2 [37\ddot{I}^2 A - 37 - ZC'' + A(C + HB - HE') + 3KC],$$

$$= -2D_l [HA - C' - K(B - E')] - [A + 2K] (\ddot{E}^{\wedge} - B_t), '' = D^{-21}D ;$$

$$[(E' - B)' + 2H(E' - B) - (C + 4)]$$

$$+ <5' [-A(E' - B)' - 2HA(E' - B) - 2C'' - 4HC' + AC + 2KC + 2HA' + AA + 2(2H' + 7i^2)4]$$

$$' + 2B$$

$$+ \ddot{E}''' + 2B\ddot{E}j - A\ddot{E}j + 2\ddot{A}\ddot{E}^*,$$

whereas the perturbed curvature of the spatial sections is

(C.30)

$$5^{\wedge}R = (A + 3K)C, a^z$$

(C.31)

$$+ \ddot{Y}^k D_{\{k} \{$$

et le tenseur de courbure extrinsèque pour les hypersurfaces à temps conforme constant est

(C.32)

avec

$$, <r = E' - B, \quad <7^i = <è\quad (C.33)$$

Les grandeurs invariantes de jauge associées à la géométrie sont résumées dans le tableau

---


$$21T_{ij} = P \text{ une }^{5,2}$$

ci-dessous.

(C.38)

|          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Scalaire | <div> <div> <div>'J'E'</div> <div>= -C - H(B - E') = -C + Hu = A + H(B - E') + (B - E')'</div> </div> <div> <div>&lt;E&gt;</div> <div>= A+</div> </div> </div> <div> <div>7Z</div> <div>= 0 — 1·1 <math>\frac{1}{E'}</math></div> </div> <div> <div>C</div> <div> <math display="block">\frac{2 \cdot 4 &gt;' +}{3 \cdot 7 A (1 + w)}</math> </div> </div> <div> <div>CBST</div> <div> <div>=C+</div> <div>(5/9</div> <div>3(P+P)</div> </div> </div> |
| Vecteur  | = E't - Bi =âi                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| Tenseur  | évaluer directement l'invariant                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |

C.2.2
Sujet

Les composantes du tenseur énergie-contrainte pour un fluide parfait, au premier ordre,
are

De même, la pression scalaire augmente à mesure que

$$6P = c^{\wedge} \hat{op} + rr,$$
(E.37)

d'où on déduit que

(C.35)

where the anisotropic stress tensor can be SVT-decomposed as

'ij- (C.36)

Dans le cas particulier d'un champ scalaire, on obtient

$$\begin{aligned}\delta T_{00} &= \varphi' \delta \varphi' + 2a^2 V(\varphi) A + a^2 \frac{dV}{d\varphi} \delta \varphi, \\ \delta T_{0i} &= D_i \left[ \varphi' \delta \varphi + \left( \frac{\varphi'^2}{2} - a^2 V \right) B \right] + \left( \frac{\varphi'^2}{2} - a^2 V \right) \bar{B}_i, \\ \delta T_{ij} &= \left( \varphi' \delta \varphi' - \varphi'^2 A - a^2 \frac{dV}{d\varphi} \delta \varphi \right) \gamma_{ij} + \left( \frac{\varphi'^2}{2} - a^2 V \right) h_{ij},\end{aligned}\tag{C.39}$$

and therefore

$$\begin{aligned}a^2 \delta T_0^0 &= -\varphi' \delta \varphi' - a^2 \frac{dV}{d\varphi} \delta \varphi + A \varphi'^2, \\ a^2 \delta T_i^0 &= -D_i (\varphi' \delta \varphi), \\ a^2 \delta T_j^i &= \left( \varphi' \delta \varphi - \varphi'^2 A - a^2 \frac{dV}{d\varphi} \delta \varphi \right) \delta_j^i.\end{aligned}\tag{C.40}$$

Toutes les grandeurs invariantes de jauge apparaissant dans la description de la matière sont résumées ci-dessous.

|          |                      |                                                        |
|----------|----------------------|--------------------------------------------------------|
| Scalaire | <i>SUR</i>           | $= \hat{\delta} + \sim (B P - E')$                     |
|          | $5F$                 | $-\hat{\delta} \cdot p' \zeta$<br><i>H</i>             |
|          | $< 5^\circ \text{C}$ |                                                        |
|          | <i>V</i>             | $= \hat{\delta} + -(v + \tilde{\eta}) P$<br>$= v + E'$ |
|          | $\pi$                |                                                        |
| Vecteur  | <i>r</i>             |                                                        |
|          | <i>VR</i>            | $= V_i \quad B_i$                                      |
| Tenseur  | $\pi_i$              |                                                        |
|          | $\wedge_{ij}$        |                                                        |
|          | Champ scalaire       |                                                        |
|          | <i>X</i>             | $= \hat{\delta} < p + i p' [B - E']$                   |
|          | <i>Q</i>             | <i>H</i> $\vee Et$                                     |







- Électrofaible, 573
- Baryon, 100, 292, 364.
  - oscillation acoustique, 298, 365
- BBN, 204, 211
  - abondances, 211
  - température, 211, 228
- Fonction Bessel, 808
  - sphérique, 806, 809
- Blanchi
  - identifie, 33, 139
  - espace-temps, 171
- Biais, 249
  - cosmique, 247
  - grossissement, 394
- Grand
  - craquement, 148
  - déchirer, 705
- Énergie de liaison, 207
- Trou noir
- Corps noir
  - spectre, 799
- Coefficients de Bogoliubov, 600
- Bohi-
  - rayon, 796
- Magnitude bolométrique, 156
- Boltzmann
  - constante, 796
  - équation, 198, 219
    - sans collision, 331
    - perturbé, 330
  - hiérarchie, 341, 352
- Bose-Einstein. 189
- Boson
  - échange, 99
  - jauge, 107
  - Pierre dorée, 109
  - masse, 110
- Rebond, 148, 785
- Lires BPS, 648
- Supports
  - Mensonge, 168
  - Poisson, 69 ans
- Brane, 758
  - p, 744
  - DP, 751
  - gaz, 755, 758
- Brans Dicke
  - paramétrage, 580
- Bremsstrahlung, 328
- Luminosité, 334
- Bouquet -Aspirateur Davies, 473, 599, 784
- Matrice Cabbibo—Kobayashi— Maskawa, 556
- Collecteur Calabi-Yau, 755
- CAMB, 356
- Variables canoniques, 488
- Classement Cartan, 105
- Caustique, 382
- MDP, 365
- Céphéide, 179
- Inflation chaotique, 465.
- Gaz Chaplygin, 700
- Charge
  - centrale, 608
  - conjugaison, 123
- Potentiel chimique, 192
- Numéro Chern-Simons, 572
- Chiralité, 114.
- Symboles Christoffel
  - définition, 27, 29
  - Friedmann-Lemaître, 134, 817.
  - perturbé Friedmann-Lemaître, 819
- Chromodynamique, 113
- $C_e$ , 312, 357
- Classique
  - champ, 628
  - mécanique, 69
- Classification
  - Cartan, 105
- Clebsch-Gordan
  - coefficient, 807
- Clifford
  - algèbre, 88
  - traduction, 718
- Grappe, 419
  - Coma, 420
  - masse, 421
- Regroupement
  - stable, 301
- CMB, 216, 221, 307
  - anisotropies, 225
    - Doppler, 311
    - Sachs-Wolfe, 311
  - dipôle, 224
  - premiers plans, 225
  - température, 217
- CMBEASY, 356 CMBFAST, 356
- COBE, 1, 217, 221, 225, 231, 358 CODATA, 803
- Relation de Codazzi, 37.
- Coefficient
  - Bogoliubov, 600
  - Clebsch-Gordan, 807
- Problème de coïncidence, 233
- Théorème de Coleman-Mandula, 606 Coleman-Weinberg
  - correction, 680 Réduire
  - sphérique, 300 Couleur, 113
- Commutat.or, 80
- Déménagement
  - observateur, 136
  - distance radiale, 151
- Compactification, 739, 743, 754
  - déformé, 764
- Compton
  - distorsion, 223
  - diffusion inverse, 328
- Conditions
  - Dirichlet, 750
  - carrefour, 485
  - mixte, 751

- Neumann, 749
- Sakharov, 569.
- Conforme
  - coupage, 596
  - invariance, 596
  - temps, 140, 458
- Connectivité, 649
- Conservation
  - B-L*, 573
  - équations, 41, 139, 199
  - loi, 73
- Relation de cohérence, 496, 499, 500, 504, 528
- Constante
  - Boltzmann, 796
  - cosmologique, 275, 366, 684
  - coupé, 107
  - Fermi, 796
  - structure fine, 713, 796
  - fondamental, 58
  - gravitation, 582, 715
  - Hubble, 150, 365, 799
  - Newton, 796
  - Planck, 796
  - structures, 103
  - variable, 711
- Équation de continuité, 241
- Convergence, 380, 397, 399
  - spectre de puissance, 399
- Coordonnées
  - généralisé, 69
- Principe copernicien, 130, 704.
- Fonction de corrélation, 246, 812
  - angulaire, 311
- Longueur de corrélation, 635, 637, 638
- Cosmique
  - biais, 247
  - fonction de répartition, 247
  - erreur, 248
  - écart, 248, 357
- Fond micro-ondes cosmique, 216, 221 anisotropies, 225
  - dipôle, 224
  - premiers plans, 225
- Cisaillement cosmique, 380, 397, 402
  - mesure, 405
- Cordes cosmiques, 641, 661
  - mondial, 646
  - pli, 667
  - Nambu-Goto, 646
  - non-abélien, 671
  - simulation, 666
  - supraconducteur, 646
    - équation d'état, 646
    - paramètre d'état, 646
- Cosmologique
  - constante, 184, 228, 366, 684
    - problème, 233, 685
  - mode), 2, 129
  - paramètres, 364
  - principe, 2, 130, 167, 229
  - espace-temps, 131
- Coupage
  - conforme, 596
  - minime, 596
- Dérivée covariante, 28
- Espace couvrant, 718
- Violation du CP, 556, 570, 573
- Théorème CPT, 124
- Critique
  - exposant, 637
  - lentille, 382
  - ligne, 382, 386
  - température, 630
- Coupe transversale, 388
- Curvaton, 528, 532, 781.
- Courbure, 366
  - extrinsèque, 37, 45, 486, 820
  - perturbation, 484
  - scalaire, 33
- État du cylindre, 739
- D*, 614
- Dp-brane, 751
- d'Alembertien, 30 ans
- Particule *D*, 751
- Dark energy, 185, 233, 592, 684, 687 équation of state, 185
- Dark matter, 201, 203, 233, 292, 365, 393, 411
  - candidates, 430, 438
  - cold, 424, 431
  - halo model, 386
  - hot, 427, 431
  - répulsive, 428
  - solid, 697
  - strongly self-interacting, 428
  - warm, 427, 431
- DBI, 699
- de Sitter, 455
  - massive field, 476
  - test field, 470
- de Vaucouleur law, 180
- Décélération parameter, 158, 183 Décomposition
  - SVT, 52, 251, 257, 738
- Decoupling, 190, 194, 217, 220
- Déficit angle, 662
- Deflection angle, 378
- Matrice de déformation, 397
- Degrés de liberté
  - relativiste, 191, 196
- Dérivé
  - covariante, 28, 30
  - fonctionnel, 70
  - Mensonge, 31
  - spatial, 35
- Deutérium, 211, 215
  - masse, 798
- Dilaton, 592, 741, 778
- Dirac
  - équation, 87
  - spineur, 606
- Distance

- angulaire, 152, 159
  - à venir, 152, 159
- comoving radial, 151, 158
- dualité, 155
- luminosité, 154, 159, 182
- module, 155
- Distorsion
  - matrice, 380
  - spectral, 328
- Fonction de distribution, 189, 330
- Divergences
  - infrarouge, 475
- Dualité, 752
  - facteurs d'échelle, 778
  - T, 755
- Modes E, 407
- Effet
  - Kaiser-- Stebbins, 665
  - Sunyaev-Zel'dovich, 181, 328 e-fold,
- 452, 461, 464, 502, 532, 539 inflation
- chaotique, 465
- Modes propres
  - Laplacien, 813
- Einstein
  - équations, 38, 40
    - induit par les branes, 761
    - invariant de jauge, 260
    - perturbations, 260
    - semi-classique, 595
  - principe d'équivalence, 20 frame, 581, 742
  - équation linéarisée, 49 rayon, 376, 382, 388 tenseur, 33, 817
    - Friedmann-Lemaître, 135
- Einstein-Hilbert
  - action, 39, 45
- Théorie d'Einstein-Maxwell, 741
- Ekpyrotic, 781
- Champ électrique, 43
- Électrodynamique
  - scalaire, 108
- Tenseur électromagnétique, 42
- Electromagnétisme, 42, 78
  - spectre, 799
- Masse électronique, 798
- Force électrofaible, 114
- Intégration, 455
- Condition énergétique, 36
  - fort, 162
  - faible, 163
- Entropie, 193, 222, 280, 284, 821
- Égalité, 188, 282
  - température, 228
- Équation
  - Boltzmann, 219
    - sans collision, invariant de calibre 331, 341
    - perturbé, 330
  - polarisation, 344
- terme de collision, 338
- Codazzi, 761
  - conservation, 41, 139, 238
- modes scalaires, 265
- continuité, 238, 241 Dirac, 87
- Einstein, 38, 40
  - linéarisés, 49, 52 modes scalaires, 263 semi-classiques, 595 modes tensoriels, 262 modes vectoriels, 263 Euler, 41, 238
    - modes scalaires, 265
- modes vectoriels, 265
- Euler-Lagrange, 69
- flux, 506
- Fokker-Planck, 520
- Friedmann, 139, 818 branes, 767
  - Système dynamique, 145
  - généralisé, 42, 140 réduit, 141
    - champ scalaire, 458
- jauge invariante, 260 géodésie
  - déviations, 47 géodésiques, 26 linéarisé, 51 lentilles gravitationnelles, 378
- Hamilton-Jacobi, 458
- Helmholtz, 727
- Jacobi, 461.
- Tuer, 33
- Klein-Gordon, 44, 86, 458
  - inflation, 481
    - roulement lent, 478
- Kolmogorov, 522.
- Langevin, 519
- lentille, 375
- Liouville, 331
- Mathieu, 511
- Maxwell, 43 ans, 88 ans
- Mészáros, 290 ans
- d'état, 140, 271, 818 énergie noire, 185 paramétrisation, 705
- géodésie perturbée, 308
- Poisson, 239
  - essai, 65
- Raychaudhuri, 36, 139, 172
- Sachs, 395
- Saha, 217

- Schrodinger, 83
- Tomonaga-Schwinger, 551
- Weyl, 115
- Equivalence
  - principle of, 14
- EROS, 390
- Estimator, 248
- Euclidean space, 718
- Euler
  - B function, 804
  - T function, 804
  - équation, 41, 238
- Euler-Lagrange
  - équation, 69
- Eulerian perturbations, 241
- Event horizon, 160
- Extrinsic curvature, 37, 45, 486, 820
- JNL, 530
- $F$  term, 612
- Faber-Jackson relation, 418
- Fayet-Iliopoulos, 617
- Fermi constant, 796
- Fermi-Dirac, 189
- Fermion
  - mass, 110
- Field
  - canonically conjugate, 72
  - electric, 43
  - Kalb-Ramond, 751
  - magnetic, 43
  - scalar, 43, 87
  - complex, 95
- Fifth force, 58
- Filter, 248
- Filtering, 247
- Fixed point, 169
- Flat-sky, 346
- Flatness, 451, 452
  - problem, 229
- Flow
  - irrotational, 38
- Fluid
  - approximation, 333
  - barotropic, 141
  - perfect, 41
- Fock
  - représentation, 490
  - space, 93
- Fokker-Planck équation, 520
- Force
  - fifth, 58
- Foreground émissions, 225
- Formula
  - Sachs-Wolfe, 307
- Fourier
  - transform, 806, 812
  - spherical, 814
- Frame
  - Einstein, 581, 742
  - Jordanie, 580, 741
  - chaîne, 580, 741
- Gel, 190, 194, 200
  - interaction faible, 208
- Friedmann
  - équation, 139, 818
    - Système dynamique, 145
    - généralisé, 42, 140 réduit, 141
    - tenseur scalaire, 584
- Friedmann-Lemaître
  - métrique, 133
- Fonction
  - Bessel, 808
  - corrélation, 246
  - répartition, 330, 339
    - invariant de jauge, 339
  - Euler B, 804
  - Euler F, 804
  - Vert, 320, 521
  - Hankel, 808
  - Bessel sphérique, 806, 809
  - transfert, 292
- Dérivé fonctionnel, 70
- Fondamental
  - formulaire, 485
  - observateur, 136
  - avion, 179, 418
- Galaxie
  - catalogue, 296
  - elliptique, 417
  - Voie Lactée, 414
  - courbes de rotation, 65
  - spirale, 414, 415
- Groupe galiléen, 13
- Jauge
  - boson, 107
  - à venir, 260
  - dépendance, 273
  - tranchage plat, 259
  - liberté, 50
  - Gauss, 259
  - groupe, 107
  - harmonie, 50
  - fonction de distribution invariante, 339
  - perturbations invariantes, 251
  - variables invariantes, 53, 253, 254, 339, 480, 820
  - longitudinale, 258
  - Lorentz, 89 ans
  - Newtonien, 258
  - gaussienne normale, 765
  - problème, 252
  - symétrie, 107
  - synchrone, 259
  - variables, 257
- Gauss
  - relation, 37, 762

relation scalaire, 37

- Gauss-Bonnet
  - term, 769
- Gaussian
  - filter, 248
  - initial conditions, 473
- Gegenbauer
  - polynomials, 805
- Gell-Mann-Nishijima
  - relation, 116, 120, 562
- General relativity, 11
  - $D$  dimensions, 737
  - modification, 443
- Generalized
  - coordinates, 69
  - momenta, 69
  - velocity, 69
- Generator, 103
- Géodésie
  - déviaton équation, 47
  - équation, 26
    - linearized, 51
    - perturbed, 308
  - flow, 35
- GeV, 797
- Goldstone boson, 109
- Grand Unification
  - Eg, 563
  - $SO(10)$ , 563
  - $SU(5)$ , 563
- Grassmann variables, 607
- Gravitational lensing, 378 by
  - strings, 663
  - thin-lens, 375
- Gravitational waves, 53, 54
  - CMB, 368
  - détection, 64
  - energy density, 494
  - inflation, 482
  - polarization, 54
  - power spectrum, 329, 493
  - primordial, 368
  - propagation, 53, 262, 267
  - quantization, 492, 496, 498
  - radiation, 63
    - Gravitino, 434, 509
    - définition, 622
    - problem, 434
    - Rarita—Schwinger action, 622
- Gravity
  - induced, 771
  - quantum, 748
- Green function, 320, 521 Group, 101
  - Abelian, 102
  - dimension, 106
  - exceptional, 105
  - fundamental, 649
  - Galilean, 13
  - gauge, 107
  - Grand Unification, 560
  - holonomie, 718 homotopie, 650
  - Mensonge, 102, 103, 168
  - ordre, 105, 106
  - Poincaré, 17 ans
  - quotient, 633, 649
  - rang, 105, 106
  - représentation, 104
  - simples, 105
  - constante de structure, 103
- Facteur de croissance, 243
- Hadrons, 100
- Halo
  - matière noire, 386
- Équation de Hamilton-Jacobi, 458
- Hamiltonien, 69, 72
  - densité, 45
  - formalisme, 44
- Fonctions de Hankel, 808
- Harmonie
  - jauge, 50
  - oscillateur, 83
- Harmonies
  - sphérique, 335
  - de spin  $S$ , 344
- HDM, 427
- Heisenberg
  - représentation, 82, 489
- Hélium, 212, 215
- Équation de Helmholtz, 727
- Modèle hiérarchique, 299
- Problème de hiérarchie, 605
- Higgs
  - mécanisme, 108
  - potentiel, 108
- Espace de Hilbert, 79
- Homéomorphisme, 649
- Homogénéité, 131, 170
- Horizon
  - événement, 160 particule, 162
  - problème, 229, 453
  - Son, 637
- Hubble
  - constante, 150, 178, 181, 188, 228, 365, 392, 799
  - diagramme, 177, 178, 185
  - distance, 150
  - flux, 138
  - loi, 137, 177
    - généralisé, 47
  - temps, 150
- Inflation hybride, 468
- Hypercharge, 116
- Hypothèse
  - cosmologique, 129
  - grands nombres, 711
- HZT, 183



- Identifie
  - Bianchi, 33 ans
- Identité
  - Gauss, 762
  - Weingarten, 761
- Images
  - multiple, 376
- Indice
  - spectral, 368, 478, 496, 499
- Métrie induite, 485
- Inflation, 451
  - D-terme, 683
  - Terme F, 681
  - assisté, 524
  - attracteur, 463
  - chaotique, 465
  - relation de cohérence, 496, 499, 500, 504, 528
  - contraintes, 503
  - fin, 463, 484, 487, 507
  - éternel, 516
  - équations d'écoulement, 506
  - variables invariantes de jauge, 480
  - ondes de gravité, 482
  - hybride, 468, 661, 684
  - modes d'isocourbure, 524, 526
  - modèles, 678
  - fluctuations modulées, 529
  - multichamp, 523
  - nouveau, 455
  - Inflation, 525
  - vieux, 454
  - espace des phases, 463
  - loi de puissance, 467, 495
  - champ unique, 457
  - roulement lent, 680
  - stochastique, 518
  - super, 776
  - supergravité, 678
- Gonflage, 454
  - taux de désintégration, 509
  - potentiel, 505
  - fluctuations quantiques, 478
- Condition initiale
  - chaotique, 466
- Instanton, 572
- Intercommutation, 666
- Symétrie interne, 97
- Invariance
  - conforme, 596
  - discret, 121
- Variété invariante, 169
- Univers insulaire, 517
- Isocourbure, 524, 526
  - pics acoustiques, 322
  - spectre de puissance angulaire, 313, 369 modes
  - corrélés, 527
  - conditions initiales, 285, 322
  - modes, 281
  - Plateau Sachs-Wolfe, 318
- Isospin, 116
- Isothermal
  - sphere, 385
- Isotropy, 131, 171 group, 169
- Jacobi
  - équation, 461
  - identity, 168
- Jeans length, 239
- Jordan frame, 580, 741
- Junction conditions, 485, 762
  - cosmology, 486
- K-correction, 157
- K-essence, 698
- Kähler potential, 622
- Kaiser-Squire algorithm, 402
- Kaiser-Stebbins effect, 665
- Kalb-Ramond field, 751
- Kaluza-Klein, 737
- K, 51
- Killing
  - équation, 33
  - vector, 33, 168
  - Friedmann-Lemaître, 135
- Klein-Gordon
  - équation, 44, 86
- Kolmogorov equation, 522
- Lagrangian, 69, 71
  - density, 45
  - perturbations, 241
- Landscape, 518
- Langevin équation, 519
- Laplacian
  - eigenmodes, 813
- Lapse function, 44
- Large-scale structure, 296
  - numerical simulation, 302
- Last-scattering surface, 220
  - thickness, 324
- Law
  - de Vaucouleur, 180
  - Hubble, 137, 177
- Legendre
  - polynomials, 805, 811
- Leibniz rule, 70
- Lemma
  - Stewart—Walker, 255
- Length
  - corrélation, 635, 637, 638
  - Jeans, 239
  - Planck, 797
- Lens
  - critical, 382
  - équation, 378
  - space, 725
  - strong, 382
- Lensing

- st.rong, 382
- weak, 382
- Lepton, 100, 115
- Lie
  - algebra, 103, 168 dérivative, 31
  - group, 102, 168
- Lifetime
  - neutron, 798
  - proton, 567
- Light
  - bending, 60
  - curve, 388
- Limber approximation, 399
- Limit
  - BPS, 648
- Liouville
  - équation, 331
  - operator, 198
- Lithium, 215
- Look-back time, 151, 158
- Lorentz
  - gauge, 89
  - invariance, 20, 58
  - tests, 58
  - invariant measure, 89
  - transformations, 14
- Low surface brightness, 418
- LSP, 433, 606, 621
- Luminosity, 156
  - distance, 154, 159, 182 solar, 796
- M-theory, 748
- MACHO, 390
- Magnetic field, 43
- Magnification, 376
  - bias, 394
- Magnitude, 156
  - bolometric, 156
- Majorana
  - spinor, 606
- Manifold, 21
  - Calabi-Yau, 755
- Mass
  - aperture, 404
  - cluster, 421
  - dynamical, 413
  - électron, 798
  - fraction, 207
  - lens, 414
  - neutrinos, 559, 568
  - Planck, 797
  - proton, 798
  - sheet, 386
  - solar, 796
- Matching conditions, 762
- Mathieu équation, 511
- Matrix amplification, 381
- Cabbibo-Kobayashi-Maskawa, 556
- CKM, 555
- déformation, 397
- distorsion, 380
- optique, 396
- Pauli, 88 ans
- symplectique, 106
- Égalité matière-rayonnement, 188.
- Maxwell
  - équation, 43, 88
  - théorie, 42
- Mesure
  - Invariant de Lorentz, 89
- Mécanique
  - classique, 69
  - quantique, 79
- Mécanisme
  - 'balançoire', 575
  - Brandenberger-Vafa, 757
  - Higgs, 108 ans
  - Croquette
    - cordes cosmiques, 641
    - murs de domaine, 638
- Périhélie de Mercure, 62
- Méson, 100
- Équation de Mészáros, 290
- Métrique
  - 5 dimensions, 738
  - conique, 663
  - induit, 485, 761
  - Kaluza-Klein, 738
- MeV, 797
- Microlentilles, 387
- Voie Lactée, 414
- Milne Espace-temps, 144
- Modèle
  - Big-Bang, 177
  - hiérarchique, 299
  - physique des particules, 68
  - Pati-Salam, 562
  - Randall Sundrum, 764
  - effondrement sphérique, 300
  - cosmologique standard, 129
  - Fromage suisse, 171
  - Univers, 129
- Fluctuations modulées, 529
- Module, 755
- Momenta
  - généralisé, 69
- LUNDI, 440
- Monopoles, 231, 647, 656
  - problème, 232.
- MSSM, 618
- Moukhanov-Sasaki
  - variables, 480, 488
- Multigravité, 701
- Expansion multipolaire , 335 , 348
- N-corps, 302
- Rivière-Goto

- action, 745
- Neutre*, 434
- Neutrinos , 196 , 295 , 431
  - Dirac, 568
  - Majorane, 568
  - masse , 559 , 568
  - oscillations, 557
  - stérile, 432
- Neutron
  - à vie, 798
- Newton
  - constante, 796.
- Perturbations newtoniennes, 238
- NFW, 425
- Nielsen-Olesen
  - configuration, 644
- Théorème de Noether, 73
- Non-gaussianité, 530
- Equilibre nucléaire, 206
- Nucléation, 636
- Nucléosynthèse, 204, 211
- Le nombre compte, 157
- Simulation numérique, 302
- Observateur
  - fondamental, 136
- Oklo, 713
- Sur coque, 90
- Opérateur
  - anéantissement, 84
  - création, 84
- Optique
  - profondeur, 220
  - matrice, 396
- Optique
  - géométrie, 48
- Paramètre
  - cosmologique, 141, 364.
  - décélération, 158
  - post-newtonien, 584
    - contraintes, 62
    - définition, 60
  - roulement lent, 459, 469
  - Stokes, 343
- Parité, 381
- Parsec, 798
- Particule
  - création, 491
  - horizon, 162
- Pati Salam
  - modèle, 562
- Matrices de Pauli, 88
- Vecteur de spin de Pauli-Lubanski, 609
- brane p, 744
- PDF, 248
- Diagrammes de Penrose, 163
- Fluide parfait, 255
  - tenseur énergie-contrainte, 138, 817,
- 821 Perturbations
  - Eulérien, 241
  - invariant de jauge, 251
  - facteur de croissance, 243
  - Lagrangien, 241
  - Newtonien, 238
  - régime non linéaire, 249, 299
- Transition de phase, 454, 628
  - premier ordre, 635
  - ordre, 632
  - deuxième ordre, 636
- Photons, 117
  - fluide, 294
- Mélange photon-axion, 702
- Plasma photon-baryon, 318
- Planck
  - constante, 796
  - longueur, 797
  - masse, 797
  - température, 797
  - temps, 797
  - unités, 797
- Plasma
  - photon-baryon, 318
- Verset Univers de poche, 517
- Poincaré
  - algèbre, 18
  - groupe, 17
- Poisson
  - parenthèses, 69, 73
  - équation, 65, 239
- Polarisation, 342, 407
  - Équation de Boltzmann, 344
- Polyèdre
  - fondamental, 718
- Polynômes
  - Gegenbauer, 805
  - Legendre, 805, 811
- Indice de Pontriaguine, 643
- Invariance de position, 20
  - essais, 58
- Post-Newtonien, 60, 584
- Potentiel
  - en vigueur, 631, 632, 682
  - Higgs, 108 ans
  - Kahler, 622.
  - projeté, 380
- Spectre de puissance, 247, 282, 474, 492
  - angulaire, 311, 354
    - modes scalaires, 312
  - bleu, 478
  - convergence, 399
  - ondes de gravité, 493
  - régime non linéaire, 301
  - normalisation, 812
  - observation, 298
  - rouge, 478
    - invariant d'échelle, 478
- Inflation selon la loi de puissance, 467

- Pré-Big Bang, 775
- Préchauffage, 507, 510
- Nucléosynthèse primordiale, 204
- Principe
  - anthropique, 518, 702
  - Copernicien, 130, 704.
  - cosmologique, 130, 167
  - équivalence, 19
    - Einstein, 20 ans
    - essais, 55
    - faible, 14, 20
  - superposition, 80, 550
  - incertitude, 79
  - uniformité, 130
  - unitarité, 82.
- Fonction de distribution de probabilité, problème 248
  - $\gamma$ , 683
  - coïncidence, 233
  - constante cosmologique, 233, 685
  - secteur sombre, 233
  - planéité, 229, 451, 452
  - jauge, 252
  - gravitino, 434
  - hiérarchie, 605, 759
  - horizon, 229, 453
  - modules, 755
  - monopôles, 232, 656
  - de l'origine des structures, 231 Polonyi, 755
  - Big-Bang standard, 452
  - trans-Planckien, 532
- Théorie Proca, 88
- Profil
  - $\gamma$ , 328
  - NFW, 425
  - Sersic, 418.
  - universel, 416
- Proton
  - pourriture, 567
  - vie, 206
  - masse, 798
- QCD, 113
  - Lagrangien, 113
- Quantification
  - perturbation de la densité, 488
  - ondes gravitationnelles, 492, 496, 498 (rôle lent), 494, 496
- Champ quantique
  - de Sitter, 470, 476.
  - gonflement, 478
  - roulement lent, 477
- Gravité quantique, 570
- Quarks, 114
- Quasar, 390
  - spectres d'avortement, 714
- Quintessence, 592, 690.
  - prolongé, 695
- problèmes, 696
- $T_I$ , 271, 484
- Parité K, 620
- Radiation
  - contrainte anisotrope, 318
- Radion, 764
- Raychaudhuri
  - équations, 36, 139, 172
- RDM, 428
- Vitesse de récession, 137
- Théorème de réciprocité, 153
- Recombinaison, 217, 218
- Reconnexion, 666
- Redshift, 48, 137, 308
  - dérive du temps, 159
- Piste Regge, 745
- Réchauffage, 507
  - paramétrique, 510
  - tachyonique, 515
  - température, 509
- Réionisation, 327
- Relation
  - Codazzi, 37 ans
  - Faber-Jackson, 418
  - Gauss, 37, 762
  - Gauss, scalaire, 37
  - Gell-Mann-Nishijima, 116, 562 Tully-Fisher, 179, 416
- Relativité
  - général, 19
    - épreuves, 55, 60, 65
  - spécial, 14
- Relis, 231.
  - cold, 201
  - hot, 203
  - thermal, 431
  - warm, 204
- Représentation
  - adjoint, 104
  - chiral, 88
  - conjugate, 104
  - équivalent, 104
  - fundamental, 106
  - Heisenberg, 82
  - irréductible, 104
  - Schrödinger, 82
  - unitary, 104
- Résonance
  - parametric, 510
  - stochastic, 513
- Ricci
  - tensor, 33, 817
    - Friedmann—Lemaître, 135
- Riemann
  - tensor, 31, 817
- Rotation curves, 65, 412
- Runaway dilaton, 592 Running, 500
- Rydberg constant, 796

Équation de Sachs, 395  
Sachs-Wolfe

- effet, 307
- formule, 311
- intégré, 326
- plateau, 317, 501
- Équation de Saha, 217
- Conditions Sakharov, 569.
- Scalaire
  - modes, 263, 265
  - multiplication, 269
- Champ scalaire, 43, 87
  - action, 457
  - baryonique, 576
  - D-dimensionnelle, 596
  - Équation de Friedmann, 458
  - gonflement, 457
  - quantification, 495
  - tenseur d'énergie de contrainte, 479, 818
- Tenseur scalaire
  - théorie, 579
- Théorie du tenseur scalaire
  - Équation d'Einstein, 581
  - Équation de Klein—Gordon, 581
- Facteur d'échelle, 140
  - roulement lent, 477
- Régime de détartage, 667
- SCDM, 424
- Scénario
  - ekpyrotique, 781
- Schrödinger
  - équation, 83
  - représentation, 82
- Schwarzschild
  - rayon, 796
  - espace-temps, 60
- SCP, 183
- SDSS, 296
- Mécanisme à bascule, 568
- Auto-reproduction, 516
- Défauts semi-topologiques, 651
- Profil Sersique, 418
- Effet Shapiro, 61
- Tondre
  - cosmique, 380, 397, 402
  - mesure, 405
- Traversée d'obus, 242
- Vecteur de décalage, 44
- Année sidérale, 798
- SIDM, 428
- erg, 249
- Amortissement en soie, 323
- Asymétrie, 250
- Rouleau lent, 494
  - approximation, 459
  - attracteur, 463
  - expansion du potentiel, 461
  - Klein-Gordon, 478
  - paramètres, 459, 469
  - prédictions, 496
  - quantification, 498
  - facteur d'échelle, 477
  - champ d'essai, 477
- Lissage, 247
- sneutrino, 433
- Solaire
  - luminosité, 796
  - masse, 796
- SO(n), 106
- SO(10), 564
- Son
  - vitesse, 141, 239, 818, 821
- Espace
  - cheminée, 721
  - connecté, 649
  - courbure constante, 34
  - couvrant, 718
  - cylindrique, 739
  - Euclidien, 718
  - Fock, 93
  - ans Hantzsche—Wendt, 720.
  - Hilbert, 79
  - hyperbolique, 726
  - Klein, 721
  - lentille, 725
  - quotient, 634
  - dalle, 722
  - sphérique, 722
- Espace-temps
  - Minkowski, 16
  - ans Blanchi, 171
    - classement, 172
    - type I, 172
  - conique, 663
  - cosmologie, 131
  - courbé, 19, 594
  - de Sitter, 166, 455.
  - Friedmann-Lemaître, 133, 816
    - Symbole de Christoffel, 134
    - dynamique, 143
    - Tenseur d'Einstein, 135
    - Vecteur de destruction, 135
    - perturbé, 251, 819
    - Tenseur de Ricci, 135
  - Lemaître-Tolman-Bondi, 170 à
  - symétrie maximale, 34, 132
  - Milne, 144
  - Minkowski, 15
  - ans Newtonien, 11
  - Schwarzschild, 60
  - ans Fromage suisse, 171
- Relativité restreinte, 14
- Spectral
  - distorsion, 328
  - indice, 368, 478, 496 en cours d'exécution, 500
  - roulement lent, spectre
- 499
  - corps noir, 799
  - électromagnétique, 799
- Vitesse
  - de lumière, 796

- du son, 239
- Sphaléron, 572
- Sphère
  - isotherme, 385
- Sphérique
  - Fonction Bessel, 809
  - Fonctions de Bessel, 806
  - effondrement, 300
  - harmonies, 805
  - vagues, 93
- Instabilité spinodale, 468
- Spinor
  - Dirac, 606
  - Majorane, 606
  - Weyl, 606
- Galaxie spirale, 414, 415
- Scission
  - 1+3, 34
- Sp(2n), 106
- Regroupement stable, 301
- Explorateur d'état, 707
- Neutrino stérile, 432
- Lemme de Stewart-Walker, 255
- Description stochastique, 246
- Paramètres de Stokes, 343
- Énergie de stress
  - tenseur, 77
    - définition, 40
    - électromagnétisme, 42
    - fluide parfait, 255
    - champ scalaire, 43
    - symétrisation, 78
- Chaîne
  - bosonique, 753
  - fermé, 749
  - cosmique, 661
  - cosmologie, 737
  - cadre, 580, 741
  - hétérotique, 751
  - ouvert, 749
  - théorie, 737
  - type I, 749
  - types IIA et IIB, 751
- Fort
  - condition énergétique, 452
  - lentille, 382
- Sous-Hubble, 266, 289
- SUGRA, 624
- S(J(n), 106
- Effet Sunyaev-Zel'dovich, 181, 328
- Super-Hubble, 266, 285
- Superchamps, 612
- Supergravité, 678
- Supermultiplet, 609
  - vecteur, 614
- Supernovae Ia, 179
- Principe de superposition, 80
- Superpotentiel, 612
- Théorie des supercordes, 747
- Supersymétrie, 678
  - prolongé, 609
  - multiplet, 609
- Surface de transitivité, 169
- SVT, 52, 251.
  - décomposition, 257, 335, 481, 738, 819
- Symétrie
  - coupure, 111, 118, 628, 630 schéma de coupure, 633
  - jauge, 107
  - interne, 97
  - locale, 107
  - rupture spontanée, 632
- Rupture de symétrie, 628, 630
  - Modèle Abélien-Higgs, 630
  - grande unification, 564
- Monopôle 't Hooft-Polyakov, 647
- T-dualité, 755
- Tachyon, 699, 746
- Température, 334
  - BBN, 211, 228
  - CMB, 217, 228, 799
  - critique, 630
  - espèces découplées, 195
  - découplage, 799
  - égalité, 228
  - gel, 206
  - Hagedorn, 632, 756
  - neutrinos, 799
  - de l'Univers, 190, 195
  - Planck, 797
  - réchauffage, 509
- Tenseur
  - calcul, 25
  - définition, 23
  - Einstein, 33 ans
    - Friedmann-Lemaître, 817
    - Friedmann-Lemaître perturbé, 820
  - électromagnétique, 42
  - courbure extrinsèque
    - Friedmann-Lemaître perturbé, 820 modes, 261, 262, 267
  - Ricci, 33 ans
    - Friedmann-Lemaître, 817
    - perturbé Friedmann-Lemaître, 819
  - Riemann, 31
    - Friedmann-Lemaître, 817
  - énergie-stress, 77, 255.
    - canonique, 77
    - champ complexe, 96
    - définition, 40
    - électromagnétisme, 42
    - fluide parfait, 138, 817, 821 champ scalaire, 43, 821
- Terme
  - Gauss-Bonnet, 769
- Test
  - principe d'équivalence, 55
  - relativité générale, 55, 60, 65
  - Invariance de Lorentz, 58

- invariance de position, 58, 712 universalité
- de la chute libre, 14, 55, 712 Textures. 648
- Théorème
  - Coleman-Mandula, 606
  - CPT, 124
  - Haag Lopuszanski-Sohnius, 606
  - Noéther, 73 ans
  - réciprocité, 153
  - viral, 419
- Théorie
  - Aboyeur, 584
  - Einstein, 39 ans
  - Maxwell, 42 ans, 88 ans
  - Proca, 88
  - tenseur scalaire, 579
  - supergravité, 678
  - supercorde, 747
- Comptes thermiques, 431
- Thermodynamique, 188
  - à l'équilibre, 188
  - hors équilibre, 197
  - supercordes, 756
- Thomas
  - diffusion, 338, 348
  - polarisation, 342
- approximation de couplage serré, 296, 319
- temps
  - conforme, 140
  - retard, 383
  - Hubble, 799
  - regard en arrière, 151, 158
  - Planck, 797
  - éteindre, 637
- Tomonaga-Schwinger
  - équation, 551
- Chapeau haut de forme, 248
- Défauts topologiques, 531, 634, 697
  - cordes cosmiques, 661
  - murs de domaine, 653
  - hybride, 660
  - régime de détartrage, 667
  - texture, 648
- Topologie
  - de l'Univers, 716
- Tore, 719
- Trans-Planckien, 532
- Fonction de transfert, 292
- Transformation
  - conforme, 581, 596
- Transition
  - électrofaible, 574
  - phase, 628
- Traduction
  - Clifford, 718
- Transport
  - parallèle, 29
- Relation Tully-Fisher, 179, 416.
- Principe d'incertitude, 79
- Principe d'uniformité, 130
- Unitarité
  - lié, 435
  - principe, 82
- Représentation unitaire, 104
- Unités
  - conventions, 142
  - naturel, 797
  - Planck, 797
- Universalité de la chute libre, 14, 20, 55
  - essais, 14, 55, 712
- Modèle d'univers, 129
- Vachaspati-Vilenkin
  - algorithme, 666
- Aspirateur, 597
- Bunch-Davies, 473, 599
  - énergie, 85, 685
  - état, 490
  - tenseur d'énergie de contrainte, 685
- Variables
  - canonique, 488
  - invariant de jauge, 53, 253
  - Grassmann, 607
  - Moukhanov-Sasaki, 488.
- Vecteur, 22
  - Tuer, 33
  - modes, 261, 263, 265, 267
  - changement, 44
- Rapidité
  - généralisé, 69
  - proprement dit, 137
- VÉV, 108, 629
- Théorème du Virial, 419
- Vortex, 640
- Vorton, 438, 646
- Vagues
  - gravitationnel, 53
  - primordial, 482
  - sphérique, 93
- WDM, 427
- Faible
  - angle, 117
  - interactions, 208
  - lentille, 382
- Angle de Weinberg, 117
- Weyl
  - équation, 115
  - spineur, 115, 606
- Symboles de Wigner, 807
- MAUVIE, 424, 438
- Wimpzilla, 435
- Numéro d'enroulement, 643
- Fonction fenêtre, 248
- Rapprochement WKB, 474, 493, 535
- WMAP, 1, 184, 187, 216, 221, 358, 502, 504, 531.
  - 732
- $U(n)$ , 106
- $W^*$ , 117



- Wronskian, 490, 599.
- $Y_p$ , 205, 212, 215 Coefficients de Yukawa, 120
  - potential, 583
- $Z^\circ$ , 117
  - 270, 484
- CBST> 484, 487

This book provides an excellent introduction to the necessary concepts of cosmology, as well as an overview of the observation for launching research in providing

définitions et principales techniques et idées discutées aujourd'hui. Le livre est divisé en trois parties. La première partie résume les fondamentaux de la physique théorique nécessaires à la cosmologie (relativité générale, théorie des champs, physique des particules). La partie 2 décrit le modèle standard de la cosmologie et comprend des solutions cosmologiques des équations d'Einstein, le modèle du big bang chaud, la théorie des perturbations cosmologiques, les anisotropies du fond micro-ondes cosmique, la lentille et les preuves de la matière noire et l'inflation. La troisième partie décrit les extensions de ce modèle et ouvre les recherches actuelles dans le domaine : théories du tenseur scalaire, supersymétrie, problème de la constante cosmologique et de l'accélération de l'univers, topologie de l'univers, grande unification et baryogenèse, défauts topologiques et transitions de phase, cordes une cosmologie inspirée incluant les branes et les derniers développements. L'ouvrage détaille toutes les dérivationes et conduit l'étudiant jusqu'au niveau des articles de recherche.

Patrick Peter et Jean-Philippe Uzan sont à l'Institut d'Astrophysique de Paris, France.

"Remplit une niche que d'autres textes récents sur la cosmologie laissent ouverte, à savoir les dérivationes autonomes en cosmologie qui couvrent à la fois des questions fondamentales et des applications à l'univers réel qui sont d'un grand intérêt pour les observateurs."

Joseph Silk, *Université d'Oxford*

« Un livre remarquable. Écrit avec beaucoup d'autorité et d'enthousiasme, il donne une vision globale de la cosmologie primordiale d'aujourd'hui. Le style est accessible à un novice pour une bonne introduction, tout en étant suffisamment précis techniquement pour être utile aux spécialistes.

Ted Jacobson, *Université du Maryland*

ÉGALEMENT DISPONIBLE CHEZ OXFORD  
UNIVERSITY PRESS

Cosmologie  
Steven Weinberg

Astrophysique des particules : deuxième  
édition Donald H. Perkins

Colère cosmique – Abdus Salam : le premier scientifique musulman  
du prix Nobel, Gordon Fraser

Révolutionnaires du cosmos : les astro-physiciens et S. Glass

Image de couverture : « Le vent » de Madeleine Attal (1997).

ISBN 978-0-19-920991-0



9 780199 209910

OXFORD

PRESSE UNIVERSITAIRE

[www.oup.com](http://www.oup.com)

ou équivalent

$$X_{ij} \partial x^i \partial x^j = \partial x^i + f(x) dx^i,$$